Roberto Ávila

Ensino Médio

TEORIA E QUESTÕES DE MATEMÁTICA

Toda matéria do Ensino Médio e revisão do Ensino Fundamental.
Mais de 2000 exercícios propostos com gabarito.
ENEM, UERJ, PUC, AFA, EFOMM, EN, EsPCEx, EEAR e EsSA.

Nova Edição
Revisada e Ampliada

EDITORA XYZ

APRESENTAÇÃO

Esta obra é indicada para todos os alunos e colegas professores que desejam ter informações precisas, simples e atualizadas dos vestibulares mais concorridos do Brasil.

Elaborado com a experiência de mais de quarenta anos de sala de aula, este livro faz uma revisão dos conceitos mais importantes do Ensino Fundamental e abrange todo o programa do Ensino Médio, destacando-se: Aritmética; Álgebra; Geometrias Plana, Espacial e Analítica e Álgebra Linear. Nesta edição foram incluídos os assuntos: Estatística, Análise Gráfica, Projeções e Simetrias, frequentemente cobrados no Novo Enem. Em razão desse conteúdo, sugerimos a sua utilização como livro texto ou de apoio para todas as séries do Ensino Médio.

Em todos os capítulos há exercícios selecionados dos últimos exames vestibulares e suas respectivas respostas, auxiliando o leitor na percepção dos objetivos das bancas elaboradoras.

Com o desejo de que este trabalho seja uma fonte ímpar de consulta, acompanhamento e treinamento para os futuros universitários, desde já agradeço, em primeiro lugar a Deus, por me capacitar, e, em especial, à minha querida esposa, pelo incentivo e apoio incondicionais.

O Autor

SUMÁRIO

MATEMÁTICA I

MATEMÁTICA II

MATEMÁTICA III

APÊNDICES

Capítulo I

MATEMÁTICA BÁSICA

Introdução

Para o bom entendimento da matéria a ser estudada durante o Ensino Médio, cabe ressaltar a importância dos assuntos ministrados no decorrer de todo o Ensino Fundamental. Além de ser pré-requisito para alguns itens, a "Matemática Básica" tem sido tema de inúmeras questões dos últimos vestibulares. Portanto, faremos a seguir uma explanação teórica de assuntos importantes, já que muitos deles ficaram esquecidos com o tempo. Faça uma leitura cuidadosa da teoria apresentada, pois certamente você se surpreenderá com o volume de informações que você vai adquirir. Então aproveite, pois esta é uma chance única de recuperar o tempo perdido.

Sistemas de Numeração

Um mesmo número pode ser representado em vários sistemas, de bases diferentes. A base de um sistema de numeração é dada pela quantidade de dígitos (símbolos) que são utilizados na representação de qualquer número nesse sistema. É obrigatório que um sistema de numeração possua o dígito 0(zero). Abaixo relacionamos alguns sistemas de numeração importantes:

a) **SISTEMA BINÁRIO** (base 2)
Possui dois dígitos: 0, 1.

b) **SISTEMA TERNÁRIO** (base 3)
Possui três dígitos: 0, 1, 2.

c) **SISTEMA DECIMAL** (base 10)
Possui dez dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Neste caso, cada dígito é chamado de **algarismo.**

d) **SISTEMA DE BASE 11**
Possui onze dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A = 10.

Os dígitos maiores do que 9 são associados a letras maiúsculas do nosso alfabeto. O principal objetivo é evitar confusão. Imaginemos que tal convenção não existisse: quando víssemos o numeral 710 na base 11, não saberíamos dizer se possuía três dígitos (7, 1 e 0) ou dois dígitos (7 e 10). Assim, com a associação às letras maiúsculas, o numeral 710 na base 11 terá três dígitos, enquanto que o numeral **7A** terá dois dígitos.

e) **SISTEMA DE BASE 12**
Possui doze dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A=10, B=11.

f) **SISTEMA HEXADECIMAL** (base 16)
Possui dezesseis dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A =10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15.

Mudança de Base

Chamemos de base qualquer toda base diferente de 10. Temos a considerar três casos de mudança de base:

1º caso: Base 10 para base qualquer

Neste caso devemos dividir o número dado na base 10 pela base para a qual passaremos, procedendo-se sucessivas divisões dos quocientes obtidos pela base em questão, até obtermos um quociente menor que a base. O número escrito na base desejada é encontrado escrevendo-se o último quociente seguido pelos restos, lidos na ordem inversa em que foram obtidos.

Exemplos:

a) Escreva o número 72 na base 3:

```
72 | 3
 0 | 24 | 3
       0 | 8 | 3
           2 | 2
```

Logo $72 = (2200)_3$

NOTA: Quando o número está em uma base qualquer, deve ser escrito entre parênteses, com a base indicada à direita e abaixo do segundo parêntese. No caso da base 10, tal procedimento não é necessário.

```
1579 | 12
   7 | 131 | 12
          11 | 10
```

b) Escreva o número 1579 na base 12.
Logo $1579 = (AB7)_{12}$

2º caso: Base qualquer para base 10

Neste caso devemos multiplicar o primeiro dígito da esquerda do número dado pela base, adicionando o resultado ao segundo dígito. Tal resultado deve ser multiplicado pela base e, em seguida, o novo resultado somado ao terceiro dígito. Este procedimento deve ser repetido até o último da dígito da direita.

Exemplos:

a) Escreva na base 10 o número $(1223)_4$.

$1 \times 4 = 4 \rightarrow 4 + 2 = 6$

$6 \times 4 = 24 \rightarrow 24 + 2 = 26$

$26 \times 4 = 104 \rightarrow 104 + 3 = 107$

Daí $(1223)_4 = 107$

b) Escreva o número $(A25)_{11}$ na base 10.

$10 \times 11 = 110 \rightarrow 110 + 2 = 112$

$112 \times 11 = 1232 \rightarrow 1232 + 5 = 1237$

Daí $(A25)_{11} = 1237$

3º caso: Base qualquer para base qualquer

Não existe método que nos permita fazer tal mudança diretamente. É necessário que passemos antes para a base 10 (2º caso) e, em seguida, para a base qualquer que se deseja.

Exemplo:
Escreva o número $(123)_5$ na base 4.

→ Em primeiro lugar vamos passar da base 5 para base 10:

$1 \times 5 = 5 \rightarrow 5 + 2 = 7$

$7 \times 5 = 35 \rightarrow 35 + 3 = 38$

Então $(123)_5 = 38$

→ Agora passamos da base 10 para a base 4:

```
38 | 4
 2 | 9 | 4
     1 | 2
```

Daí $38 = (212)_4$

Concluindo: $(123)_5 = (212)_4$

Sistema Decimal de Numeração

É o sistema de base 10, ou seja, para representarmos qualquer número neste sistema, dispomos de 10 dígitos, que são chamados de **algarismos.** Os algarismos são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O algarismo 0 (zero) é o único dito **não significativo,** enquanto que os demais são chamados **significativos.**

Valor Absoluto e Valor Relativo

O **valor absoluto** de um algarismo é ele próprio, independente da posição que ocupa no número em questão.

Já o **valor relativo** depende da posição ocupada pelo algarismo no número.

Exemplo:

- No número 572, os valores absolutos dos algarismos 5, 7 e 2 são respectivamente 5, 7 e 2.
- Como: 572 = 500 + 70 + 2, temos que o valor relativo do algarismo 5 é 500, do algarismo 7 é 70 e o do 2 é 2.

Classes e Ordens

A localização de um algarismo em um número pode ser feita seguindo-se o critério de **ordens** ou o de **classes.**

Cada algarismo em um número representa uma **ordem.** As ordens são contadas da direita para a esquerda.

Exemplo:	8	9	4	3	←	**número**
	4ª	3ª	2ª	1ª	←	**ordens**

Para podermos ler um número devemos dividi-lo de três em três algarismos, da direita para a esquerda. Cada um desses grupamentos é chamado de **classe.** Dentro de uma mesma classe o primeiro algarismo da direita ocupa a casa das unidades, o segundo a casa das dezenas e o último a casa das centenas. A primeira classe é a **classe simples,** a segunda é a **classe de milhar,** a terceira a **classe de milhão,** a quarta a **classe de bilhão** e assim sucessivamente. A única classe que pode ser incompleta é a última.

Exemplo:

	Classe de bilhão	Classe de milhão			Classe de milhar			Classe simples		
O Número	**5**	**4**	**0**	**7**	**9**	**1**	**6**	**8**	**2**	**3**
	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u

tem 10 ordens e 4 classes, sendo 3 completas e uma incompleta.

Algarismos Romanos

O sistema de numeração romana se utiliza dos dígitos a seguir:

I=1   V=5   X=10   L=50   C=100   D=500   M=1000

Note que ao lado de cada dígito romano está o seu valor equivalente em algarismos arábicos (os algarismos que normalmente utilizamos no sistema decimal).

Para convertemos um número escrito em algarismos romanos para a numeração decimal ou vice-versa, é necessário que nos familiarizemos com alguns detalhes e propriedades, os quais abordaremos a seguir:

1. O sentido de leitura é da esquerda para a direita.
2. Quando encontramos um dígito de menor ou igual valor do que aquele que está imediatamente à sua esquerda, tais valores devem ser somados.

   Exemplos:

   a) MD = 1000 + 500 = 1500

   b) LX = 50 + 10 = 60

3. Quando encontramos um dígito de maior valor do que aquele que está imediatamente à sua esquerda, tais valores devem ser subtraídos.

   Exemplos:

   a) CM = 1000 – 100 = 900

   b) XL = 50 – 10 = 40

4. Apenas os dígitos associados a potências de 10 (I, X, C e M) podem aparecer repetidos, assim mesmo, no máximo três vezes consecutivas.

   Exemplos:

   a) MMMDCVII = 3607

   b) DCCCIX = 809

5. Cada barra colocada sobre um grupamento de dígitos multiplica por 1000 o valor desse grupamento.

   Exemplos:

   a) $\overline{VII}$ CCXXXV = 7235

   b) $\overline{\overline{XI}}$ IV = 11000004

Operações Fundamentais

Neste capítulo estudaremos a estrutura de cada uma das quatro operações fundamentais: **ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO** e **DIVISÃO.**

1. Adição

- O algoritimo ("esquema") da adição é:

$$\begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline C \end{array} \quad \text{ou} \quad A + B = C$$

Os termos **A** e **B** são as **parcelas,** enquanto o termo **C** é a **soma** ou **total.**

2. Subtração

- Nesse caso temos que:

$$\begin{array}{r} M \\ -S \\ \hline R \end{array} \quad \text{ou} \quad M - S = R$$

Onde **M** é o **minuento, S** o **subtraendo** e **R** é o **resto** ou **diferença.**

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) "Em toda subtração, a soma dos três termos é sempre igual ao dobro do minuendo".

$$M + S + R = 2M$$

Exemplo:

Na subtração: **12 – 4 = 8**

— Temos que M = 12, S = 4 e R = 8.

Logo: **M + S + R = 12 + 4 + 8 = 24 = 2M**

b) "Quando aumentamos ou diminuímos de um certo número o minuendo de uma subtração, o resto fica aumentado ou diminuído desse mesmo número".

Exemplo:

Na subtração: **38 – 10 = 28**

—Temos que M = 38, S = 10 e R = 28. Se adicionarmos, por exemplo, 3 unidades ao minuendo, teremos:

41 – 10 = 31

Logo: **M = 41** e **R = 31**, ou seja, o resto também foi aumentado de **3** unidades.

c) "Quando aumentamos ou diminuímos de um certo número o subtraendo, de um subtração, o resto fica diminuído ou aumentado desse mesmo número".

Exemplo:

Na subtração: **26 – 8 = 18**

—Temos que **M = 26**, **S = 8** e **R = 18**. Se subtrairmos, **5** unidades ao subtraendo, teremos:

Portanto **S = 3** e **R = 23**, e daí que o resto foi aumentando de **5** unidades.

26 – 3 = 23

3. *Multiplicação*

- Os modelos de multiplicação são:

— Onde **A** é o **multiplicando**, **B** é o **multiplicador** e **C** o **produto** ou **total**. O números **A** e **B** também podem ser chamados de **fatores**.

4. *Divisão*

5. Abaixo mostramos o algoritmo da divisão:

—Onde **D** é o **dividendo**, **d** o **divisor**, **q** o **quociente** e **r** o **resto**.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) "Em toda divisão, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente mais o resto"

Exemplo:

D = d x q + r

Na divisão:

37	8
5	4

—Temos **D = 37, d = 8, q = 4** e **r = 5**.

—Note que **D = d x q + r** ou seja **37 = 8 x 4 + 5**

b) "O maior resto que podemos obter em uma divisão de dividendo, divisor e quociente naturais não nulos, é sempre igual ao divisor menos uma unidade"

Exemplo: Em uma divisão de divisor igual a **10**, o maior resto possível é 9.

c) "Em uma divisão, quando multiplicamos ou dividimos o dividendo e o divisor por um mesmo número diferente de zero, o quociente não se altera, porém o resto fica multiplicado ou dividido por esse número".

Exemplo:

Consideremos a divisão:

38	14
10	2

—Se dividimos, por exemplo, o dividendo e o divisor por 2, temos:

19	7
5	2

Note que quociente não se alterou, porém o resto ficou dividido por 2.

d) "Toda divisão de resto zero (menor resto possível) é chamada de **divisão exata**".

Exemplo:

Consideremos a divisão exata:

21	7
0	3

Números Primos

Utilizando como universo o conjunto dos números inteiros positivos, diremos que um número é primo absoluto quando só é divisível por ele mesmo e pela unidade, sendo diferente de um 1(um), ou seja, é um número que possui exatamente dois divisores naturais.

Abaixo, enumeramos a sequência dos primeiros números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Quando o número possui mais de dois divisores naturais, é chamado de **número composto**. São compostos:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, ...

Método Para Verificação se Um Número é Primo

O processo através do qual verificamos se um número é primo, não é muito prático. Ao contrário, às vezes é por demais trabalhoso, mas é o único eficaz para qualquer número. Assim, devemos dividir o número dado ordenadamente pela sequência dos primeiros números primos. O número será primo se, ao longo dessas divisões sucessivas, obtivermos um quociente menor ou igual ao divisor, sem obter resto zero até então. Note que, se tal fato ocorre, ou seja, encontrarmos algum resto zero, significa que houve uma divisão exata e, portanto, há um divisor desse número diferente dele mesmo e da unidade, daí o número não será primo.

Exemplo:

Verifique se são primos os números: 311 e 527

a) **311**

Resolução:

Vamos dividir o número sucessivamente pela sequência dos primeiros números primos até encontrar resto zero (número não primo) ou quociente menor ou igual ao divisor utilizado (número primo)

311	11	311	13	311	17	311	19
3	28	12	23	5	18	7	16

quociente < divisor

Pelo exposto, o número **311** é primo.

b) **527**

Resolução:
Vamos seguir o mesmo raciocínio do exercício anterior.

527	2	527	3	527	5	527	7
1	263	2	175	2	105	2	75

527	11	527	13	527	17
10	47	7	40	0	31

divisão exata

Assim o número **527** não é primo

Decomposição em Fatores Primos

Decompor um número em fatores primos, ou *fatorar*, é escrevê-lo sob a forma de produto de potências de números primos distintos.

Um método prático para a fatoração de um número, é traçar à sua direita uma barra vertical e, à direita dela, colocarmos ordenadamente, um abaixo do outro, os números primos que são divisores do número dado. A cada divisor primo colocado, devemos dividir o número à esquerda da barra por ele, colocando o quociente obtido abaixo do número dividendo. Tal procedimento deve ser repetido tantas vezes quantas forem necessárias, até que à esquerda da barra tenhamos o número 1(um).

Exemplo:
Fatore os números:

a) **630**

Resolução: Vamos escrever o número, colocar a barra e efetuar as divisões sucessivas indicadas na regra acima:

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Portanto a forma fatorada do número é: $630 = 2 . 3^2 . 5 . 7$

b) **128**

Resolução: Vamos proceder de forma análoga ao exemplo anterior:

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Daí, tem que $128 = 2^7$

Divisores Positivos de Um Número

Exemplo ilustrativo:

Determine os divisores positivos do número 300.

—Para resolver tal problema, devemos seguir os passos abaixo:

1. Em primeiro lugar devemos fatorar o número:

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

2. Em seguida, colocamos uma barra vertical à direita dos fatores encontrados. À direita desta barra aparecerão os divisores pedidos. Para isto, devemos colocar à direita da barra, e um pouco acima da linha do primeiro fator encontrado, o número 1(um), que é divisor de qualquer número.

		1
300	2	
150	2	
75	3	
25	5	
5	5	
1		

3. O próximo passo é multiplicarmos cada fator obtido por todos os números que estiverem à direita e acima dele na barra que foi traçada. Quando houver a repetição de um fator, devemos multiplicá-lo apenas pelos números existentes na linha anterior, conforme mostrado a seguir:

		1					
300	2	2					
150	2	4					
75	3	3,	6,	12			
25	5	5,	10,	20,	15,	30,	60
5	5	25,	50,	100,	75	150	300
1							

Logo, os divisores positivos do número 300 são: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 25, 50, 100, 75, 150 e 300

Quantidade de Divisores Positivos de Um Número

Para obtermos a quantidade de divisores positivos de um número devemos multiplicar os expoentes obtidos na fatoração do número, acrescidos de uma unidade cada um.

Exemplo:
Quantos divisores positivos tem o número 300?

Resolução:
Fatorando o número 300 temos: $300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$

O número de divisores positivos $= (2 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 18$

Quantidade de Divisores Ímpares Positivos de Um Número

Neste caso devemos multiplicar apenas os expoentes das bases ímpares, acrescidos de uma unidade cada um.

Exemplo:

Quantos divisores ímpares positivos tem o número 300?

Resolução:

Fatorando o número 300 temos:

$$300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$$

O número de divisores ímpares positivos $= (1 + 1) \times (2 + 1) = 6$

Quantidade de Divisores Pares Positivos de Um Número

Neste caso temos duas opções de resolução: fazemos a diferença entre o número total de divisores e o número de divisores ímpares ou então multiplicamos o expoente do fator 2 pelos demais, acrescidos de uma unidade cada um.

Exemplo:

Quantos divisores pares tem o número 300?

Resolução:

Fatorando o número 300 temos:

$$300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$$

Número de divisores pares positivos $= 2 \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 12$

Divisibilidade

Um número **A** é divisível por um número **B** quando a divisão de **A** por **B** dá um quociente inteiro e resto zero (divisão exata). Neste caso podemos dizer também que **A** é múltiplo de **B**, ou ainda que **B** é divisor de **A**.

Neste capítulo estaremos preocupados em desenvolver métodos que nos permitam determinar o resto de determinadas divisões, sem a necessidade de efetuá-las. Vamos a eles:

Obtenção do Resto na Divisão Por:

1. **2**: Números pares deixam resto **0(zero)** e número ímpares deixam resto **1(um)**, quando divididos por **2**. Então, um número é divisível por **2** quando é par.

Exemplos:

Determine o resto da divisão por **2**, dos números:

a) **75687**

Resolução: O número **75687** é ímpar, logo o resto da sua divisão por **2** é **1(um)**, então não é divisível por **2**.

b) **843756**

Resolução: O número **843756** é par, logo o resto da sua divisão por **2** é **0(zero)**, então ele é divisível por **2**.

2. **3**: Devemos dividir a soma dos valores absolutos dos algarismos do número dado por 3, aproveitando o resto. Assim, o número será divisível por 3, quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos também o for.

Exemplo:

Determine o resto da divisão 3, dos números:

a) **742957**

Resolução: Em primeiro lugar, somemos seus algarismos:

Soma = **7 + 4 + 2 + 9 + 5 + 7**

Soma = **34**

– Agora, vamos dividi-la por 3: 34 ÷ 3 = 11, resto 1

Portanto, o resto da divisão do número **742957** por **3** é igual a **1**

b) **6475296**

Resolução:

Soma = **6 + 4 + 7 + 5 + 2 + 9 + 6**

Soma = **39** 39 ÷ 3 = 13, resto 0

Então, o resto da divisão do número **6475296** por 3 é igual a **0(zero)**, e ele é divisível por 3.

3. **4**: Devemos dividir o número formado pelos dois últimos algarismos da direita do número dado por 4, aproveitando o resto. Daí, um número será divisível por 4, quando o número formado por seus dois últimos algarismos da direita também o for.

Exemplo:

Determine o resto da divisão por **4**, dos números:

a) **7425787**

Resolução: O número formado pelos dois algarismos da direita é **87**.

– Agora vamos dividi-lo por 4: 87 ÷ 4 = 21, resto 3

Logo, o resto da divisão do número 7425787 por 4 é 3, e ele não é divisível por 4.

b) **3147892**

Resolução: 92 ÷ 4 = 23, resto 0

Então, o resto da divisão do número **3147892** por 4 é igual a **0 (zero)**, e ele é divisível por 4.

4. **5**: Devemos dividir o último algarismo da direita do número dado por 5, aproveitando o resto. Quando o último algarismo é menor que 5, ele já é o próprio resto. Daí, podemos concluir que um número será divisível por 5 quando ele terminar por 0 ou 5.

Exemplo:

Determine o resto da divisão por 5 dos números:

a) 845719

Resolução: É só dividir o último algarismo por 5:

9 ÷ 5 = 1, resto 4

Logo, o resto é igual a 4, e ele não é divisível por 5.

b) 8455342

Resolução: Como o último algarismo é menor que 5, ele será o próprio resto.

Daí o resto é igual a 2. Então, ele não é divisível por 5.

c) 473185

Resolução: O resto é igual a 0 (zero), pois o número termina em 5, e portanto ele é divisível por 5.

5. 6: Devemos dividir por 6 a soma do último algarismo da direita do número com o quádruplo da soma dos demais algarismos, aproveitando o resto.

Exemplo:

Determine o resto da divisão por 6 dos números:

a) 513947

Resolução: Somemos o último algarismo da direita ao quádruplo da soma dos demais:

$7 + 4 . (5 + 1 + 3 + 9 + 4) = 7 + 4 . 22 = 7 + 88 = 95$

Agora, vamos dividi-lo por 6.

$$\begin{array}{r|l} 95 & 6 \\ \hline \underline{5} & 15 \end{array}$$

Portanto, o resto da divisão do número 513947 por 6 é 5. Confira!

b) 874566

Resolução: Vamos seguir os mesmos passos do exemplo anterior.

$6 + 4 . (8 + 7 + 4 + 5 + 6) = 6 + 4 . 30 = 6 + 120 = 126$

Agora vamos dividí-lo por 6:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 6 \\ \hline \underline{0} & 21 \end{array}$$

Então, o resto da divisão do número 874566 por 6 é igual a 0 (zero), e ele é divisível por 6.

> **NOTA:** Se o seu objetivo não for a determinação do resto na divisão por 6, mas sim verificar se um número é divisível por 6, então basta que ele seja divisível simultaneamente por **2** e por **3**.

Exemplo:

a) O número 5742 é divisível por 6, pois é divisível por 2 e 3. Verifique.

b) O número 4765897 não é divisível por 6, pois não sendo par, não é divisível por 2. Se quisermos saber o resto na divisão por 6, devemos seguir a regra citada anteriormente.

6. 7: Devemos dividir por 7 a diferença entre as somas das classes ímpares e a soma das classes pares, aproveitando o resto.

→ Para esclarecer os conceitos de classes ímpares e pares, consideremos o exemplo abaixo.

4 5	6 7 3	2 1 3	4 9 8
Classe 4	Classe 3	Classe 2	Classe 1

Devemos lembrar que as classes são contadas da direita para a esquerda. Assim, a primeira classe, a classe simples, é a classe 1(ímpar), a segunda classe, a classe de milhar, é a classe 2 (par), já a terceira classe, a classe de milhão é a classe 3 (ímpar), e assim sucessivamente. Observe que, no exemplo anterior, o número 498 é par, mas ocupa uma classe ímpar (classe 1), o número 213 é ímpar, porém ocupa uma classe par (classe 2). Assim, no número anterior temos:

→ Classes ímpares: 498 (classe 1) e 673 (classe 3)

→ Classes pares: 213 (classe 2) e 45 (classe 4)

Exemplo:

Determine o resto da divisão por 7, dos números:

a) 84.325.436.397

Resolução: Vamos determinar a soma das classes ímpares e pares:

8 4	3 2 5	4 3 6	3 9 7
Classe 4	Classe 3	Classe 2	Classe 1

→ Soma das classes ímpares (S_i): 397 + 325 = 722

→ Soma classes das pares (S_p): 436 + 84 = 520

Agora calculamos a diferença entre as duas somas:

→ $S_i - S_p = 722 - 520 = 202$

Finalmente vamos dividi-la por 7:

$$\begin{array}{r|l} 202 & 7 \\ \hline \underline{6} & 28 \end{array}$$

Portanto o resto da divisão é igual a 6

b) 235.478.126

Resolução: Vamos determinar a soma das classes ímpares e pares:

→ $S_i = 126 + 235 = 361$

→ $S_p = 478$

→ $S_i - S_p = 361 - 478 = -117$

$$\begin{array}{r|l} -117 & 7 \\ \hline \underline{-5} & -16 \end{array}$$

Como o resto não pode ser negativo o "truque" é adicionarmos o divisor **7** a ele:

→ Resto = –5 + 7 = 2

7. 8: Devemos dividir o número formado pelos três últimos algarismos da direita do número dado por 8, aproveitando o resto. Daí, o número será divisível por 8, quando o número formado por seus três algarismos da direita também o for.

Exemplo:

Determine o resto da divisão por 8, do número 8745681.

Resolução: Em primeiro lugar vamos identificar o número formado pelos três últimos algarismos da direita e, em seguida dividí-lo por 8.

$$\begin{array}{r|l} 681 & 8 \\ \hline \underline{1} & 85 \end{array}$$

Portanto, o resto de tal divisão é 1.

8. **9:** Devemos dividir a soma dos valores absolutos dos algarismos do número por 9, aproveitando o resto.

Exemplo:
Determine o resto da divisão por 9, do número 47786638

→ Soma = 4 + 7 + 7 + 8 + 6 + 6 + 3 + 8 = 49

→ Agora vamos dividir essa soma por 9:

$$\begin{array}{r|l} 49 & 9 \\ \hline \underline{4} & 5 \end{array}$$

→ Assim, o resto desejado é igual a 4.

9. **10:** Neste caso o resto é igual ao último algarismo da direita do número. Podemos concluir que um número é divisível por 10 quando termina em 0 (zero).

Exemplo:
Determine o resto da divisão por 10 dos números:

a) 47936

Resolução: O resto é 6, pois este é o algarismo terminal do número.

b) 874360

Resolução: Este número é divisível por 10, pois termina em 0 (zero), que é o resto dessa divisão.

10. **11**: Devemos dividir por 11 a diferença entre as somas dos algarismos de ordens ímpares e pares, aproveitando o resto. Tal como fizemos no caso da divisão por 7, vamos relembrar alguns conceitos fundamentais para o bom entendimento dessa regra. Tomemos como exemplo o número abaixo:

É sabido que cada algarismo corresponde a uma ordem, e que as ordens são contadas da direita para esquerda. O número acima possui 9 algarismos, e então é formado por 9 ordens. A ordem 1 (ímpar) é ocupada pelo algarismo 6, a ordem 2 (par) é ocupada pelo algarismo 1, já o algarismo 7 ocupa a ordem 3 (ímpar), o algarismo 2 ocupa a ordem 4 (par) e, assim sucessivamente. É importante ressaltar que a paridade da ordem independe da paridade do algarismo que a ocupa. Assim, o algarismo 6, que é par, ocupa a ordem 1, que é ímpar, enquanto que o algarismo 1 que é ímpar ocupa a ordem 2 que é par.

Exemplos:
Determine o resto da divisão por 11 dos números:

a) 927160548

Resolução: Vamos identificar a soma, em separado, dos algarismos de ordens ímpares e pares

$S_i = 8 + 5 + 6 + 7 + 9 = 35$

→ Soma das ordens pares

$S_p = 4 + 0 + 1 + 2 = 7$

O próximo passo é obtermos a diferença entre essas somas, e em seguida a sua divisão por 11.

→ $S_i - S_p = 35 - 7 = 28$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 11 \\ \hline \underline{6} & 2 \end{array}$$

Portanto, o resto desejado é 6.

b) 6093718254

Resolução: Vamos seguir os mesmos passos do exemplo anterior:

→ $S_i = 4 + 2 + 1 + 3 + 0 = 10$

→ $S_p = 5 + 8 + 7 + 9 + 6 = 35$

→ $S_i - Sp = 10 - 35 = -25$

$$\begin{array}{r|l} -25 & 11 \\ \hline \underline{-3} & -2 \end{array}$$

Como o resto não pode ser negativo, devemos adicionar a ele o divisor 11

→ Resto = −3 + 11 = 8

> **NOTA:** Se um número **N** é divisível simultaneamente por vários números, então será divisível pelo MMC desses números.

Exemplos:

a) Se um número é divisível por 6 e 8, também será divisível por MMC (6,8) = 24.

b) Se um número é divisível por 20, então é divisível simultaneamente por 4 e 5, pois MMC (4,5) = 20.

Máximo Divisor Comum (MDC)

Exemplo Ilustrativo:
Consideremos o conjunto dos divisores positivos dos números 36:

{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

Agora vamos formar o conjunto dos divisores positivos do número 48:

{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}

Abaixo vemos o conjunto dos divisores positivos comuns a 36 e 48:

{1, 2, 3, 4, 6, 12}

O maior divisor comum desses números, chama-se MDC. Ou seja:

MDC (36, 48) = 12

Portanto, cabe ressaltar que o MDC não é o único divisor comum e sim o maior deles.

Métodos de Obtenção do MDC

O método descrito acima é empírico, quase que artesanal e, naturalmente, nada prático. Em seguida vamos mostrar os dois processo mais usados na obtenção do MDC.

1. Decomposição isolada em fatores primos

Neste caso, devemos em primeiro lugar decompor os números dados em fatores primos. O MDC entre eles será obtido através do produto dos fatores primos comuns encontrados, elevados aos menores expoentes com os quais apareceram.

Exemplo:

Determine o MDC (120, 210)

Resolução: Primeiro vamos fatorar os números:

→ $120 = 2^3 . 3 . 5$

→ $210 = 2 . 3 . 5 . 7$

Os fatores comuns obtidos foram 2, 3 e 5, cujos menores expoentes eram 1, 1 e 1. Assim:

→ MDC (120, 210) = $2^1 . 3^1 . 5^1$

→ MDC (120, 210) = 30

2. *Método das divisões sucessivas ou algoritmo de Euclides*

O algoritmo para obtenção do MDC, também conhecido como "jogo da velha", é composto de três linhas: LINHA DOS QUOCIENTES, LINHA DOS DIVISORES E LINHA DOS RESTOS.

		→	LINHA DOS QUOCIENTES
		→	LINHA DOS DIVISORES
		→	LINHA DOS RESTOS

Exemplo Ilustrativo:

Seja novamente determinar o MDC (120, 210)

Resolução: Os números cujo MDC vamos calcular devem ser colocados nas duas primeiras casas da esquerda da linha dos divisores (o maior número mais à esquerda).

210	120				

A seguir devemos dividir o maior pelo menor número, colocando o quociente acima do menor e o resto abaixo do maior. Note que a 1ª casa mais à esquerda da linha dos quocientes ficará sempre vazia.

210	120
90	1

	1				
210	120				
90					

Agora o resto obtido deverá ser colocado à direita do menor número, na linha dos divisores:

	1				
210	120	90			
90					

Em seguida devemos dividir o menor número por esse resto, transpondo o resultado para o algoritmo de forma análoga àquela utilizada na primeira divisão. Esse processo deve ser repetido tantas vezes quantas forem necessárias até obtermos um resto igual a zero, e daí, neste caso, o MDC será o último número encontrado à direita na linha dos divisores:

120	90
30	1

	1	1			
210	120	90			
90	30				

	1	1			
210	120	90	30		
90	30				

90	30
0	3

	1	1	3	
210	120	90	30	← MDC
90	30	0		

Então: MDC (210, 120) = 30

NOTA: Os menores valores dos quocientes obtidos neste processo são todos iguais a 1 (um), com exceção do último da direita, cujo valor mínimo é 2 (dois).

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) Dois números são primos entre si quando o único divisor comum entre eles é a unidade. Note que embora o número 1(um) não seja primo absoluto, ele é primo com qualquer número natural positivo.

Exemplo:

Os número 8 e 15 são primos entre si pois os divisores positivos do 8 são 1, 2, 4 e 8, enquanto os divisores de 15 são 1, 3, 5 e 15, portanto, o único divisor comum entre eles é o número 1.

b) O MDC de dois números primos entre si vale sempre 1(um).

Exemplos:

MDC (8, 35) = 1

MDC (291, 292) = 1

Note que dois números naturais consecutivos são sempre primos entre si.

c) O MDC de dois números múltiplos é sempre o menor deles.

Exemplos:

MDC (10, 30) = 10

MDC (2x, 12x) = 2x

d) Os divisores positivos comuns de dois números são os próprios divisores positivos do MDC entre eles.

Exemplo:

Determine os divisores positivos comuns entre 180 e 162

$180 = 2^2 . 3^2 . 5$

$162 = 2 . 3^4$

MDC (180, 162) = $2 . 3^2 = 18$

Os divisores positivos comuns a 180 e 162 são os divisores positivos de 18, ou seja: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

e) Quando multiplicamos ou dividimos dois ou mais números por um mesmo número diferente de zero, o MDC entre eles fica multiplicado ou dividido por esse mesmo número.

Exemplo:

MDC (20, 30) = 10

Se multiplicamos esses números por 3, por exemplo:

MDC (60, 90) = 30

Observamos que o MDC também ficou multiplicado por 3.

Agora vamos dividir os números por 2.

MDC (30, 45) = 15

Note que o MDC também ficou dividido por 2, o que confirma a observação acima.

f) Os quocientes de dois ou mais números pelo MDC entre eles são sempre números primos entre si.

Exemplo:

É fácil verificar que MDC (40, 16) = 8. Vamos determinar os quocientes dos números pelo MDC:

40	8
0	5

16	8
0	2

Note que os quocientes 5 e 2 são primos entre si.

g) O quociente da soma de dois números pelo MDC entre eles é sempre igual à soma de dois números primos entre si. Assim, se multiplicarmos tais números primos entre si pelo MDC dos números, encontraremos os valores desses números.

Exemplo:

A soma de dois números de A e B é 160 e seu MDC vale 20. Calcule esses números.

Resolução:

A + B = 160 e MDC (A, B) = 20

Dividindo-se a soma pelo MDC, encontraremos um valor igual à soma de dois números primos entre si:

$$\frac{A+B}{MDC\,(A,\,B)} = \frac{160}{20} = 8$$

Sejam **p** e **q** os números entre si procurados: **p** + **q** = 8

Agora devemos buscar dois números primos entre si de soma 8.

Note que este é um problema de tentativas. Assim são valores admissíveis para **p** e **q**:

a) p = 1 e q = 7 (ou vice-versa)
b) p = 3 e q = 5 (ou vice-versa)

Note que os valores p = 2 e q = 6 ou p = 4 e q = 4 não servem, pois eles não representam pares de números primos entre si.

Portanto os números **A** e **B** serão obtidos multiplicando-se os valores de **p** e **q** respectivamente pelo MDC (A, B). Observem que este problema admite duas soluções:

a) A = p x MDC = 1 x 20 = 20
B = q x MDC = 7 x 20 = 140

b) A = p x MDC = 3 x 20 = 60
B = q x MDC = 5 x 20 = 100

Resposta: Os números são 20 e 140 ou 60 e 100.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Exemplo Ilustrativo:

Consideremos o conjunto dos múltiplos não negativos do número 20:

{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, ...}

Agora formemos o conjunto dos múltiplos não negativos do número 30:

{0, 30, 60, 90, 120, 150, ...}

Abaixo destacamos os múltiplos não negativos comuns a 20 e 30:

{0, 60, 120, ...}

Ao menor múltiplo positivo comum desses números, chamamos de MMC.

Assim: MMC (20, 30) = 60

Podemos verificar que o MMC não é o único múltiplo comum, mas o menor positivo deles.

Métodos de Obtenção do MMC

Em seguida vamos estudar dois métodos práticos para a obtenção do MMC, já que o processo mostrado acima não é aconselhável pois, muitas vezes pode ser muito trabalhoso.

1. Decomposição isolada em fatores primos

Neste caso devemos decompor os números em fatores primos. O MMC entre eles será obtido através dos produtos dos fatores primos comuns e não comuns encontrados, elevados aos maiores expoente com os quais apareceram.

Exemplo:
Determine o MMC (72, 150)

Resolução:

Em primeiro lugar vamos fatorar os números:

$\rightarrow 72 = 2^3 \,.\, 3^2$
$\rightarrow 150 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^2$

Agora é só multiplicarmos todos os fatores, comuns e não comuns, com os maiores expoentes obtidos:

$\rightarrow$ MMC (72, 150) = $2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2$
$\rightarrow$ MMC (72, 150) = 1800

2. Decomposição simultânea em fatores primos

Neste método colocamos os números lado a lado e traçamos uma barra vertical à direita deles, como se estivéssemos fatorando esses números, o que realmente irá acontecer, só que simultaneamente. À direita da barra serão colocados os fatores primos ordenadamente que sejam divisores de ao menos um dos números à esquerda da barra. Em seguida devemos dividir os números à esquerda pelo fator colocado à direita, colocando-se os quocientes abaixo, dos números utilizados. Esse processo deve ser repetido até que os números à esquerda da barra sejam todos iguais a 1 (um), quando então, o MMC será obtido através do produto de todos os fatores encontrados à direita da barra.

Exemplo:
Determine o MMC (72, 150)

Resolução: Vamos montar o algoritmo para a obtenção do MMC, seguindo passo a passo as instruções anteriores:

72, 150	2
36, 75	2
18, 75	2
9, 75	3
3, 25	3
1, 25	5
1, 5	5
1, 1	

Logo MMC (72, 150) = $2^3 .\, 3^2 .\, 5^2$
MMC (72, 150) = 1800

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) O MMC de dois números primos entre si é igual ao produto deles.

Exemplo:
MMC (9, 10) = 9 x 10 = 90
MMC (32, 25) = 32 x 25 = 800

b) O MMC de dois números múltiplos é sempre o maior deles.

Exemplo:
MMC (20, 80) = 80
MMC (5x, 15x) = 15x

c) Os múltiplos comuns de dois ou mais números são os próprios múltiplos não negativos do MMC entre eles.

Exemplo:
Escreva o conjunto dos múltiplos comuns de 30 e 36.

> **NOTA:** A partir de agora, neste capítulo, quando nos referirmos a múltiplos, subentende-se que são os múltiplos não negativos.

Resolução: Primeiramente vamos determinar o MMC desses números.

30, 36	2	
15, 18	2	
15, 9	3	
5, 3	3	
5, 1	5	→ $MMC(30,36) = 2^3 . 3^2 . 5$
1, 1		→ MMC(30,36) = 180

De acordo com a observação, os múltiplos comuns de 30 e 36 são os múltiplos do seu MMC, mostrados no conjunto abaixo:

$$\{0, 180, 360, 540, ...\}$$

d) Quando multiplicamos ou dividimos dois ou mais números por um mesmo número diferente de zero, o MMC entre eles fica multiplicado ou dividido por esse mesmo número.

Exemplo:
Podemos calcular facilmente que: MMC (30, 40) = 120

→ Se multiplicarmos ambos os números, por exemplo, por 2, verifique que o MMC entre eles também fica multiplicado por 2.

MMC (60, 80) = 240

→ Se dividirmos esses números por 10, por exemplo, note que o MMC entre eles também fica dividido por 10.

MMC (6, 8) = 24

O que vem a confirmar a observação em questão!

e) O produto do MMC pelo MDC de dois números é sempre igual ao produto desses números.

MDC (a, b) . MMC (a, b) = a . b

Exemplo:
Tomemos como exemplo os números 20 e 50.
MDC (20, 50) = 10
MMC (20, 50) = 100

→ Observe que: 10 x 100 = 20 x 50
→ Ou seja: MDC (20, 50) x MMC (20, 50) = 20 x 50

f) O MDC de dois números é sempre igual ao MDC entre a soma e o MMC desses números.

MDC (a, b) = MDC (a + b, MMC (a, b))

Exemplo:
A soma de dois números é 30 e o MMC entre eles é 36. Determine o MDC desses números.

Resolução: Temos que:
a + b = 30 e MMC (a, b) = 36

→ Calculemos o MDC desses valores
MDC (a + b, MMC (a, b)) = MDC (30, 36) = 6

→ Assim, pela observação acima:
MDC (a, b) = MDC (a + b , MMC (a, b)) = 6

Frações

O conceito de fração é utilizado quando desejamos considerar algumas das diversas partes em que um todo foi dividido.

$$\text{FRAÇÃO} = \frac{N}{D}$$

N é o **numerador** e representa o número de partes consideradas.

D é o **denominador** e representa o número de partes iguais em que um todo foi dividido.

Exemplo: A fração $\frac{2}{3}$ significa que estamos considerando duas das três partes em que um todo foi dividido. Podemos representar tal fração pela figura abaixo, por exemplo:

Tipos de Frações

1. *Fração Própria*

É aquela cujo numerador é menor do que o denominador.

Exemplos:

$\frac{3}{4}; \frac{5}{11}; \frac{3}{9}$

2. *Fração Imprópria*

É aquela cujo numerador é maior ou igual ao denominador.

Exemplos:

$\frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \frac{6}{6}$

3. *Fração Aparente*

É aquela cujo numerador é múltiplo do denominador.

Exemplos:

$\frac{11}{11}; \frac{30}{6}; \frac{40}{8}$

4. *Fração Decimal*

É aquela cujo denominador é uma potência de 10.

Exemplos:

$\frac{6}{100}; \frac{23}{10}; \frac{4573}{10000}$

5. *Fração Ordinária*

É aquela que não é decimal

Exemplos:

$\frac{5}{9}; \frac{31}{20}; \frac{7}{7}$

6. *Fração Irredutível*

É aquela em que denominador e o numerador são primos entre si.

Exemplos:

$\frac{7}{3}; \frac{4}{9}; \frac{35}{17}$

7. *Frações Equivalentes*

São aquelas associadas a uma mesma fração irredutível.

Exemplos:

$\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ são equivalentes, pois podem ser reduzidas à mesma fração irredutível $\frac{2}{3}$.

Número Misto

É aquele que mistura uma parte inteira a uma parte fracionária. Todo número misto é associado a uma fração imprópria.

Exemplo:

$5\frac{2}{3} \rightarrow$ lê-se: "cinco inteiros e dois terços"

$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$

Transformação de Uma Fração Imprópria em Um Número Misto

Devemos dividir o numerador pelo denominador. O quociente será a parte inteira e o resto será o numerador.

Exemplo 1: $\frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 9 \\ \hline \underline{1} & 3 \end{array}$$

Exemplo 2: $\frac{47}{5} = 9\frac{2}{5}$

$$\begin{array}{r|l} 47 & 5 \\ \hline \underline{2} & 9 \end{array}$$

Redução ao Mesmo Denominador

Neste caso, devemos calcular o MMC entre os denominadores.

Exemplo:

Seja reduzir as frações $\frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \frac{6}{5}$ e $\frac{1}{10}$ ao mesmo denominador.

MMC (4, 3, 5, 10) = 60

Então: $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}; \frac{7}{3} = \frac{140}{60}; \frac{6}{5} = \frac{72}{60}$ e $\frac{1}{10} = \frac{6}{60}$

Comparação de Frações

1. *Frações com mesmo denominador*

A maior fração é aquela que possui o maior numerador:

Exemplo:

$\frac{3}{10} < \frac{7}{10} < \frac{11}{10}$

2. *Frações com mesmo numerador*

A maior fração é aquela que possui o menor denominador:

Exemplo:

$\frac{7}{2} > \frac{7}{3} > \frac{7}{10}$

3. *Frações com numeradores e denominadores diferentes*

Neste caso devemos reduzir as frações ao mesmo denominador e proceder como no caso 1.

Operações Com Frações

1. *Adição e Subtração*

Só podemos adicionar ou subtrair frações que possuam o mesmo denominador. Neste caso, devemos conservar o denominador e adicionar ou subtrair os numeradores. Se as frações tiverem denominadores diferentes, antes devemos reduzi-las ao mesmo denominador:

Exemplos:

a) $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3+5-2}{7} = \frac{6}{7}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{45}{60} + \frac{40}{60} - \frac{48}{60} = \frac{45+40-48}{60} = \frac{37}{60}$

2. *Multiplicação*

Para multiplicarmos frações, devemos multiplicar os numeradores e multiplicar os denominadores. Para multiplicarmos uma fração por um número, devemos multiplicar apenas o numerador da fração por esse número.

Exemplo:

a) $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$

b) $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$

3. *Divisão*

Para efetuarmos a divisão entre duas frações, devemos multiplicar a primeira pelo inverso da segunda. Já para dividirmos um número por uma fração devemos multiplicar o número pelo inverso da fração. E, finalmente, para dividirmos uma fração por um número, devemos multiplicar a fração pelo inverso do número.

Exemplos:

a) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$

b) $\frac{\frac{4}{5}}{7} = 4 \times \frac{7}{5} = \frac{28}{5}$

c) $\frac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

4. *Potenciação*

Para elevarmos uma fração a um expoente, devemos elevar tanto o numerador como o denominador a esse expoente.

Exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

5. *Radiciação*

Para extrairmos a raiz de uma fração, devemos extrair a raiz tanto do numerador como do denominador.

Exemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

Dízimas Periódicas

Um número decimal que apresenta repetição infinita de um grupamento de algarismos após a vírgula é chamado de **dízima periódica**.

Exemplo: 4,727272...; 83,4444...; 21,78313131...

Classificação das Dízimas Periódicas

Uma dízima periódica pode ser **simples** ou **composta**. Na dízima periódica simples, todo e qualquer algarismo após a vírgula se repete infinitamente, enquanto que no caso da composta, existe ao menos um algarismo que não se repete infinitamente após a vírgula.

Exemplo:

7,545454... é simples;

8,333... é simples;

4,2111... é composta;

31,44787878... é composta.

Geratriz de Uma Dízima Periódica

Toda dízima periódica é equivalente a uma fração irredutível na qual ao dividirmos o numerador pelo denominador, obtemos a dízima em questão. A essa fração chamamos de **geratriz**.

Exemplo:

Consideremos a fração irredutível $17/3$. Se dividirmos 17 por 3, teremos:

```
17   |  3
 20  |5,666...
  20
   20...
```

—Observe que a fração $17/3$ gerou a dízima 5,666..., logo é a sua geratriz.

—E então: $\frac{17}{3} = 5{,}666\cdots$

Representação de Uma Dízima Periódica

Podemos escrever uma dízima periódica de uma forma simplificada. Para isso devemos colocar uma barra sobre o grupamento que se repete após a vírgula, ou ainda, colocar tal grupamento entre parênteses.

Exemplo:

$4{,}525252\ldots = 4{,}\overline{52} = 4{,}(52)$

$3{,}17666\ldots = 3{,}17\overline{6} = 3{,}17(6)$

Partes de Uma Dízima Periódica

A parte que vem antes da vírgula é chamada de *parte inteira*. A parte que vem após a vírgula e se repete infinitamente é a ***parte periódica*** ou ***período***. No caso da dízima periódica composta, a parte que vem após a vírgula e não se repete infinitamente é a ***parte não periódica*** ou ***anteperíodo***.

Exemplo:

$4{,}585858\cdots 4{,}\overline{58}\begin{cases}\text{parte inteira} = 4\\ \text{parte periódica} = 58\end{cases}$

$73{,}297777\cdots = 73{,}29\overline{7}\begin{cases}\text{parte inteira} = 73\\ \text{parte não periódica} = 29\\ \text{parte periódica} = 7\end{cases}$

Cálculo da Geratriz de Uma Dízima Periódica Simples

Devemos escrever a parte inteira seguida da parte periódica, menos a parte inteira, sobre tantos noves quantos forem os algarismos do período.

Exemplo: Obter a geratriz das dízimas:

a) $5{,}44444\cdots = 5{,}\overline{4} = \frac{54-5}{9} = \frac{49}{9}$

b) $3{,}717171\cdots 3{,}\overline{71} = \frac{371-3}{99} = \frac{368}{99}$

Cálculo da Geratriz de uma Dízima Periódica Composta

Devemos escrever a parte inteira seguida da parte não periódica seguida da parte periódica, menos a parte inteira seguida da parte não periódica, sobre tantos noves quantos forem os algarismos do período seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos do anteperíodo.

Exemplo: Obter a geratriz das dízimas:

a) $2{,}5838383\cdots = 2{,}5\overline{83} = \frac{2583-25}{990} = \frac{2558}{990} = \frac{1279}{495}$

b) $1{,}332222\cdots = 1{,}33\overline{2} = \frac{1332-133}{900} = \frac{1199}{900}$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) No caso de uma decimal exata (número decimal finito), para escrevê-la sob a forma de fração, devemos escrever a parte inteira seguida da parte decimal, sobre o número 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais.

Exemplos:

a) $5{,}7193 = \frac{57193}{10000}$

b) $8{,}777 = \frac{8777}{1000}$

b) Toda dízima periódica de período 9, aumenta o algarismo imediatamente anterior a ele de uma unidade.

Exemplos:

a) $17,9999\cdots = 17,\overline{9} = 18$

b) $43,759999\cdots = 43,75\overline{9} = 43,76$

Razões e Proporções

Razão

É uma relação entre duas grandezas, expressas na mesma unidade ou não.

Razão: $\frac{a}{b}$ ou **a : b**

Lê-se: ***"a está para b"***

Onde ***a*** é o ***antecedente*** e ***b*** é o ***consequente.***

A diferença entre **razão** e **fração** é muito sutil, o que leva a uma confusão por parte dos alunos. Vamos mostrar, com dois exemplos, a aplicação correta de cada um dos conceitos.

1° Exemplo:
Consideremos que José possua três bolas de gude, enquanto que Pedro possui 4 bolas de gude. A razão (relação) entre os números de bolas de gude de José para Pedro é de **"3 para 4"** ou $\frac{3}{4}$.

2° Exemplo:
Tomemos uma barra de chocolate. Vamos dividi-la em 4 partes iguais. Se eu comer 3 dessas partes, estarei comendo a fração **"três quartos"** ou seja $\frac{3}{4}$ dessa barra de chocolate.

Podemos observar que no 1° exemplo a notação $\frac{3}{4}$ expressou uma comparação entre duas grandezas (números de bolas de gude). Já no 2° exemplo a mesma representação $\frac{3}{4}$ foi utilizada para indicar que "um todo" (barra de chocolate) foi dividido em 4 quatro parte, das quais três foram consideradas.

Se tal explicação não chegou a convencer o leitor, ao menos fica o consolo de que as propriedades operatórias das razões e das frações são similares, não influenciando na resolução dos exercícios se o aluno sabe ou não distinguir a diferença entre elas.

Escalas

Quando um arquiteto faz a planta de um prédio, obviamente que ele não pode fazê-lo em verdadeira grandeza. Por isso ele faz uma redução proporcional das medidas reais para que seja possível representá-las nessa planta. Essa redução segue um parâmetro definido pelo arquiteto mas, para que haja o entendimento de todos, inclusive dos leigos, é necessário que ele seja divulgado. Esse parâmetro é chamado de **escala.** A escala é a relação (razão) entre as medidas na planta e no objeto real.

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{MEDIDA NA PLANTA}}{\text{MEDIDA REAL}}$$

1° Exemplo:
Qual a escala utilizada em um mapa no qual a distância entre as cidades A e B é de 4 cm, enquanto que a distância real é de 100 km?

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{PLANTA}}{\text{REAL}} = \frac{4\text{ cm}}{100\text{ km}} = \frac{4\text{ cm}}{10000000\text{ cm}}$$

$$\text{ESCALA} = \frac{1}{2500000} = 1:2500000$$

2° Exemplo:
Um poste com 6 m de altura teria que tamanho em um desenho feito com uma escala de 1:200?

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{PLANTA}}{\text{REAL}} \Rightarrow \frac{1}{200} = \frac{x}{6\text{ m}}$$

$$x = \frac{6\text{ m}}{200} = \frac{600\text{ cm}}{200} = 3\text{ cm}$$

Proporção

É uma igualdade entre razões equivalentes (ver frações equivalentes).

Proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou **a:b = c:d** ou **a:b::c:d**

lê-se: "a está para b, assim como c está para d"

Temos que **a** e **d** são os extremos, enquanto que **b** e **c** são os meios. Podemos dizer ainda que **a** e **c** são os antecedentes e **b** e **d** são os consequentes.

Relação Fundamental das Proporções

"Em toda proporção o produto dos meios é sempre igual ao produto dos extremos."

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a\,.\,d = b\,.\,c$$

Exemplo:
Em uma proporção, os antecedentes da primeira e da segunda razões são respectivamente iguais a 2 e 6, enquanto que o consequente da segunda razão vale 15. Calcule o consequente da primeira razão.

Resolução:

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{15} \qquad \begin{aligned} 6\,.\,x &= 2\,.\,15 \\ 6x &= 30 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Proporção Contínua

É aquela que possui os meios ou os extremos iguais. É usual, caso o problema não estabeleça o contrário, considerarmos em uma proporção contínua que os meios sejam iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{a}$$

Quando nem os meios nem os extremos são iguais, a proporção é **não contínua**.

Exemplo:

a) $\frac{6}{4} = \frac{4}{8}$ → proporção contínua

b) $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$ → proporção contínua

c) $\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$ → proporção não contínua

Quarta Proporcional

É o quarto termo de uma proporção não contínua.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o número **d** é a **quarta proporcional** entre **a**, **b** e **c**, nesta ordem.

Exemplo:
Determine a quarta proporcional entre os números 4; 20 e 5.

Resolução:

$\frac{4}{20} = \frac{5}{x}$ $\quad 4 . x = 5 . 20$; $4x = 100$; $x = 25$

Terceira Proporcional

É o terceiro termo diferente de uma proporção contínua.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, o número **c** é a **terceira proporcional** entre **a** e **b**, sendo **b** a média (termo repetido).

Exemplo:
Determine a terceira proporcional entre os números 6 e 12.

Resolução:

$\frac{6}{12} = \frac{12}{x}$ $\quad 6 . x = 12 . 12$; $6x = 144$; $x = 24$

Média Geométrica ou Proporcional

É o termo que se repete em uma proporção contínua. Cabe ressaltar que, salvo em contrário, os termos que se repetem são os meios.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, o número **b** é a **média geométrica** ou **proporcional** entre **a** e **c**.

Exemplo:
Determine a média geométrica entre os números 2 e 50.

Resolução:

$\frac{2}{x} = \frac{x}{50} \rightarrow$ $x . x = 2 . 50$; $x^2 = 100$; $x = 10$

NOTA: Tal cálculo também poderá ser feito seguindo o que será estudado no resumo sobre médias (página 18)

Propriedades das Proporções

1. "Uma proporção não se altera quando alternamos seus meios, seus extremos ou meios e extremos simultaneamente."

Exemplo:

Dada a proporção: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

→ Alternando os meios: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

→ Alternando os extremos: $\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$

→ Alternando meios e extremos: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Podemos observar que a proporcionalidade não se alterou.

2. "Em toda proporção a soma ou a diferença dos antecedentes está para a soma ou a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente."

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Exemplo:

Na proporção: $\frac{15}{20} = \frac{9}{12}$, podemos escrever:

$\rightarrow \frac{15+9}{20+12} = \frac{24}{32} = \frac{15}{20} = \frac{9}{12}$ (verifique que é uma proporção)

$\rightarrow \frac{15-9}{20-12} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20} = \frac{9}{12}$ (verifique que é uma proporção)

3. "Em toda proporção o produto dos antecedentes está para produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para o quadrado do seu consequente."

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a . c}{b . d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

Exemplo:

Na proporção: $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$, temos que:

$\rightarrow \frac{4 . 10}{6 . 15} = \frac{40}{90} = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \left(\frac{10}{15}\right)^2$ (verifique que é uma proporção)

Números Proporcionais

Números diretamente proporcionais

Um conjunto de números **A** é dito **diretamente proporcional** a um outro conjunto de números **B**, se e somente se, os **quocientes** entre os elementos de **A** e **B**, tomados ordenadamente, forem todos iguais.

Se A = {a, b, c} é **diretamente proporcional** a B = {x, y, z}

então $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$

Exemplo:
Os conjuntos {4, 12, 10} e {6, 18, 15}} são diretamente proporcionais, pois $\frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Números inversamente proporcionais

Um conjunto de números **A** é dito **inversamente proporcional** a um outro conjunto de números **B**, se e somente se, os **produtos** entre os elementos de **A** e **B**, tomados ordenadamente, forem todos iguais.

Se A={a, b, c} é **inversamente proporcional** a B = {x, y, z}, então a . x = b.y = c . z = k

Exemplo:
Os conjuntos {2, 5, 4} e {50, 20, 25} são inversamente proporcionais, pois 2 . 50 = 5 . 20 = 4 . 25 = 100

Divisão Proporcional

Divisão direta

Dividir o número **N** em partes diretamente proporcionais aos números a, b, c ... é encontrar os números x, y, z, ... tais que:

$$\begin{cases} x + y + z + ... = N \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = ... \end{cases}$$

Exemplo:

Dividir o número 320 em partes diretamente proporcionais aos números 5, 7 e 4.

Resolução:

Sejam x, y e z as partes desejadas.

$$\begin{cases} x + y + z = 320 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4} \end{cases}$$

→ Um artifício prático para a resolução desse tipo de sistema é introduzir a razão **k** de proporcionalidade. Assim:

$x = 5k$ $y = 7k$ $z = 4k$

Substituindo na 1° equação:

$5k + 7k + 4k = 320$

$16k = 320$

$k = 20$

Logo: $x = 5k = 100$; $y = 7k = 140$ e $z = 4k = 80$

Divisão inversa

Dividir o número **N** em partes inversamente proporcionais aos números a, b, c, ... é encontrar os números x, y, z, ... tais que:

$$\begin{cases} x + y + z + ... = N \\ \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = ... \end{cases}$$

Exemplo:

Dividir o número 390 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 5 e 6.

Resolução:

Consideremos as partes como sendo x, y e z. Então

$$\begin{cases} x + y + z = 390 \\ \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

→ Em primeiro lugar vamos tirar o MMC dos denominadores das frações:

$$MMC(2,5,6) = 30 \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} = \frac{15}{30}; \frac{1}{5} = \frac{6}{30} \text{ e } \frac{1}{6} = \frac{5}{30} \right.$$

$$\frac{x}{\frac{15}{30}} = \frac{y}{\frac{6}{30}} = \frac{z}{\frac{5}{30}}$$

Em seguida, abandonemos os denominadores comuns às frações:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5}$$

Agora devemos proceder como na divisão direta:

$x = 15k$ $y = 6k$ $z = 5k$

Substituindo na 1ª equação:

$15k + 6k + 5k = 390$

$26k = 390$

$k = 15$

Logo: $x = 15k = 225$; $y = 6k = 90$ e $z = 5k = 75$

Divisão direta e inversa

Dividir o número **N** em partes diretamente proporcionais aos números a, b, c, ... e simultaneamente inversamente proporcionais a α, β, γ, ..., é encontrar os números x, y, z, ..., tais que:

$$\begin{cases} x + y + z + ... = N \\ \frac{x}{a \cdot \frac{1}{\alpha}} = \frac{y}{b \cdot \frac{1}{\beta}} = \frac{z}{c \cdot \frac{1}{\gamma}} = ... \end{cases}$$

Exemplo:

Dividir o número 1010 silmultaneamente em partes diretamente proporcionais a números 4; 3; e 5 e inversamente proporcionais a 3; 8 e 2..

Resolução:

Sejam x, y, z as partes desejadas. Daí:

$$\begin{cases} x + y + z = 1010 \\ \frac{x}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{y}{3 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{z}{5 \cdot \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} = \frac{y}{\frac{3}{8}} = \frac{z}{\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{32}{24}} = \frac{y}{\frac{9}{24}} = \frac{z}{\frac{60}{24}}$$

Em seguida, abandonamos os denominadores comuns às frações:

$$\frac{x}{32} = \frac{y}{9} = \frac{z}{60}$$

Agora devemos proceder como na divisão direta:

$x = 32k$ $y = 9k$ $z = 60k$

Substituindo na 1ª equação

$32k + 9k + 60k = 1010$

$101k = 1010$

$k = 10$

Logo: $x = 32k = 320$; $y = 9k = 90$ e $z = 60k = 600$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Se não for citado no exercício se a divisão é direta ou inversa, fica subentendido que a divisão é direta.

Sistemas de Unidades de Medidas

Sistema métrico decimal

Neste segmento iremos abordar as unidades que devem ser utilizadas para avaliar as medidas de várias grandezas em um sistema de base 10. Para facilitar o estudo, vamos dividi-lo em três tipos de grandezas: UNIDIMENSIONAIS,

BIDIMENSIONAIS e TRIDIMENSIONAIS. Tal classificação depende da quantidade de medições necessárias para avaliar a grandeza em questão. Os exemplos abaixo vão tornar claros tais conceitos.

1º Exemplo: Seja determinar o comprimento de um fio de seu cabelo. Observe que para fazê-lo, de posse de uma régua ou fita métrica, será necessário **uma única medição** para que você estabeleça o comprimento desejado. Portanto, a grandeza **comprimento** é UNIDIMENSIONAL (uma dimensão).

2º Exemplo: Seja determinar a área de um campo de futebol. Neste caso, como estudado na Geometria Plana, devemos medir o comprimento e a largura do campo para determinar sua área, ou seja, são necessárias **duas medições**, daí, a grandeza **área** é BIDIMENSIONAL (duas dimensões).

3º Exemplo: Seja determinar o volume de uma caixa d'água. Para obter o volume, devemos medir o comprimento, a largura e a altura da caixa, ou seja, são necessárias **três medições**, logo, a grandeza **volume** é TRIDIMENSIONAL (três dimensões).

Passemos agora ao estudo propriamente dito dessas grandezas:

I) Unidades Unidimensionais

	Múltiplos ÷ 10 ←			Unidade Padrão	Submúltiplos → × 10		
Comprimento	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Massa	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
Capacidade	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

km	→ quilômetro	kg	→ quilograma	kl	→ quilolitro
hm	→ hectômetro	hg	→ hectograma	hl	→ hectolitro
dam	→ decâmetro	dag	→ decagrama	dal	→ decalitro
m	→ metro	g	→ grama	l	→ litro
dm	→ decímetro	dg	→ decigrama	dl	→ decilitro
cm	→ centímetro	cg	→ centigrama	cl	→ centilitro
mm	→ milímetro	mg	→ miligrama	ml	→ mililitro

NOTA: Na conversão de uma unidade para outra, cada unidade "pulada" para a direita deve levar a vírgula uma casa para a direita, ou seja, multiplicar o número por 10. Enquanto que, cada unidade "pulada" para a esquerda leva a vírgula uma casa para esquerda, ou seja divide o número por 10.

Exemplo:

Faça as conversões que seguem:

a) 37, 157 m → ________________ cm

Resolução:

De metros (m) para centímetros (cm), "pulamos" duas casas para a direita. Façamos o mesmo com a vírgula. Então:

→ 37, 157 m = 3715,7 cm

b) 2,41 dg → ________________ hg

Resolução:

De decigramas (dg) para hectograma (hg), "pulamos" três casas para a esquerda. Façamos o mesmo com a vírgula. Logo:

→ 2,41 dg = 0,00241 hg

II) Unidades Bidimensionais

	Múltiplos ÷ 100 ←			Unidade Padrão	Submúltiplos → × 100		
Área	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
Unidades Agrárias		ha	a	ca			

Nomenclatura

km^2	→ quilômetro quadrado		
hm^2	→ hectômetro quadrado	ha	→ hectare
dam^2	→ decâmetro quadrado	a	→ are
m^2	→ metro quadrado	ca	→ centiare
dm^2	→ decímetro quadrado		
cm^2	→ centímetro quadrado		
mm^2	→ milímetro quadrado		

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

As unidades agrárias são utilizadas exclusivamente para a medição de áreas de terras. É bom frisar que:

1 ha = 1 hm^2	1 a = 1 dam^2	1 ca = 1 m^2

NOTA: Na conversão de uma unidade para outra, cada unidade "pulada" para a direita deve levar a vírgula duas casas para a direita, ou seja, multiplicar o número por 100. Enquanto que, cada unidade "pulada" para a esquerda leva a vírgula duas casas para a esquerda, ou seja divide o número por 100.

Exemplo:

Faça as conversões abaixo:

a) 2,731 m^2 → ________________ cm^2

Resolução: De m^2 para cm^2, "pulamos" duas casas para a direita, então a vírgula deve ser colocada **quatro** casas à direita.

→ 2,731 m^2 = 27310 cm^2

b) 874 dm^2 → ________________ hm^2

Resolução:

De dm^2 para hm^2 "pulamos" três casas para a esquerda, daí a vírgula deve se deslocar **seis** casas para esquerda. Neste exemplo temos um número inteiro. Quando isto ocorre, devemos considerar que a vírgula se encontra após o último algarismo da direita do número. Então:

→ 874 dm^2 = 0,000874 hm^2

c) 39, 4 a → ________________ ca

Resolução:

Para convertermos as unidades agrárias, devemos utilizar um procedimento análogo ao dos dois itens anteriores. Assim, de **a** para **ca**, "pulamos" **uma** unidade que levará a vírgula **duas** casas para a direita. Portanto:

$\rightarrow$ 39,4 a = 3940 ca

III) Unidades Tridimensionais

	Múltiplos ÷ 1000 ←			Unidade Padrão	Submúltiplos → × 1000		
Volume	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

Nomenclatura

km^3	→	quilômetro cúbico
hm^3	→	hectômetro cúbico
dam^3	→	decâmetro cúbico
m^3	→	metro cúbico
dm^3	→	decímetro cúbico
cm^3	→	centímetro cúbico
mm^3	→	milímetro cúbico

NOTA: A conversão neste caso é feita deslocando a vírgula três casas para cada unidade "pulada".

Exemplos:

Faça as conversões a seguir:

a) 2,41 dam^3 → ________ m^3

Resolução:

De dam^3 para m^3, "pulamos" uma unidade para a direita, então a vírgula deve ser colocada **três** casas à direita.

$\rightarrow$ 2,41 dam^3 = 2410 m^3

b) 372 mm^3 → ________ dm^3

Resolução: De mm^3 para dm^3, "pulamos", duas unidades para a esquerda, portanto a vírgula deve ser colocada **seis** casas para a esquerda.

$\rightarrow$ 372 mm^3 = 0,000372 dm^3

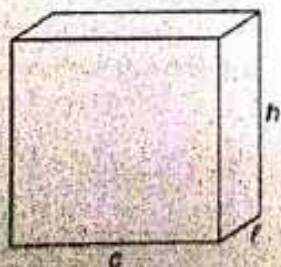
OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) Pode ser útil saber que 1 litro de água pura tem massa 1 kg.

b) A seguir vamos mostrar alguma relações importantes entre as unidades de volume (tridimensionais) e de capacidade (unidimensionais):

$1m^3 = 1k\ell$ $\quad$ $1\ dm^3 = 1\ell$ $\quad$ $1\ cm^3 = 1\ m\ell$

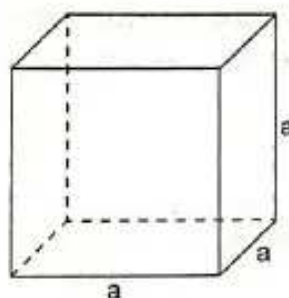
VOLUMES DOS PRINCIPAIS SÓLIDOS

1. Paralelepípedo Retângulo

$V = c \cdot \ell \cdot h$

c → comprimento

ℓ → largura

h → altura

2. Cubo

$V = a^3$

a → aresta

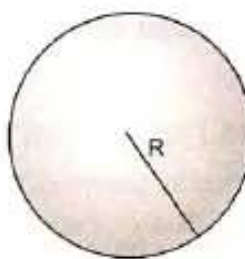
3. Cilindro

$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$

Lembrete: $\pi \cong 3,14$

R → raio da base

h → altura

4. Esfera

$V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$

R → raio da esfera

Regra de Três

Quando trabalhamos com grandezas proporcionais, em duas situações diferentes, podemos calcular uma dessas grandezas em função das demais. A esse processo chamamos de **regra de três**. Uma **regra de três** pode ser **simples** ou **composta**, conforme relacione duas grandezas (simples) ou mais de duas grandezas (composta). Também pode ser **direta**, se relacionar apenas grandezas diretamente proporcionais, **inversa** se relacionar apenas grandezas inversamente proporcionais, ou **direta e inversa**, quando relaciona grandezas dos dois tipos.

Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando o aumento de uma delas acarreta o aumento da outra, e a diminuição de uma implica na diminuição da outra, na mesma razão.

Exemplos:

a) As grandezas **MASSA** e **PREÇO** são diretamente proporcionais, pois quanto maior é a massa de um certo produto, maior é o seu preço.

b) As grandezas **NÚMERO DE MÁQUINAS DE UMA INDÚSTRIA** e **NÚMERO DE PEÇAS PRODUZIDAS** são diretamente proporcionais, pois quanto maior é o número de máquinas, maior é o número de peças produzidas.

Grandezas Inversamente Proporcionas

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando o aumento de uma delas ocasiona a diminuição da outra, e vice-versa, em razões inversas.

Exemplos:

a) As grandezas **NÚMERO DE OPERÁRIOS** e **TEMPO DE DURAÇÃO DE UMA OBRA** são inversamente proporcionais, pois quanto maior é o número de operários, menor é o tempo de conclusão da obra.

b) As grandezas **VELOCIDADE** e **TEMPO DE VIAGEM** são inversamente proporcionais, pois quanto maior é a velocidade, menor é o tempo necessário para concluir a viagem.

Resolução de Uma Regra de Três

Exemplo Ilustrativo 1:
Uma pessoa gasta 40 minutos, dirigindo a 60 km/h, para se deslocar da Tijuca até São Gonçalo. Em quanto tempo, esta pessoa, faria esta viagem, se a velocidade fosse de 80 km/h?

Resolução:
Em primeiro lugar devemos dispor corretamente as grandezas envolvidas, arrumando grandezas de mesmas unidades em uma mesma coluna:

40 min —— 60 km/h
x —— 80 km/h

Agora vamos montar uma equação em que o primeiro membro é a razão que contém a variável e o segundo membro é o produto das demais razões, que estarão invertidas, no caso das grandezas correspondentes serem inversamente proporcionais à grandeza associada à variável.

No exemplo acima a grandeza velocidade será relacionada à grandeza tempo. Podemos observar que aumentando-se a velocidade do automóvel, o tempo gasto diminui. Logo as grandezas são inversas, e a razão correspondente à velocidade $\frac{60}{80}$, deverá ser invertida no 2º membro da equação:

$$\frac{40}{x} = \frac{80}{60}$$

$80x = 2400$

$x = 30$ min

Exemplo Ilustrativo 2:
32 pedreiros constroem 240 m de muro em 12 dias. Em quantos dias, 40 pedreiros construirão 200 m de muro?

Resolução: Vamos arrumar as grandezas envolvidas:
32 pedreiros – 240 m – 12d
40 pedreiros – 200 m – xd

Como esta regra de três é composta, devemos comparar a grandeza onde está a variável com cada uma das demais, uma por vez, supondo que todas as outras são constantes.

Vamos relacionar a variável **tempo** com o **número de pedreiros**. Devemos observar, para tanto, que se aumentarmos o número de pedreiros, o tempo necessário para concluir a obra deverá diminuir (note que a grandeza número de metros de muro deve ser considerada, nesta análise, como constante), portanto essas grandezas são inversas e devemos inverter a razão $\frac{32}{40}$.

Analisamos agora a variável **tempo** com o **número de metros de muro** construído. É claro que se aumentarmos o comprimento do muro, o número de dias necessários para construí-lo aumentará também, logo essas grandezas são diretas e daí que não devemos inverter a razão 240/200.

Montando a equação:

$$\frac{12}{x} = \frac{40}{32} \cdot \frac{240}{200} \text{ simplificando} \rightarrow \frac{12}{x} = \frac{1}{32} \cdot \frac{48}{1}$$

$48x = 12 \cdot 32$

$48x = 384$

$x = 8$ dias

Médias

Neste capítulo iremos abordar o cálculo das diversas médias existentes na aritmética usual.

1. *Média Aritmética*

"A média aritmética entre vários números é obtida dividindo-se a soma desses números pela quantidade deles."

$$MA = \frac{\text{SOMA}}{\text{QUANTIDADE}}$$

Exemplo:
Determine a média aritmética entre os números 3; 7; 2 e 6.

$$MA = \frac{3+7+2+6}{4} = \frac{18}{4} = 4{,}5$$

2. *Média Geométrica ou Proporcional*

"A média geométrica entre n números é igual à raiz de índice n do produto desses números."

$$MG = \sqrt[\text{QUANTIDADE}]{\text{PRODUTO}}$$

Exemplo:
Determine a média geométrica entre os números 2; 32 e 1.

$$MG = \sqrt[3]{2 \cdot 32 \cdot 1} = \sqrt[3]{64} = 4$$

3. *Média Ponderada*

"A média ponderada entre vários números, com seus pesos, é igual à soma dos produtos de cada número por seu respectivo peso, dividida pela soma dos pesos".

$$MP = \frac{\text{SOMA DE NÚMEROS VEZES PESO}}{\text{SOMA DOS PESOS}}$$

Exemplo:
Um aluno prestou provas de matemática, que tem peso 2, português quem tem peso 2 e história que tem peso 1. Se suas notas foram respectivamente iguais a 7,0; 8,0 e 6,0, determine sua média.

$$MP = \frac{7 \times 2 + 8 \times 2 + 6 \times 1}{2+2+1} = \frac{36}{5} = 7{,}2$$

4. Média Harmônica

"A média harmônica entre vários números é o inverso da média aritmética dos inversos desses números."

$$MH = \frac{1}{\text{MÉDIA ARITMÉTICA DOS INVERSOS DOS NÚMEROS}}$$

Exemplo:

Determine a média harmônica entre os números 3; 5 e 4.

→ Inversos dos números $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$

→ Média aritmética dos inversos:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{3} = \frac{\frac{20+12+15}{60}}{3} = \frac{\frac{47}{60}}{3} = \frac{47}{60} \cdot \frac{1}{3} = \frac{47}{180}$$

$$\rightarrow MH = \frac{1}{\frac{47}{180}} = \frac{180}{47}$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

A média harmônica entre dois números é igual ao duplo produto desses números dividido pela soma deles.

$$MH\ (a, b) = \frac{2ab}{a+b}$$

Exemplo:

Determine a média harmônica entre os números 3 e 5.

$$MH\ (3,5) = \frac{2.3.5}{3+5} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

Porcentagem

Porcentagem ou **percentagem** é toda fração de denominador 100, onde o **numerador** é chamado de **taxa de porcentagem.**

$$\frac{x}{100} = x\%$$

→ lê-se: "**x por cento**".
→ x é a taxa de porcentagem

Podemos observar que toda porcentagem pode ser expressa sob a forma de fração e número decimal.

Exemplos:

a) $23\% = \frac{23}{100} = 0{,}23$

b) $0{,}7 = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 70\%$

NOTA: Existe ainda uma notação não muito divulgada que é o "**por mil**", representado por $^0/_{00}$.

Exemplos:

a) $3\ ^0/_{00} = 3 / 1000 = 0{,}003$

b) $0{,}47 = 47 / 100 = 470 / 1000 = 470\ ^0/_{00}$

Cálculos Percentuais

Para calcularmos um dito percentual de um número, devemos multiplicar esse número pela porcentagem indicada.

Exemplos:

a) 20% de $80 = \frac{20}{100} . 80 = 16$

b) 15% de $60 = \frac{15}{100} . 60 = 9$

c) 10% dos 25% de $400 = \frac{10}{100} . \frac{25}{100} . 400 = 10$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Cem por cento de um número é sempre igual ao próprio número. Com efeito:

$$100\%\ \text{de}\ X = \frac{100}{100} . X = X$$

Exemplos:

a) 100% de $40 = 40$

b) 100% de $\frac{89}{7} = \frac{89}{7}$

Transações Comerciais

Considere uma mercadoria que tenha sido vendida por um preço de venda **PV**, após ser adquirida por um preço de custo **PC**. Tal transação pode ter sido realizada com um lucro **L** ou com um prejuízo **P**. Vamos abordar ambos os casos.

NOTA: Quando não for citado se o lucro ou o prejuízo incidiu sobre o PC ou PV, consideremos a incidência sobre PC.

1º Caso: VENDA COM LUCRO
Neste caso temos a relação : **PV = PC + L**

Exemplo:
Qual o preço de custo de um mercadoria que foi vendida por $ 2.860,00, sabendo que houve um lucro de 30% nesta venda?

Resolução:

→ Neste problema temos: PV = 2860 e L = 30% PC. Então:

PV = PC + L

2860 = PC + 30% PC

2860 = 100% PC + 30% PC

2860 = 130% PC

$$2860 = \frac{130}{100} . PC$$

$$PC = 2860 . \frac{100}{130}$$

PC = $ 2.200,00

2º Caso: VENDA COM PREJUÍZO
Neste caso temos a relação **PV = PC – P**

Exemplo:
Por quanto devo vender um objeto que me custou $ 480,00, de modo a ter um prejuízo de 20% sobre o preço de venda?

Resolução:

→ Os dados do problema são PC = 480 e P = 20% PV. Então

PV = PC – P

PV = 480 – 20% PV

100% PV = 480 – 20% PV

100% PV + 20% PV = 480

120% PV = 480

$\frac{120}{100} \cdot PV = 480$

$PV = 480 \cdot \frac{100}{120}$

PV = $ 400,00

Juros Simples

No cálculo dos juros simples caso, a taxa de juros incidirá sempre sobre o capital inicial. Assim sendo, os juros simples **j**, produzidos por um capital **C**, durante um tempo **t**, submetido a uma taxa **i**, são dados por:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) Para aplicarmos a fórmula acima, é necessário que a taxa **i**, e o tempo **t** estejam na mesma unidade, ou seja, se a taxa for anual, o tempo deve ser dado em anos, se a taxa for mensal, o tempo deve estar em meses; no caso de uma taxa diária, o tempo deve ser expresso em dias.

b) É importante ressaltarmos que:

→ 1 mês comercial = 30 dias

→ 1 ano comercial = 12 meses = 360 dias

c) Ao indicarmos a taxa, utilizamos as notações:

a.a. → ao ano

a.m. → ao mês

a.d. → ao dia

d) Quando não for indicada a periocidicidade da taxa, supomos que ela seja anual.

e) O montante **M** é dado por:

$$M = C + j$$

Exemplo:

Quais os juros produzidos por $ 2.000,00, durante 7 meses a uma taxa de 36% aa? E o montante?

Resolução:

→ Neste caso temos: C = 2000; $t = 7\ m = \frac{7}{12}$ a e i = 36% aa

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} = \frac{2000 \cdot 36 \cdot \frac{7}{12}}{100} = \$\ 420,00$$

M = C + j = 2000 + 420

M = $ 2420,00

Significado dos Símbolos das Potências

Houve um tempo em que o quilômetro era suficiente para expressar as distâncias que nossa imaginação nos permitia alcançar. Hoje, com os sofisticados equipamentos desenvolvidos pelo homem, o alcance das informações tomou dimensões grandiosas. Os telescópios minimizam a distância até as galáxias, fazendo com que o nosso velho quilômetro passe a ser uma unidade inexpressiva. Certo é que, a cada dia, necessitamos de unidades mais adequadas para expressar medidas que outrora pareciam inimagináveis. O SI (Sistema Internacional de Medidas) estabeleceu uma série de potências de 10, com os respectivos nomes e símbolos, que iremos mostrar no quadro a seguir.

NOME	SÍMBOLO	POTÊNCIA
quilo	k	10^3
mega	M	10^6
giga	G	10^9
tera	T	10^{12}
peta	P	10^{15}
exa	E	10^{18}
zetta	Z	10^{21}
yotta	Y	10^{24}

Há ainda duas potências, não muito difundidas, que são o bronto e o geop, respectivamente associadas a 10^{27} e 10^{30}.

O **bit** ou dígito binário "BInary DigiT" em inglês é a menor unidade de informação que pode ser transmitida ou armazenada. É chamado de binário porque pode assumir dois valores: 0 ou 1. Atualmente, em nosso mundo globalizado, em que as informações chegam até nós em um piscar de olhos, seja através dos computadores, smartphones ou das redes sociais, o que mais ouvimos são os termos: MEGA, BYTE, Mbps, entre outros nomes que há alguns anos soavam muito mal aos nossos ouvidos. Para acompanhar essa evolução, o IEC (International Electrothenical Commission) aprovou um padrão de nomes e símbolos de potências binárias, especialmente utilizadas na medição da quantidade de dados transmitidos ou armazenados. Você já imaginou a quantidade de dados que um grande provedor tem que armazenar, contando-se conteúdos, e-mail, etc? São quantidades quase que astronômicas! Vamos à tabela de potências binárias.

NOME	SÍMBOLO	POTÊNCIA
kibi	Ki	2^{10}
mebi	Mi	2^{20}
gibi	Gi	2^{30}
tebi	Ti	2^{40}
pebo	Pi	2^{50}
exbi	Ei	2^{60}
zebi	Zi	2^{70}
yobi	Yi	2^{80}

Assim, por exemplo a notação kb é lida como sendo "quilobit" e equivale a $10^3 = 1000$ bits. Já a notação Ki é lida como sendo "Kibibit", equivalendo a $2^{10} = 1024$ bits.

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Sabemos que todo número inteiro ou decimal exato (com número limitado de casas decimas), pode ser escrito com o auxílio das potências de 10.

Quando tal representação possuir apenas um algarismo significativo em sua parte inteira, estaremos diante da chamada **notação científica**. Esta maneira de representar um número é muito utilizada para escrever números muito grandes ou muito pequenos. Devemos seguir algumas regras para representar um número N na forma científica, como veremos a seguir.

1º Caso: $N \geq 10$

Devemos reescrever o número com um único algarismo na parte inteira, multiplicando-o pelo número 10 elevado ao número de algarismos da parte inteira de N, menos uma unidade.

Exemplo:
a) N = 476.813

Este número tem seis algarismos na sua parte inteira logo o expoente do fator 10 será igual a 6 – 1 = 5.
Vamos reescrever o número agora com a **notação científica**:

$$N = 4{,}76813 \times 10^5$$

b) N = 325.000.000
Há nove algarismos na parte inteira, logo o expoente do fator 10 será 9 – 1 = 8. Então:

$$N = 3{,}25 \times 10^8$$

c) N = 8754,23
Neste caso, temos quatro algarismos na parte inteira, portanto, o expoente do fator 10 será 4 – 1 = 3

$$N = 8{,}75423 \times 10^3$$

2º Caso: $0 < N < 1$

Para representar este tipo de número sob a forma de **notação científica**, devemos reescrever o número com um único algarismo significativo na parte inteira e multiplicá-lo pelo fator 10 elevado ao simétrico do número de zeros que antecedem o primeiro algarismo significativo de N (inclusive o zero da parte inteira).

Exemplo:
a) N = 0,000038

Existem cinco zeros antecedendo o primeiro algarismo significativo, que é o 3, logo o expoente do fator 10 será -5, daí:

$$N = 3{,}8 \times 10^{-5}$$

b) $N = 0{,}0000000879 = 8{,}79 \times 10^{-8}$
c) $N = 0{,}000006 = 6 \times 10^{-6}$

Observação:
Quando um número N é tal que $1 \leq N < 10$, ele já está expresso em **notação científica**.

Exemplo:
a) 4,785
b) 8,4003

Ordem de Grandeza (O.G.)

Dado um número N, escrito em notação científica na forma $N = x \cdot 10^n$ com, obviamente, $0 < x < 10$, temos que:

1º Caso: $x \geq 3{,}16$
A ordem de grandeza de N será 10^{n+1}

2º Caso: $x < 3{,}16$
Neste caso, a ordem de grandeza de N será 10^n.

Observação:
O número 3,16, que é a raiz quadrada por falta do número 10, é chamado de FRONTEIRA.

Exemplos:
a) $4{,}72 \times 10^4$ → $O.G. = 10^{4+1} = 10^5$
b) $3{,}12 \times 10^9$ → $O.G. = 10^9$
c) $6{,}403 \times 10^{-7}$ → $O.G. = 10^{-7+1} = 10^{-6}$
d) $1{,}43 \times 10^{-4}$ → $O.G. = 10^{-4}$

Exercícios

1) Obter as geratrizes de:
a) 7,212121...
b) 7,8444...
c) 2,32666...
d) 5,999...
e) 8,333

2) O número 2 é maior do que o número 1,999...? Justifique sua resposta.

3) **(PUC)** O valor de $\sqrt{2{,}777...}$ é:
a) 1,2
b) 1,666...
c) 1,5
d) um número entre 1/2 e 1
e) 3,49

4) **(PUC)** O valor de $\dfrac{\sqrt{1{,}777...}}{\sqrt{0{,}111...}}$ é:
a) 4,444...
b) 4
c) 4,777...
d) 3
e) 4/3

5) Escreva na base 2 os números abaixo:
a) 42
b) 73
c) 16

6) Escreva os números abaixo na base 10:
a) $(21101)_3$
b) $(111010)_2$
c) $(2A3)_{12}$
d) $(1BA)_{13}$

7) Resolva as operações:
a) $(3211)_4 + (2130)_4$
b) $(7452)_8 - (2634)_8$
c) $(53)_6 \times (14)_6$
d) $(101000)_2 : (1000)_2$

8) Calcule a quantidade de divisores positivos dos números:
a) 450
b) 512
c) $2^3 \times 3^4 \times 5^4 \times 6^2$

9) Determine o valor de x de modo que o número $N = 2^3 \times 3^{x+4} \times 5^2$ tenha 180 divisores positivos.

10) Qual o menor número natural que possui 18 divisores positivos?

11) Qual o menor número inteiro e positivo que devemos multiplicar pelo número 18.000 para obtermos um cubo perfeito?

12) Um feirante tem em sua barraca 135 abacates, 216 peras e 297 maçãs, e deseja distribuí-los, sem que haja sobras, em lotes de modo que o número de frutas por lote seja constante e que em cada lote só existam frutas de uma única espécie. Qual o número mínimo de lotes que esse feirante conseguirá formar?

13) Um empreiteiro deseja construir um prédio em um terreno retangular de dimensões 216 m por 414 m. Para isto deverá cercá-lo, o que será feito por meio de estacas. Se ele colocar uma estaca em cada canto do terreno e utilizar sempre a mesma distância entre duas estacas consecutivas, qual será o número mínimo de estacas a ser utilizado?

14) Qual é o maior número inteiro pelo qual devemos dividir os números 354, 770 e 993 para obtermos restos respectivamente iguais a 18, 14 e 27?

15) O cometa A é visto a olho nu da Terra de 72 em 72 anos, outro cometa B é visível a cada 40 anos e um terceiro cometa C pode ser avistado a cada 90 anos. Se no ano de 1.956 os três foram vistos a olho nu da Terra, em que ano tal fato tornará a ocorrer pela próxima vez?

16) Dois sinais luminosos fecham juntos em um determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 50 segundos aberto, enquanto que o outro permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto. Qual o número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez?

17) Determine o menor número que dividido por 18, 20 e 32 deixa sempre resto 9.

18) Determine o menor número que dividido por 40, 16 e 28 deixa restos respectivamente iguais a 26, 2 e 14.

19) Trinta operários constroem uma casa em seis dias, trabalhando oito horas por dia. Em quantos dias, vinte e quatro operários construirão uma casa idêntica à primeira, trabalhando doze horas por dia?

20) Um navio com uma tripulação de 3.600 homens necessita de 210.000 litros de água para fazer uma viagem com duração de 35 dias. Se a quantidade de marinheiros for reduzida de 600 homens e o número de litros de água passar para 250.000, quantos dias poderá durar essa viagem?

21) O comprimento, em metros, do arame necessário para produzir 320 pregos é igual ao número de pregos que se produzem com 20 metros desse mesmo arame. Quantos pregos serão produzidos com 500 metros desse arame?

22) Uma lanchonete oferece três opções de sanduíches: o Big Ronald's, o Framburguer e o Hotfish, cujos preços são R$ 17,00, R$ 10,50 e R$ 8,00, respectivamente. Um grupo de jovens consumiu cinco Big Ronald's, oito Framburgueres e certa quantidade de Hotfishes. Quantos Hotfishes esse grupo consumiu, sabendo-se que o preço médio por sanduíche foi de R$ 11,25?

23) Em uma pequena empresa, com 20 funcionários, há 12 que têm salário mensal de R$ 8.000,00; 5 com salário de R$ 12.000,00 e os demais recebem R$ 20.000,00 mensalmente.

a) Qual é o salário médio dos empregados dessa empresa?

b) A empresa vai contratar um diretor-geral e não gostaria que a nova média salarial superasse o maior salário atual. Qual é o salário máximo que ela pode oferecer ao diretor?

24) **(UNICAMP)** A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é de 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é de 35 anos e a dos homens é de 50 anos, qual o número de pessoas de cada sexo nesse grupo?

25) Uma empresa depositou um total de R$ 7.400,00 de FGTS para seus três funcionários A, B e C, que têm, respectivamente, 10, 12 e 15 anos de trabalho. Quanto coube ao funcionário B?

26) Um senhor deseja dividir 85 balas entre seus três netos, em partes inversamente proporcionais a suas idades que são 5, 8 e 10 anos. Quantas balas receberá o neto mais velho?

27) Uma firma deseja distribuir, a título de produtividade, a importância de R$ 6.060,00 entre seus três empregados, utilizando critérios coerentes em relação ao número de horas extras trabalhadas e ao número de faltas. Sabendo-se que o funcionário A faltou 3 dias e fez 40 horas extras; o funcionário B faltou 5 dias e fez 28 horas extras e o funcionário C faltou 2 dias e fez 16 horas extras, quanto coube ao funcionário A?

28) Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

a) $(2x+3)^2$
b) $(4-3x)^2$
c) $(-2+5x)^2$
d) $(-3x-2y)^2$
e) $(x^2+2).(x^2-2)$
f) $(x+2)^3$
g) $(x-4)^3$
h) $(-x-1)^3$
i) $(x+y+z)^2$
j) $(3x-2y-z)^2$

29) **(PUC)** A diferença entre as raízes do polinômio $x^2 + ax + a - 1$ é igual a 1. Determine os possíveis valores de a.

30) **(PUC)** Dê uma equação do 2º grau de raízes $-\frac{3}{4}$ e 0,9.

31) **(FUVEST)** A soma e o produto das raízes da equação do 2º grau $(4m + 3n)x^2 - 5nx + m - 2 = 0$ valem, respectivamente, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{32}$. Determine o valor de m + n.

32) No país da Matemática, todos os sistemas são escritos em uma base b. Sérgio, um de seus habitantes, compra um produto anunciado por 440 unidades monetárias, paga com uma nota de 1000 unidades monetárias e recebe de troco 340 unidades monetárias. Determine o valor de b.

33) **(PUC)** O maior número abaixo é:

a) 3^{31}
b) 8^{10}
c) 16^{8}
d) 81^{6}
e) 243^{5}

34) A expressão $\frac{9^{88} - 4^{44}}{9^{44} - 4^{22}}$ é equivalente a:

a) $2^{44}.(2^{33}+1)$
b) $1 - 2^{88}$
c) $9 . 2^{44}$
d) $3 . (1 - 2^{88})$
e) $2^{88} . (2^{44} + 1)$

35) Em uma turma de 80 alunos, 28 foram reprovados. Qual o percentual de aprovação?

36) 20% dos 40% de 600 bolas, equivale a quantas bolas?

37) Qual é o número cujos 25% dos 12% valem 36?

38) Uma nota promissória no valor de R$4 000,00 foi paga após o vencimento. Devido a esse fato houve um acréscimo de 7% no seu valor, relativo a multa e juros. Qual foi o valor do pagamento?

39) Pela insistência de um cliente, um vendedor cobrou apenas R$17,40 por um DVD que custava R$30,00. Qual foi o percentual de desconto?

40) Dois aumentos sucessivos de 20%, equivalem a um único aumento de que percentual?

41) Dois descontos sucessivos de 20%, equivalem a um único desconto de quantos por cento?

42) **(ENEM)** A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura b e ao quadrado da altura d. A constante de proporcionalidade k varia de acordo com o material utilizado na sua construção.

Considerando-se S como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é

a) $S = k . b . d$.
b) $S = b . d^2$.
c) $S = k . b . d^2$.
d) $S = k . b . d^{-2}$.
e) $S = k . d^2 . b^{-1}$.

43) **(ENEM)** A resistência mecânica S de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à sua largura b e ao quadrado de sua altura d e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento x. A constante de proporcionalidade k é chamada de resistência da viga.

A expressão que traduz a resistência mecânica S dessa viga de madeira é

a) $S = k . b . d^2 . x^{-2}$.
b) $S = k . b . d . x^{-2}$.
c) $S = k . b . d^2 . x^{-1}$.
d) $S = k . b^2 . d . x^{-1}$.
e) $S = k . b . 2d . x^{-1}$.

44) **(ENEM)** Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M".

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão

a) $S = k.M$.
b) $S = k.M^{1/3}$.
c) $S = k^{1/3}.M^{1/3}$.
d) $S = k^{1/3}.M^{2/3}$.
e) $S = k^{1/3}.M^2$.

45) Josué pescou certa quantidade de peixes. Cada um dos peixes de maior tamanho foi vendido por R$20,00, enquanto que os demais foram vendidos por R$15,00 cada um. Sabendo que todos os peixes que ele pescou foram vendidos e que ele recebeu um total de R$305,00, determine as possíveis quantidades de peixes que ele pescou.

46) Telma adquiriu alguns presentes para distribuir entre seus amigos na Páscoa. Ela comprou algumas caixas de bombons, cujo preço unitário era R$7,00; alguns coelhos de chocolate que custavam R$15,00 cada um e certo número de ovos de chocolate, que eram vendidos por R$22,00, a unidade. Sabendo que cada amigo recebeu um único presente, que o número de ovos adquirido foi o dobro do número de coelhos e que ela gastou um total de R$ 254,00, determine a quantidade de amigos presenteados.

47) Para a realização de um churrasco de confraternização entre os formandos da 3ª série do Ensino Médio de certa escola, foram adquiridas 37 garrafas de refrigerantes: umas com capacidade de 2,25 litros, outras com capacidade de 1,5 litro e ainda havia algumas que continham exatamente 1 litro, totalizando 54 litros de bebida. Sabendo que a diferença, em módulo, entre as quantidades de garrafas de 2,25 litros e 1,5 litro é expressa por um número primo, é correto afirmar que a quantidade de garrafas adquiridas com capacidade de exatamente 1 litro é expressa por um número

a) primo.
b) múltiplo de 4.
c) múltiplo de 5.
d) múltiplo de 9.

48) **(UERJ)** Numa granja há patos, marrecos e galinhas num total de 50 aves. Os patos são vendidos a R$12,00 a unidade, as galinhas a R$5,00 e os marrecos a R$15,00. Considere um comerciante que tenha gastado R$440,00 na compra de todas essas aves e que tenha comprado mais patos do que marrecos.

Qual o número de patos que esse comerciante comprou?

49) Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Quantos homens devem sair da sala para que a porcentagem de homens na sala passe a ser 98%?

50) Para montar uma fábrica de sapatos, uma empresa fez um investimento de R$ 120 000,00. Cada par de sapatos é vendido por R$ 30,00, com uma margem de lucro de 20%. A venda mensal é de 2 000 pares de sapatos. Determine o número de meses necessários para que a empresa recupere o investimento inicial.

51) Um eletrodoméstico custa R$ 2 500,00 à vista, mas pode também ser pago em duas vezes: R$ 1 500,00 de entrada e R$ 1 500,00 ao fim de 30 dias. Qual é o juro mensal que a loja está cobrando de um cliente que paga em duas vezes?

52) A confeitaria Cara Melada é conhecida por suas famosas balas de leite, vendidas em pacotes. No Natal, esta confeitaria fez a seguinte promoção: colocou, em cada pacote, 20% a mais de balas e aumentou em 8% o preço do pacote. Determine a variação percentual que essa promoção acarretou no preço de cada bala do pacote.

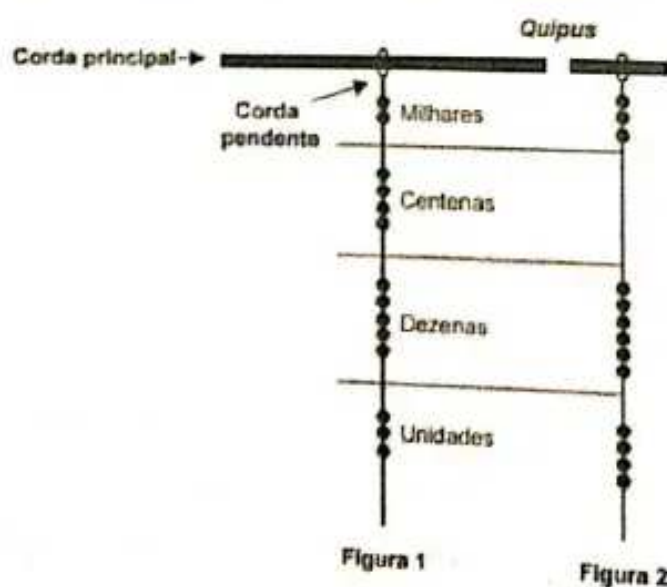
53) Ao contrário de inflação, deflação é a queda do nível geral de preços. Economistas de certo instituto de pesquisas econômicas preveem que haverá uma deflação no próximo mês de dezembro. O percentual de deflação deve ficar em torno de 8%. De acordo com essa informação, qual será o percentual aproximado de aumento do poder de compra dos trabalhadores?

54) A fim de atrair a clientela, uma loja anunciou um desconto de 20% na compra à vista de qualquer mercadoria. No entanto, para não ter redução na margem de lucro, a loja reajustou previamente seus preços, de forma que, com o desconto, os preços retornassem aos seus valores iniciais. Determine a taxa do reajuste feito antes do desconto anunciado.

55) A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%. Certa mercadoria, cujo preço à vista é P reais, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$ 100,00 de entrada, uma prestação de R$ 240,00 a ser paga em 30 dias e outra de R$ 220,00 a ser paga em 60 dias.

Determine P, o valor à vista dessa mercadoria.

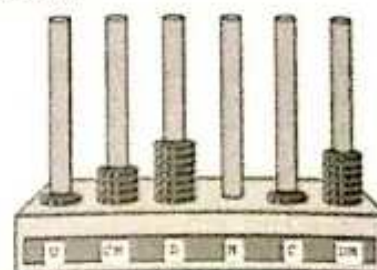
56) Uma geladeira, que custa à vista R$ 2 000,00, pode ser adquirida nas Lojas Rainha em três prestações mensais e iguais, sendo uma entrada. Sabendo que a loja cobra 30% de juro mensal sobre o saldo devedor para compras a prazo, qual o valor aproximado de cada prestação a ser paga por um cliente que opta pelo pagamento parcelado dessa geladeira, nessa loja?

57) **(ENEM)** Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado quipus. O quipus era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o quipus representa o número decimal 2 453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.

Disponível em: www.culturaperuana.com.br. Acesso em: 13 dez. 2012

O número da representação do quipus da Figura 2, em base decimal, é

a) 364.
b) 463.
c) 3 064.
d) 3 640.
e) 4 603.

58) **(ENEM)** O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda.

Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.

Nessa disposição, o número que está representado na figura é

a) 46 171.
b) 147 016.
c) 171 064.
d) 460 171.
e) 610 741.

59) **(ENEM)** Os egípcios da Antiguidade criaram um sistema muito interessante para escrever números baseado em agrupamento. O número 1 é representado pelo bastão |, o número 2 por dois bastões | | e assim por diante, até o número 9, representado por noves bastões em sequência |||||||||. Para o número 10, utiliza-se o símbolo ∩ e alguns outros números múltiplos de 10 estão descritos na tabela a seguir.

Símbolo Egípcio	Número na nossa notação
|	1
∩	10
୨	100
⌛	1 000
☝	10 000
🐟	100 000
𓁨	1 000 000

Os números de 1 a 9 999 999 na numeração egípcia derivam dos símbolos da tabela, respeitando as devidas quantidades e posições (símbolos que representam números maiores são colocados à esquerda e de maneira decrescente, são colocados os demais símbolos à direita) até a soma deles chegar ao número desejado. Por exemplo, o número 321 é descrito por ୨୨୨∩∩| pois 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 é igual a 321.

O número egípcio 𓁨🐟🐟☝☝☝୨୨୨...

a) 12 372.
b) 1 230 072.
c) 1 203 702.
d) 1 230 702.
e) 1 237 200.

60) **(UERJ)** Uma loja identifica seus produtos com um código que utiliza 16 barras, finas ou grossas. Nesse sistema de codificação, a barra fina representa o zero e a grossa o 1. A conversão do código em algarismos do número correspondente a cada produto deve ser feita de acordo com esta tabela:

Código	Algarismo
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4

Código	Algarismo
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9

Considere o código abaixo, que identifica determinado produto.

Esse código corresponde ao seguinte número:

a) 6835
b) 5724
c) 8645
d) 9768

61) **(UERJ)** O ano bissexto possui 366 dias e sempre é múltiplo de 4. O ano de 2016 foi o último bissexto. Porém, há casos especiais de anos que, apesar de múltiplos de 4, não são bissextos: são aqueles que também são múltiplos de 100 e não são múltiplos de 400. O ano de 1900 foi o último caso especial.

A soma dos algarismos do próximo ano que será um caso especial é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

62) **(ENEM)** Uma loja decide premiar seus clientes. Cada cliente receberá um dos seis possíveis brindes disponíveis, conforme sua ordem de chegada na loja. Os brindes a serem distribuídos são: uma bola, um chaveiro, uma caneta, um refrigerante, um sorvete e um CD, nessa ordem. O primeiro cliente da loja recebe uma bola, o segundo recebe um chaveiro, o terceiro recebe uma caneta, o quarto recebe um refrigerante, o quinto recebe um sorvete, o sexto recebe um CD, o sétimo recebe uma bola, o oitavo recebe um chaveiro, e assim sucessivamente, segundo a ordem dos brindes.

O milésimo cliente receberá de brinde um(a)

a) bola.
b) caneta.
c) refrigerante.
d) sorvete.
e) CD.

63) **(ENEM)** Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número N é dado pela expressão $2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$, na qual x, y e z são números inteiros não negativos. Sabe-se que N é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7.

O número de divisores de N, diferentes de N, é

a) $x \cdot y \cdot z$
b) $(x+1) \cdot (y+1)$
c) $x \cdot y \cdot z - 1$
d) $(x+1) \cdot (y+1)z$
e) $(x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1) - 1$

64) **(ENEM)** Um estudante se cadastrou numa rede social na internet que exibe o índice de popularidade do usuário. Esse índice é a razão entre o número de admiradores do usuário e o número de pessoas que visitam seu perfil na rede.

Ao acessar seu perfil hoje, o estudante descobriu que seu índice de popularidade é 0,3121212...

O índice revela que as quantidades relativas de admiradores do estudante e pessoas que visitam seu perfil são

a) 103 em cada 330.
b) 104 em cada 333.
c) 104 em cada 3 333.
d) 139 em cada 330.
e) 1 039 em cada 3 330.

65) **(ENEM)** Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.

Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{4}$
b) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{3}{8}$
c) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$
d) $\frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}$
e) $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$

66) **(ENEM)** Um indivíduo possui uma renda mensal de R$ 1 200,00 e deseja comprar um refrigerador. Na loja que ele decide fazer sua compra, o refrigerador custa R$ 1 800,00. Esse valor deverá ser pago em 12 prestações mensais iguais e sem juros.

Uma forma de representar a quantia da renda mensal do indivíduo que será usada para pagar cada prestação é

a) $\frac{1}{18}$
b) $\frac{1}{12}$
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{3}{2}$

67) (ENEM) No ano de 2011, o sul do país foi castigado por uma forte estiagem. Para amenizar essa situação, a prefeitura de um município dessa região utilizou um caminhão pipa, com capacidade de 32 mil litros de água, para abastecer as residências de uma localidade desse município. Nessa localidade, com o caminhão pipa cheio, foram realizados 3 abastecimentos de água. No primeiro, foram distribuídos $\frac{1}{4}$ da capacidade de água do caminhão e, no segundo, $\frac{1}{3}$ do restante.

Considerando-se que não houve desperdício de água durante o abastecimento e que o restante tenha sido utilizado totalmente, a fração da capacidade de água do caminhão pipa, distribuída no terceiro abastecimento, foi

a) $\frac{2}{7}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{5}{12}$.

d) $\frac{1}{2}$.

e) $\frac{7}{12}$.

68) (ENEM) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar par com a carta da mesa?

a) 9
b) 7
c) 5
d) 4
e) 3

69) (PUC) O número de dígitos decimais de 10^{100} é:

a) 99
b) 100
c) 101
d) 102
e) 103

70) (PUC) O resultado de 10001 × 102030405 é:

a) 1020406080405
b) 1000000000405
c) 4062040508020
d) 1000000000001
e) 1000500000400

71) (ENEM) A volemia (V) de um indivíduo é a quantidade total de sangue em seu sistema circulatório (coração, artérias, veias e capilares). Ela é útil quando se pretende estimar o número total (N) de hemácias de uma pessoa, a qual é obtida multiplicando-se a volemia (V) pela concentração (C) de hemácias no sangue, isto é, $N = V \times C$. Num adulto normal essa concentração é de 5 200 000 hemácias por mL de sangue, conduzindo a grandes valores de N. Uma maneira adequada de informar essas grandes quantidades é utilizar a notação científica, que consiste em expressar N na forma $N = Q \times 10^n$, sendo $1 \leq Q < 10$ e n um número inteiro.

Considere um adulto normal, com volemia de 5 000 mL.

http://perfline.com. Acesso em: 23 fev.2013 (adaptado)

Qual a quantidade total de hemácias desse adulto, em notação científica?

a) $2,6 \times 10^{-10}$
b) $2,6 \times 10^{-9}$
c) $2,6 \times 10^{9}$
d) $2,6 \times 10^{10}$
e) $2,6 \times 10^{11}$

72) (PUC) Considere x, y e z reais positivos tais que $\sqrt{x} = 2015^3$, $\sqrt[3]{y^2} = 2015^4$ e $z^3 = 2015^6$.

A expressão $\frac{1}{\sqrt{x \cdot y \cdot z}}$ vale:

a) 2015^{-7}
b) 2015^{-13}
c) 2015^{-17}
d) 2015^{5}
e) 2015^{7}

73) (PUC) Quanto vale $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$?

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$

b) $\sqrt{2} + 1$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

d) $\frac{5}{2}$

e) 1

74) (PUC) Quanto vale $\frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}}$?

a) $\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[3]{9}$

c) $1 + \sqrt[3]{3}$

d) $1 + \sqrt[3]{9}$

e) $2\sqrt[3]{3}$

75) (PUC) Assinale a menor solução inteira da inequação $4x - 10 > 2$.

a) 2 b) 3
c) 4 d) 12
e) 60

76) (PUC) Considere a equação $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, $a \neq 0$. Sabemos que $a + b + c = 0$ e que $x = 3$ é raiz da equação. Quanto vale o produto das duas raízes da equação?

a) -6 b) -3
c) 3 d) 6
e) 9

77) **(PUC)** Considere o polinômio $p(x) = x^2 + bx + 3$ e assinale a alternativa correta.

a) O polinômio tem pelo menos uma raiz real para todo $b \in R$.
b) O polinômio tem exatamente uma raiz real para $b = 12$.
c) O polinômio tem infinitas raízes reais para $b = 0$.
d) O polinômio não admite raiz real para $b = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.
e) O polinômio tem exatamente três raízes reais para $b = p$.

78) **(PUC)** Assinale a alternativa correta:

a) $x^4 \equiv (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 8) + 16$
b) $x^4 \equiv (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + 16$
c) $x^4 \equiv (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) - 16$
d) $x^4 \equiv (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4) + 8$
e) $x^4 \equiv (x - 2)(-x^3 + 2x^2 - 4) + 8$

79) **(PUC)** Para n inteiro positivo, os números da forma $3^{n^2+3} + 3^{n^2+4} + 3^{n^2+5}$ são sempre múltiplos de:

a) 5
b) 7
c) 11
d) 13
e) 17

80) **(ENEM)** Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm.

Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

a) 2,099.
b) 2,96.
c) 3,021.
d) 3,07.
e) 3,10.

81) **(ENEM)** No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

a) 570
b) 500
c) 450
d) 187
e) 150

82) **(ENEM)** A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.

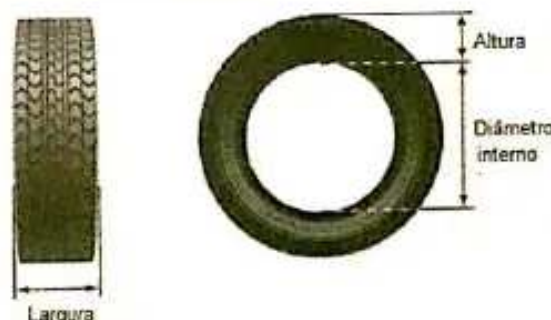
Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista fixou surpreendido com resultado obtido em metros.

Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

a) 53.
b) 94.
c) 113.
d) 135.
e) 145.

83) **(ENEM)** De forma geral, os pneus radiais trazem em sua lateral uma marcação do tipo abc/deRfg, como 185/65R15. Essa marcação identifica as medidas do pneu da seguinte forma:

- abc é a medida da largura do pneu, em milímetro;
- de é igual ao produto de 100 pela razão entre a medida da altura (em milímetro) e a medida da largura do pneu (em milímetro);
- R significa radial;
- fg é a medida do diâmetro interno do pneu, em polegada.

A figura ilustra as variáveis relacionadas com esses dados.

O proprietário de um veículo precisa trocar os pneus de seu carro e, ao chegar a uma loja, é informado por um vendedor que há somente pneus com os seguintes códigos: 175/65R15, 175/75R15, 175/80R15, 185/60R15 e 205/55R15. Analisando, juntamente com o vendedor, as opções de pneus disponíveis, concluem que o pneu mais adequado para seu veículo é o que tem a menor altura.

Desta forma, o proprietário do veículo deverá comprar o pneu com a marcação

a) 205/55R15.
b) 175/65R15.
c) 175/75R15.
d) 175/80R15.
e) 185/60R15.

84) **(UERJ)** Na imagem da etiqueta, informa-se o valor a ser pago por 0,256 kg de peito de peru.

O valor, em reais, de um quilograma desse produto é igual a:

a) 25,60
b) 32,76
c) 40,00
d) 50,00

85) **(ENEM)** Um clube tem um campo de futebol com área total de 8 000 m², correspondente ao gramado. Usualmente, a poda da grama desse campo é feita por duas máquinas do clube próprias para o serviço. Trabalhando no mesmo ritmo, as duas máquinas podam juntas 200 m² por hora. Por motivo de urgência na realização de uma partida de futebol, o administrador do campo precisará solicitar ao clube vizinho máquinas iguais às suas para fazer o serviço de poda em um tempo máximo de 5 h.

Utilizando as duas máquinas que o clube já possui, qual o número mínimo de máquinas que o administrador do campo deverá solicitar ao clube vizinho?

a) 4
b) 6
c) 8
d) 14
e) 16

86) **(UERJ)** O código de uma inscrição tem 14 algarismos; dois deles e suas respectivas posições estão indicados abaixo.

5				8				x					

Considere que, nesse código, a soma de três algarismos consecutivos seja sempre igual a 20.

O algarismo representado por x será divisor do seguinte número:

a) 49
b) 64
c) 81
d) 125

87) **(ENEM)** Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br.
Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

88) **(ENEM)** O LIRAa, Levantamento Rápido do Índice de Infestação por Aedes aegypti, consiste num mapeamento da infestação do mosquito Aedes aegypti. O LIRAa é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação.

O serviço de vigilância sanitária de um município, no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAa de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

I. 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;

II. 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;

III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;

IV. 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;

V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro.

O setor de dedetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAa.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br.
Acesso em: 28 out. 2015.

As ações de controle iniciarão pelo bairro A

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

89) **(ENEM)** Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água.

Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização.

Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

- Filtro 1 (F1): 18 mg em 6 dias;
- Filtro 2 (F2): 15 mg em 3 dias;
- Filtro 3 (F3): 18 mg em 4 dias;
- Filtro 4 (F4): 6 mg em 3 dias;
- Filtro 5 (F5): 3 mg em 2 dias.

Ao final, descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.

Disponível em: www.redebrasilatual.com.br.
Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado).

O filtro descartado é o

a) F1.
b) F2.
c) F3.
d) F4.
e) F5.

90) **(ENEM)** Uma pessoa precisa comprar creme dental. Ao entrar em um supermercado, encontra uma marca em promoção, conforme o quadro seguinte:

Creme dental	Promoção
Embalagem nº 1	Leve 3 pague 2
Embalagem nº 2	Leve 4 pague 3
Embalagem nº 3	Leve 5 pague 4
Embalagem nº 4	Leve 7 pague 5
Embalagem nº 5	Leve 10 pague 7

Pensando em economizar seu dinheiro, o consumidor resolve levar a embalagem de número

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

91) **(ENEM)** Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes no evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento.

Uma representação possível do número esperado de participantes para o último dia é

a) 3×345
b) $(3 + 3 + 3) \times 345$
c) $3^3 \times 345$
d) $3 \times 4 \times 345$
e) $3^4 \times 345$

92) **(ENEM)** A direção de uma escola comprará lapiseiras para distribuir para os seus alunos. Sabe-se que x lapiseiras custam y reais.

O número máximo de lapiseiras que a direção da escola conseguirá comprar com z reais é o maior inteiro menor do que, ou igual a

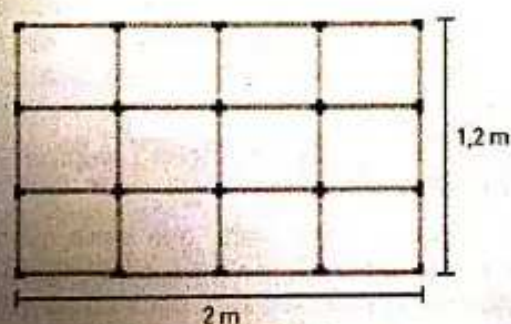
a) $\dfrac{x \cdot z}{y}$

b) $\dfrac{y \cdot z}{x}$

c) $\dfrac{z}{y \cdot x}$

d) $\dfrac{z}{y}$

e) $\dfrac{z}{x}$

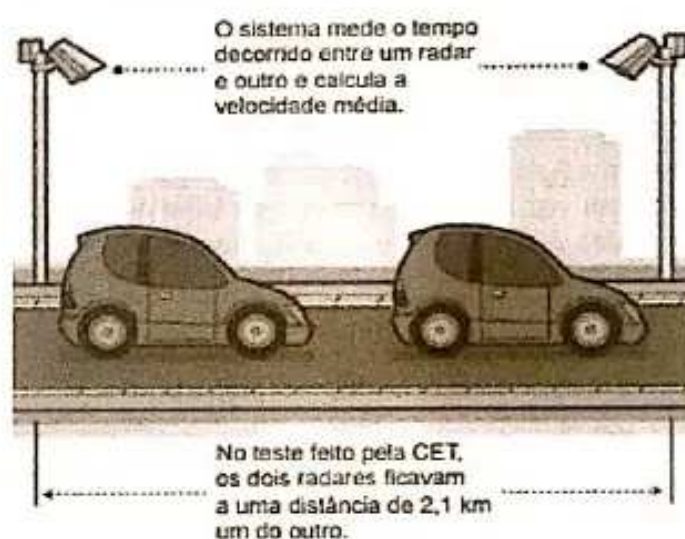
93) **(UERJ)** Uma grade retangular é montada com 15 tubos de 40 cm na posição vertical e com 16 tubos de 50 cm na horizontal. Para esse tipo de montagem, são utilizados encaixes nas extremidades dos tubos, como ilustrado abaixo:

Se a altura de uma grade como essa é igual ao comprimento de x tubos, e a largura equivale ao comprimento de y tubos, a expressão que representa o número total de tubos usados é:

a) $x^2 + y^2 + x + y - 1$
b) $xy + x + y + 1$
c) $xy + 2x + 2y$
d) $2xy + x + y$

94) **(ENEM)** Um confeiteiro deseja fazer um bolo cuja receita indica a utilização de açúcar e farinha de trigo em quantidades fornecidas em gramas. Ele sabe que uma determinada xícara utilizada para medir os ingredientes comporta 120 gramas de farinha de trigo e que três dessas xícaras de açúcar correspondem, em gramas, a quatro de farinha de trigo.

Quantos gramas de açúcar cabem em uma dessas xícaras?

a) 30
b) 40
c) 90
d) 160
e) 360

95) **(ENEM)** A Companhia de Engenharia de Tráfego (CET) de São Paulo testou em 2013 novos radares que permitem o cálculo da velocidade média desenvolvida por um veículo em um trecho da via.

As medições de velocidade deixariam de ocorrer de maneira instantânea, ao se passar pelo radar, e seriam feitas a partir da velocidade média no trecho, considerando o tempo gasto no percurso entre um radar e outro. Sabe-se que a velocidade média é calculada como sendo a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

O teste realizado mostrou que o tempo que permite uma condução segura de deslocamento no percurso entre os dois radares deveria ser de, no mínimo, 1 minuto e 24 segundos. Com isso, a CET precisa instalar uma placa antes do primeiro radar informando a velocidade média máxima permitida nesse trecho da via. O valor a ser exibido na placa deve ser o maior possível, entre os que atendem às condições de condução segura observadas.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 11 jan. 2014 (adaptado).

A placa de sinalização que informa a velocidade que atende a essas condições é

(A)

(B) 69 km/h

(C) 90 km/h

(D) 102 km/h

(E) 110 km/h

96) **(ENEM)** O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm x 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez. A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.

Disponível em: http://pt.wikipedia.org.
Acesso em: 4 abr. 2012 (adaptado).

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

a) 8
b) 16
c) 64
d) 128
e) 256

97) **(ENEM)** Um show especial de Natal teve 45.000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o show, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao show e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados.

Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

a) 1 hora.
b) 1 hora e 15 minutos.
c) 5 horas.
d) 6 horas.
e) 6 horas e 15 minutos.

98) **(ENEM)** O gerente de um estacionamento, próximo a um grande aeroporto, sabe que um passageiro que utiliza seu carro nos traslados casa-aeroporto-casa gasta cerca de R$ 10,00 em combustível nesse trajeto. Ele sabe, também, que um passageiro que não utiliza seu carro nos traslados casa-aeroporto-casa gasta cerca de R$ 80,00 com transporte.

Suponha que os passageiros que utilizam seus próprios veículos deixem seus carros nesse estacionamento por um período de dois dias. Para tornar atrativo a esses passageiros o uso do estacionamento, o valor, em real, cobrado por dia de estacionamento deve ser, no máximo, de

a) 35,00.
b) 40,00.
c) 45,00.
d) 70,00.
e) 90,00.

99) **(ENEM)** Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$ 100,00.

Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

a) 30
b) 36
c) 50
d) 60
e) 64

100) **(ENEM)** Num campeonato de futebol de 2012, um time sagrou-se campeão com um total de 77 pontos (P) em 38 jogos, tendo 22 vitórias (V), 11 empates (E) e 5 derrotas (D). No critério adotado para esse ano, somente as vitórias e empates têm pontuações positivas e inteiras. As derrotas têm valor zero e o valor de cada vitória é maior que o valor de cada empate.

Um torcedor, considerando a fórmula da soma de pontos injusta, propôs aos organizadores do campeonato que, para o ano de 2013, o time derrotado em cada partida perca 2 pontos, privilegiando os times que perdem menos ao longo do campeonato. Cada vitória e cada empate continuariam com a mesma pontuação de 2012.

Qual a expressão que fornece a quantidade de pontos (P), em função do número de vitórias (V), do número de empates (E) e do número de derrotas (D), no sistema de pontuação proposto pelo torcedor para o ano de 2013?

a) $P = 3V + E$
b) $P = 3V - 2D$
c) $P = 3V + E - D$
d) $P = 3V + E - 2D$
e) $P = 3V + E + 2D$

101) **(UERJ)** Um supermercado realiza uma promoção com o objetivo de diminuir o consumo de sacolas plásticas: o cliente que não utilizar as sacolas disponíveis no mercado terá um desconto de R$0,03 a cada cinco itens registrados no caixa.

Um participante dessa promoção comprou 215 itens e pagou R$155,00.

Determine o valor, em reais, que esse cliente pagaria se fizesse as mesmas compras e não participasse da promoção.

102) **(ENEM)** O pacote de salgadinho preferido de uma menina é vendido em embalagens com diferentes quantidades. A cada embalagem é atribuído um número de pontos na promoção:

"Ao totalizar exatamente 12 pontos em embalagens e acrescentar mais R$ 10,00 ao valor da compra, você ganhará um bichinho de pelúcia".

Esse salgadinho é vendido em três embalagens com as seguintes massas, pontos e preços:

Massa da Embalagem (g)	Pontos da embalagem	Preço (R$)
50	2	2,00
100	4	3,60
200	6	6,40

A menor quantia a ser gasta por essa menina que a possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é

a) R$ 10,80.
b) R$ 12,80.
c) R$ 20,80.
d) R$ 22,00.
e) R$ 22,80.

103) **(UERJ)** Um anel contém 15 gramas de ouro 16 quilates. Isso significa que o anel contém 10 g de ouro puro e 5 g de uma liga metálica. Sabe-se que o ouro é considerado 18 quilates se há a proporção de 3 g de ouro puro para 1 g de liga metálica.

Para transformar esse anel de ouro 16 quilates em outro de 18 quilates, é preciso acrescentar a seguinte quantidade, em gramas, de ouro puro:

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3

104) **(ENEM)** Um executivo sempre viaja entre as cidades A e B, que estão localizadas em fusos horários distintos. O tempo de duração da viagem de avião entre as duas cidades é de 6 horas. Ele sempre pega um voo que sai de A às 15h e chega à cidade B às 18h (respectivos horários locais).

Certo dia, ao chegar à cidade B, soube que precisava estar de volta à cidade A, no máximo, até as 13h do dia seguinte (horário local de A).

Para que o executivo chegue à cidade A no horário correto e admitindo que não haja atrasos, ele deve pegar um voo saindo da cidade B, em horário local de B, no máximo à(s)

a) 16h.
b) 10h.
c) 7h.
d) 4h.
e) 1h.

105) **(UERJ)** Uma farmácia recebeu 15 frascos de um remédio. De acordo com os rótulos, cada frasco contém 200 comprimidos, e cada comprimido tem massa igual a 20 mg.

Admita que um dos frascos contenha a quantidade indicada de comprimidos, mas que cada um destes comprimidos tenha 30 mg. Para identificar esse frasco, cujo rótulo está errado, são utilizados os seguintes procedimentos:

- numeram-se os frascos de 1 a 15;
- retira-se de cada frasco a quantidade de comprimidos correspondente à sua numeração;
- verifica-se, usando uma balança, que a massa total dos comprimidos retirados é igual a 2540 mg.

A numeração do frasco que contém os comprimidos mais pesados é:

a) 12
b) 13
c) 14
d) 15

106) **(ENEM)** O gelo marinho no Ártico está em sua segunda menor extensão já registrada: 5,56 milhões de km². Essa medida foi feita com o auxílio de satélites no dia 14 de agosto de 2011 e é apenas 220 mil km² maior do que a baixa recorde de 2007.

ANGELO, C. Volume de gelo no Ártico nunca foi tão baixo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 08 nov. 2011.

De acordo com esses dados, a menor extensão territorial do gelo marinho registrada no Ártico em 2007, em metros quadrados, foi

a) $214,44 \times 10^3$
b) $5,34 \times 10^6$
c) $5,34 \times 10^9$
d) $5,34 \times 10^{12}$
e) $214,44 \times 10^{12}$

107) **(ENEM)** O ato de medir consiste em comparar duas grandezas de mesma espécie. Para medir comprimentos existem diversos sistemas de medidas. O pé, a polegada e a jarda, por exemplo, são unidades de comprimento utilizadas no Reino Unido e nos Estados Unidos Um pé corresponde a $\frac{1200}{3\,937}$ metros ou doze polegadas, e três pés são uma jarda.

Uma haste com 3 jardas, 2 pés e 6 polegadas tem comprimento, em metro, mais próximos de

a) 1,0.
b) 3,5.
c) 10,0.
d) 22,9.
e) 25,3.

108) **(ENEM)** Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tem a capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, 0,08 m³ de água. Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser

a) 16.
b) 800.
c) 1 600.
d) 8 000.
e) 16 000.

109) **(ENEM)** O criador de uma espécie de peixe tem sete tanques, sendo que cada tanque contém 14 600 litros de água. Nesses tanques, existem em média cinco peixes para cada metro cúbico (m³) de água. Sabe-se que cada peixe consome 1 litro de ração por semana. O criador quer construir um silo que armazenará a ração para alimentar sua criação.

Qual é a capacidade mínima do silo, em litros, para armazenar a quantidade de ração que garantirá a alimentação semanal dos peixes?

a) 511
b) 5 110
c) 51 100
d) 511 000
e) 5 110 000

110) **(ENEM)** Um banco de sangue recebe 450 mL de sangue de cada doador. Após separar o plasma sanguíneo das hemácias, o primeiro é armazenado em bolsas de 250 mL de capacidade. O banco de sangue aluga refrigeradores de uma empresa para estocagem das bolsas de plasma, segundo a sua necessidade. Cada refrigerador tem uma capacidade de estocagem de 50 bolsas. Ao longo de uma semana, 100 pessoas doaram sangue àquele banco.

Admita que, de cada 60 mL de sangue, extraem-se 40 mL de plasma.

O número mínimo de congeladores que o banco precisou alugar, para estocar todas as bolsas de plasma dessa semana, foi

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 6.
e) 8.

111) **(ENEM)** Em uma plantação de eucaliptos, um fazendeiro aplicará um fertilizante a cada 40 dias, um inseticida para combater as formigas a cada 32 dias e um pesticida a cada 28 dias. Ele iniciou aplicando os três produtos em um mesmo dia.

De acordo com essas informações, depois de quantos dias, após a primeira aplicação, os três produtos serão aplicados novamente no mesmo dia?

a) 100
b) 140
c) 400
d) 1 120
e) 35 840

112) **(ENEM)** O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1) cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
2) todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
3) não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

a) 2.
b) 4.
c) 9.
d) 40.
e) 80.

113) **(ENEM)** Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.

Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

a) 105 peças.
b) 120 peças.
c) 210 peças.
d) 243 peças.
e) 420 peças.

114) **(UERJ)** Na tabela abaixo, estão indicadas três possibilidades de arrumar n cadernos em pacotes:

Nº de pacotes	Nº de cadernos por pacotes	Nº de cadernos que sobram
X	12	11
Y	20	19
Z	18	17

Se n é menor do que 1200, a soma dos algarismos do maior valor de n é:

a) 12
b) 17
c) 21
d) 26

115) **(UERJ)** O treinador de um time de futebol desconhece a média das idades de seus 11 jogadores. Porém, ele possui as seguintes informações:

- o capitão tem 30 anos;
- o goleiro tem 23 anos;
- a média de idade do time sem esses dois jogadores é um ano menor do que a média de idade do time completo.

Calcule a média de idade do time completo.

116) **(UERJ)** Na tabela abaixo, estão indicados os preços do rodízio de pizzas de um restaurante.

DIAS DA SEMANA	VALOR UNITÁRIO DO RODÍZIO (R$)
segunda-feira, terça-feira, quarta-feira e quinta-feira	18,50
sexta-feira, sábado e domingo	22,00

Considere um cliente que foi a esse restaurante todos os dias de uma mesma semana, pagando um rodízio em cada dia.

Determine o valor médio que esse cliente pagou, em reais, pelo rodízio nessa semana.

117) **(PUC)** Um professor calculou a média das notas de seus 30 alunos e encontrou 5,6. Percebeu, no entanto, que 2 dos 30 alunos tinham tirado nota zero. Sendo assim, decidiu encontrar a média dos alunos que não tiraram zero.

Assinale a média que o professor, assim, obteve.

a) 5,7
b) 5,8
c) 6
d) 6,2
e) 6,4

118) **(ENEM)** O Ibope entrevistou 100 pessoas que assistiram à estreia da versão 2011 do Rock in Rio, no dia 23 de setembro de 2011, sendo que os entrevistados atribuíram uma nota de 0 (zero) a 10 (dez) para o dia da estreia do evento. A média das notas dos entrevistados foi 9,3 e 64 pessoas deram nota 10 ao evento no dia de estreia.

Disponível em: http://g1.globo.com.
Acesso em: 12 nov. 2011 (adaptado).

Desta forma, a melhor aproximação para a média das demais notas (diferentes de 10) do dia de estreia foi

a) 8,05.
b) 8,60.
c) 9,30.
d) 9,65.
e) 9,75.

119) **(PUC)** Três números positivos proporcionais a 5, 8 e 9 são tais que a diferença do maior para o menor supera o módulo da diferença entre os dois menores em 5 unidades.

Assinale o maior deles.

a) 45
b) 4
c) 63
d) 72
e) 81

120) **(PUC)** Os sócios de uma empresa decidem dividir o lucro de um determinado período, pelos seus três gerentes, de modo que cada um receba uma parte diretamente proporcional ao seu tempo de serviço.

Sabendo que o lucro que será dividido é de R$ 18.500,00 e que o tempo de serviço de cada um deles é, respectivamente 5, 7 e 8 anos, podemos afirmar que o mais antigo na empresa receberá:

a) R$ 4625,00
b) R$ 5125,00
c) R$ 6475,00
d) R$ 7400,00
e) R$ 9250,00

121) **(UERJ)**

O MENINO MALUQUINHO Ziraldo

A definição apresentada pelo personagem não está correta, pois, de fato, duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao se multiplicar o valor de uma delas por um número positivo, o valor da outra é dividido por esse mesmo número.

Admita que a nota em matemática e a altura do personagem da tirinha sejam duas grandezas, x e y, inversamente proporcionais.

A relação entre x e y pode ser representada por:

a) $y = \dfrac{3}{x^2}$

b) $y = \dfrac{5}{x}$

c) $y = \dfrac{2}{x+1}$

d) $y = \dfrac{2x+4}{3}$

122) **(ENEM)** Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede 9 m², sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R$ 500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento.

Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área A (em metro quadrado), situada a D metros da fonte sonora, é

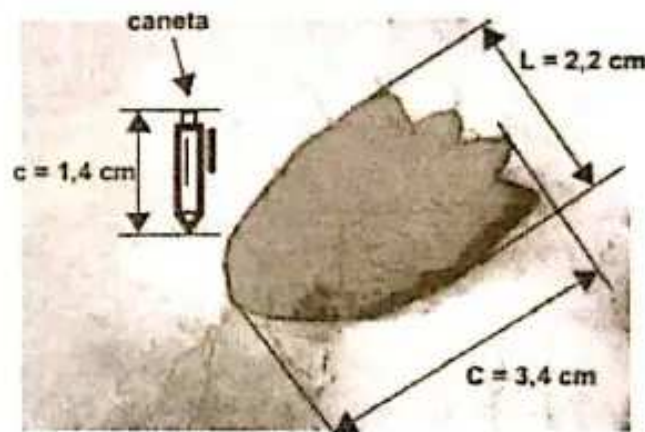
a) $\dfrac{500 \cdot 81}{A \cdot D^2}$

b) $\dfrac{500 \cdot A}{D^2}$

c) $\dfrac{500 \cdot D^2}{A}$

d) $\dfrac{500 \cdot A \cdot D^2}{81}$

e) $\dfrac{500 \cdot 3 \cdot D^2}{A}$

123) **(ENEM)** Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.

A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a

a) 4,9 e 7,6.
b) 8,6 e 9,8.
c) 14,2 e 15,4.
d) 26,4 e 40,8.
e) 27,5 e 42,5.

124) **(ENEM)** Uma empresa europeia construiu um avião solar, como na figura, objetivando dar uma volta ao mundo utilizando somente energia solar. O avião solar tem comprimento AB igual a 20 m e uma envergadura de asas CD igual a 60 m.

Para uma feira de ciências, uma equipe de alunos fez uma maquete desse avião. A escala utilizada pelos alunos foi de 3 : 400.

A envergadura CD na referida maquete, em centímetro, é igual a

a) 5.
b) 20.
c) 45.
d) 55.
e) 80.

125) **(ENEM)** Num mapa com escala 1 : 250 000, a distância entre as cidades A e B é de 13 cm. Num outro mapa, com escala 1 : 300 000, a distância entre as cidades A e C é de 10 cm. Em um terceiro mapa, com escala 1 : 500 000, a distância entre as cidades A e D é de 9 cm. As distâncias reais entre a cidade A e as cidades B, C e D são, respectivamente, iguais a X, Y e Z (na mesma unidade de comprimento).

As distâncias X, Y e Z, em ordem crescente, estão dadas em

a) X , Y , Z.
b) Y , X , Z.
c) Y , Z , X.
d) Z , X , Y.
e) Z , Y , X.

126) **(ENEM)** A Figura 1 representa uma gravura retangular com 8 m de comprimento e 6 m de altura.

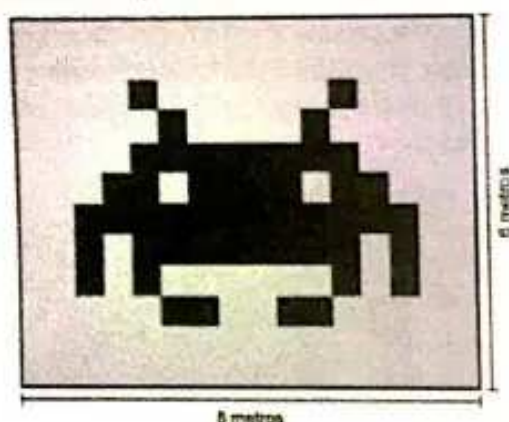
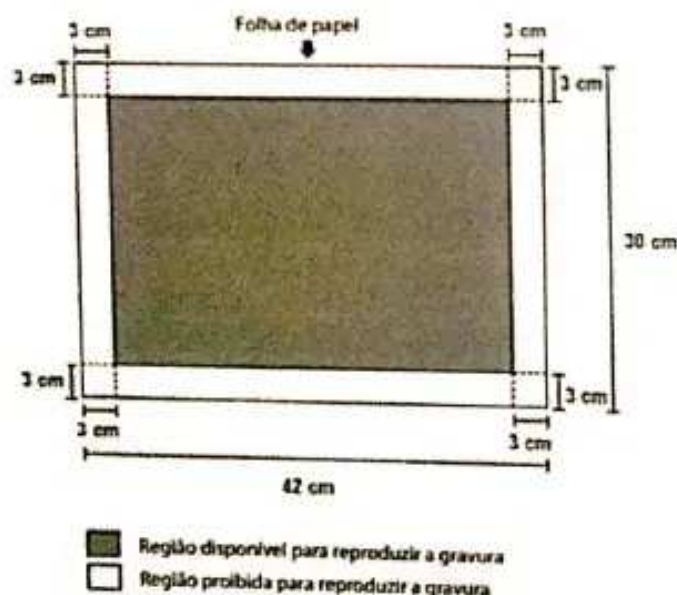



Figura 1

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42 cm de comprimento e 30 cm de altura, deixando livres 3 cm em cada margem, conforme a Figura 2.

A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da Figura 1.

PRADO, A. C. Superinteressante, ed. 301, fev. 2012 (adaptado).

A escala da gravura reproduzida na folha de papel é

a) 1 : 3.
b) 1 : 4.
c) 1 : 20.
d) 1 : 25.
e) 1 : 32.

127) **(ENEM)** Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente,

a) 1,8 t; 8,4 t; 1,8 t.
b) 3,0 t; 6,0 t; 3,0 t.
c) 2,4 t; 7,2 t; 2,4 t.
d) 3,6 t; 4,8 t; 3,6 t.
e) 4,2 t; 3,6 t; 4,2 t.

128) **(ENEM)** Durante um jogo de futebol foram anunciados os totais do público presente e do público pagante. Diante da diferença entre os dois totais apresentados, um dos comentaristas esportivos presentes afirmou que apenas 75% das pessoas que assistiam àquele jogo no estádio pagaram ingresso.

Considerando que a afirmativa do comentarista está correta, a razão entre o público não pagante e o público pagante naquele jogo foi

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{3}{1}$

129) **(ENEM)** Uma pesquisa recente aponta que 8 em cada 10 homens brasileiros dizem cuidar de sua beleza, não apenas de sua higiene pessoal.

CAETANO, M.; SOEIRO, R.; DAVINO, R. Cosméticos. Superinteressante, n. 304, maio 2012 (adaptado).

Outra maneira de representar esse resultado é exibindo o valor percentual dos homens brasileiros que dizem cuidar de sua beleza.

Qual é o valor percentual que faz essa representação?

a) 80%
b) 8%
c) 0,8%
d) 0,08%
e) 0,008%

130) **(PUC)** O salário de Paulo sofreu um desconto total de 8%; com isso, ele recebeu R$ 1.518,00.

O valor bruto do salário de Paulo é:

a) R$ 1.390,00
b) R$ 1.550,00
c) R$ 1.600,00
d) R$ 1.650,00
e) R$ 1.680,00

131) **(UERJ)** Considere uma mercadoria que teve seu preço elevado de x reais para y reais. Para saber o percentual de aumento, um cliente dividiu y por x, obtendo quociente igual a 2,08 e resto igual a zero.

Em relação ao valor de x, o aumento percentual é equivalente a:

a) 10,8%
b) 20,8%
c) 108,0%
d) 208,0%

132) **(PUC)** Abílio tem um salário de R$ 1000,00. No final do ano, ele recebeu um aumento de 10%, devido a uma promoção, seguido, em março, de um reajuste de 5%.

Qual o salário de Abílio em abril?

a) R$ 1150,00
b) R$ 1155,00
c) R$ 1105,00
d) R$ 1160,00
e) R$ 1200,00

133) **(ENEM)** O Brasil é o quarto produtor mundial de alimentos e é também um dos campeões mundiais de desperdício. São produzidas por ano, aproximadamente, 150 milhões de toneladas de alimentos e, desse total, 2/3 são produtos de plantio. Em relação ao que se planta, 64% são perdidos ao longo da cadeia produtiva (20% perdidos na colheita, 8% no transporte e armazenamento, 15% na indústria de processamento, 1% no varejo e o restante no processamento culinário e hábitos alimentares).

Disponível em: www.bancodealimentos.org.br.
Acesso em: 1 ago. 2012.

O desperdício durante o processamento culinário e hábitos alimentares, em milhão de tonelada, é igual a

a) 20.
b) 30.
c) 56.
d) 64.
e) 96.

134) **(PUC)** Um imóvel em São Paulo foi comprado por x reais, valorizou 10% e foi vendido por R$ 495.000,00. Um imóvel em Porto Alegre foi comprado por y reais, desvalorizou 10% e também foi vendido por R$ 495.000,00.

Os valores de x e y são:

a) x = 445500 e y = 544500
b) x = 450000 e y = 550000
c) x = 450000 e y = 540000
d) x = 445500 e y = 550000
e) x = 450000 e y = 544500

135) **(PUC)** Um fazendeiro comprou 5 lotes de terra iguais, pelo mesmo valor. Um ano depois ele revendeu os 5 lotes. Em dois deles, ele teve lucro de 20%; nos outros três, ele teve prejuízo de 10%.

Qual foi o lucro ou prejuízo do fazendeiro na operação completa?

a) Lucro de 10%
b) Prejuízo de 5%
c) Não teve lucro nem prejuízo
d) Prejuízo de 8%
e) Lucro de 2%

136) **(ENEM)** Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas.

Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses.

Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser

a) 72%
b) 68%
c) 64%
d) 54%
e) 18%

137) **(ENEM)** O Brasil desenvolveu técnicas próprias de plantio e colheita de cana-de-açúcar, tornando-se o maior produtor mundial. Cultivando novas variedades, foram produzidas, na safra 2010/2011, 624 milhões de toneladas em 8,1 milhões de hectares. Houve um substancial ganho de produtividade (em toneladas por hectare) quando se compara com a de décadas atrás, como a da safra 1974/1975, que foi de 47 toneladas por hectare.

Disponível em: www2.cead.ufv.br.
Acesso em: 27 fev. 2011 (adaptado).

De acordo com dados apresentados, qual foi o valor mais aproximado da taxa de crescimento da produtividade de cana-de-açúcar, por hectare no Brasil, da safra 1974/1975 para a safra 2010/2011?

a) 13%
b) 30%
c) 64%
d) 77%
e) 164%

138) **(ENEM)** Um pequeno comerciante pretende aplicar R$ 60 000,00 em ações na Bolsa de Valores. O quadro seguinte traz algumas das opções de investimento.

Fundos de ações	Retorno em 12 meses	Taxa de administração
WWWW	27,5%	12%
BBBT	24,7%	15%
BGT Capital	29,5%	13%
JGPF	25,9%	14%
IKPQ	23,9%	11%

Dentre as opções apresentadas no quadro, a melhor aplicação para esse montante de dinheiro é

a) BBBT
b) BGT Capital
c) IKPQ
d) JGPF
e) WWWW

139) **(ENEM)** Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem P da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.

De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de P é

a) [35 ; 63].
b) [40 ; 63].
c) [50 ; 70].
d) [50 ; 90].
e) [70 ; 90].

140) **(ENEM)** Densidade absoluta (d) é a razão entre a massa de um corpo e o volume por ele ocupado. Um professor propôs à sua turma que os alunos analisassem a densidade de três corpos: d_A, d_B, d_C. Os alunos verificaram que o corpo A possuía 1,5 vez a massa do corpo B e esse, por sua vez, tinha $\frac{3}{4}$ da massa do corpo C. Observaram, ainda, que o volume do corpo A era o mesmo do corpo B e 20% maior do que o volume do corpo C.

Após a análise, os alunos ordenaram corretamente as densidades desses corpos da seguinte maneira

a) $d_B < d_A < d_C$
b) $d_B = d_A < d_C$
c) $d_C < d_B = d_A$
d) $d_B < d_C < d_A$
e) $d_C < d_B < d_A$

141) **(UERJ)** Observe o anúncio abaixo, que apresenta descontos promocionais de uma loja.

Adaptado de boaspromoções.com.br

Admita que essa promoção obedeça à seguinte sequência:

- primeiro desconto de 10% sobre o preço da mercadoria;
- segundo desconto de 10% sobre o valor após o primeiro desconto;
- desconto de R$100,00 sobre o valor após o segundo desconto.

Determine o preço inicial de uma mercadoria cujo valor, após os três descontos, é igual a R$ 710,00.

142) **(UERJ)** Um índice de inflação de 25% em um determinado período de tempo indica que, em média, os preços aumentaram 25% nesse período. Um trabalhador que antes podia comprar uma quantidade X de produtos, com a inflação e sem aumento salarial, só poderá comprar agora uma quantidade Y dos mesmos produtos, sendo Y < X.

Com a inflação de 25%, a perda do poder de compra desse trabalhador é de:

a) 20%
b) 30%
c) 50%
d) 80%

143) **(ENEM)** O setor de recursos humanos de uma empresa pretende fazer contratações para adequar-se ao artigo 93 da Lei n° 8.213/91, que dispõe:

Art. 93. A empresa com 100 (cem) ou mais empregados está obrigada a preencher de 2% (dois por cento) a 5% (cinco por cento) dos seus cargos com beneficiários reabilitados ou pessoas com deficiência, habilitadas, na seguinte proporção:

I. até 200 empregados 2%;
II. de 201 a 500 empregados.................. 3%;
III. de 501 a 1 000 empregados................ 4%;
IV. de 1 001 em diante............................. 5%.

Disponível em: www.planalto.gov.br. Acesso em: 3 fev. 2015.

Constatou-se que a empresa possui 1.200 funcionários, dos quais 10 são reabilitados ou com deficiência, habilitados.

Para adequar-se à referida lei, a empresa contratará apenas empregados que atendem ao perfil indicado no artigo 93.

O número mínimo de empregados reabilitados ou com deficiência, habilitados, que deverá ser contratado pela empresa é

a) 74.
b) 70.
c) 64.
d) 60.
e) 53.

144) **(ENEM)** O fisiologista francês Jean Poiseuille estabeleceu, na primeira metade do século XIX, que o fluxo de sangue por meio de um vaso sanguíneo em uma pessoa é diretamente proporcional à quarta potência da medida do raio desse vaso. Suponha que um médico, efetuando uma angioplastia, aumentou em 10% o raio de um vaso sanguíneo de seu paciente.

O aumento percentual esperado do fluxo por esse vaso está entre

a) 7% e 8%
b) 9% e 11%
c) 20% e 22%
d) 39% e 41%
e) 46% e 47%

145) **(UERJ)** Um trem transportava, em um de seus vagões, um número inicial n de passageiros. Ao parar em uma estação, 20% desses passageiros desembarcaram. Em seguida, entraram nesse vagão 20% da quantidade de passageiros que nele permaneceu após o desembarque. Dessa forma, o número final de passageiros no vagão corresponde a 120.

Determine o valor de n.

146) **(UERJ)** No ano letivo de 2014, em uma turma de 40 alunos, 60% eram meninas. Nessa turma, ao final do ano, todas as meninas foram aprovadas e alguns meninos foram reprovados. Em 2015, nenhum aluno novo foi matriculado, e todos os aprovados confirmaram suas matrículas. Com essa nova composição, em 2015, a turma passou a ter 20% de meninos.

O número de meninos aprovados em 2014 foi igual a:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 8

147) **(ENEM)** Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía. Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.

Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser

a) R$ 0,96.
b) R$ 1,00.
c) R$ 1,40.
d) R$ 1,50.
e) R$ 1,56.

148) **(ENEM)** Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era

a) R$ 166,00.
b) R$ 156,00.
c) R$ 84,00.
d) R$ 46,00.
e) R$ 24,00.

149) **(ENEM)** Um cliente fez um orçamento com uma cozinheira para comprar 10 centos de quibe e 15 centos de coxinha e o valor total foi de R$ 680,00. Ao finalizar a encomenda, decidiu aumentar as quantidades de salgados e acabou comprando 20 centos de quibe e 30 centos de coxinha. Com isso, ele conseguiu um desconto de 10% no preço do cento do quibe e de 15% no preço do cento de coxinha, e o valor total da compre ficou em R$ 1 182,00.

De acordo com esses dados, qual foi o valor que o cliente pagou pelo cento da coxinha?

a) R$ 23,40
b) R$ 23,80
c) R$ 24,90
d) R$ 25,30
e) R$ 37,80

150) **(ENEM)** Um fornecedor vendia caixas de leite a um supermercado por R$ 1,50 a unidade. O supermercado costumava comprar 3 000 caixas de leite por mês desse fornecedor. Uma forte seca, ocorrida na região onde o leite é produzido, forçou o fornecedor a encarecer o preço de venda em 40%. O supermercado decidiu então cortar em 20% a compra mensal dessas caixas de leite. Após essas mudanças, o fornecedor verificou sua receita nas vendas ao supermercado tinha aumentado.

O aumento da receita nas vendas do fornecedor, em reais, foi de

a) 540.
b) 600.
c) 900.
d) 1 260.
e) 1 500.

151) **(ENEM)** Uma concessionária de automóveis revende atualmente três marcas de veículos, A, B e C, que são responsáveis por 50%, 30% e 20%, respectivamente, de sua arrecadação. Atualmente, o faturamento médio mensal dessa empresa é de R$ 150 000,00. A direção dessa empresa estima que, após uma campanha publicitária a ser realizada, ocorrerá uma elevação de 20%, 30% e 10% na arrecadação com as marcas A B e C, respectivamente.

Se os resultados estimados na arrecadação forem alcançados, o faturamento médio mensal da empresa passará a ser de

a) R$ 180 000,00.
b) R$ 181 500,00.
c) R$ 187 500,00.
d) R$ 240 000,00.
e) R$ 257 400,00.

152) **(UERJ)** Na compra de um fogão, os clientes podem optar por uma das seguintes formas de pagamento:

- à vista, no valor de R$ 860,00;
- em duas parcelas fixas de R$ 460,00, sendo a primeira paga no ato da compra e a segunda 30 dias depois.

A taxa de juros mensal para pagamentos não efetuados no ato da compra é de:

a) 10%
b) 12%
c) 15%
d) 18%

153) **(ENEM)** O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficientemente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

- Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.
- Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.
- Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.
- Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.
- Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virushpv.com.br.
Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado).

A proposta implementada foi a de número

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

154) **(ENEM)** A fim de expandir seus investimentos, um banco está avaliando os resultados financeiros de duas seguradores de veículos de uma cidade.

O seguro de um carro custa, em média, R$ 2 000,00 na seguradora X e R$ 3 000,00 na segurador Y; já o valor pago pela seguradora a um cliente, vítima de roubo, é de R$ 42 000,00 na seguradora X e de R$ 63 000,00 na segurador Y.

Pesquisas revelam que, nesta cidade, a probabilidade de um veículo ser roubado é de 1%.

Sabe-se que essas duas seguradores têm a mesma quantidade de clientes e que o banco optará pela seguradora que possuir o maior lucro médio por veículo.

A seguradora escolhida pelo banco e o lucro médio por veículo nessa escolha serão, respectivamente,

a) Y e R$ 2 970,00.
b) Y e R$ 2 370,00.
c) Y e R$ 2 340,00.
d) X e R$ 1 580,00.
e) X e R$ 1 560,00.

155) **(UERJ)** Observe as guias para pagamento em cota única do IPTU-2010 mostradas abaixo.

Em uma delas, com o desconto de 15%, será pago o valor de R$ 1.530,00; na outra, com o desconto de 7%, será pago o valor de R$ 2.790,00.

O desconto percentual médio total obtido com o pagamento desses valores é igual a:

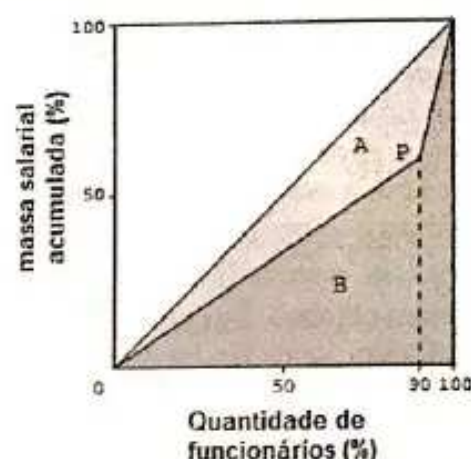
a) 6%
b) 10%
c) 11%
d) 22%

156) **(ENEM)** Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

a) 2 075,00.
b) 2 093,00.
c) 2 138,00.
d) 2 255,00.
e) 2 300,00.

157) **(ENEM)** A distribuição de salários pagos em uma empresa pode ser analisada destacando-se a parcela do total da massa salarial que é paga aos 10% que recebem os maiores salários. Isso pode ser representado na forma de um gráfico formado por dois segmentos de reta, unidos em um ponto P, cuja abscissa tem valor igual a 90, como ilustrado na figura.

No eixo horizontal do gráfico tem-se o percentual de funcionários, ordenados de forma crescente pelos valores de seus salários, e no eixo vertical tem-se o percentual do total da massa salarial de todos os funcionários.

O Índice de Gini, que mede o grau de concentração de renda de um determinado grupo, pode ser calculado pela razão $\frac{A}{A+B}$, em que A e B são as medidas das áreas indicadas no gráfico.

A empresa tem como meta tornar seu Índice de Gini igual ao do país, que é 0,3. Para tanto, precisa ajustar os salários de modo a alterar o percentual que representa a parcela recebida pelos 10% dos funcionários de maior salário em relação ao total da massa salarial.

Disponível em: www.ipea.gov.br.
Acesso em: 4 maio 2016 (adaptado).

Para atingir a meta desejada, o percentual deve ser

a) 40%
b) 20%
c) 60%
d) 30%
e) 70%

158) **(UERJ)** No Brasil, o imposto de renda deve ser pago de acordo com o ganho mensal dos contribuintes, com base em uma tabela de descontos percentuais. Esses descontos incidem, progressivamente, sobre cada parcela do valor total do ganho, denominadas base de cálculo, de acordo com a tabela a seguir.

Base de cálculo aproximada (R$)	Desconto (%)
até 1.900,00	isento
de 1.900,01 até 2.800,00	7,5
de 2.800,01 até 3.750,00	15,0
de 3.750,01 até 4.665,00	22,5
acima de 4.665,00	27,5

Segundo a tabela, um ganho mensal de R$ 2.100,00 corresponde a R$ 15,00 de imposto. Admita um contribuinte cujo ganho total, em determinado mês, tenha sido de R$ 3.000,00. Para efeito do cálculo progressivo do imposto, deve-se considerar esse valor formado por três parcelas: R$ 1.900,00, R$ 900,00 e R$ 200,00.

O imposto de renda, em reais, que deve ser pago nesse mês sobre o ganho total é aproximadamente igual a:

a) 55
b) 98
c) 128
d) 180

Gabarito

1) a) $\frac{238}{33}$
b) $\frac{353}{45}$
c) $\frac{349}{150}$
d) 6
e) $\frac{9333}{1000}$

2) NÃO
3) b
4) b
5) a) $(101010)_2$
b) $(1001001)_2$
c) $(10000)_2$
6) a) 199
b) 58
c) 411
d) 322
7) a) $(12001)_4$
b) $(4616)_8$
c) $(1310)_6$
d) $(101)_2$
8) a) 18
b) 10
c) 210
9) 10
10) 180
11) 12
12) 24
13) 70
14) 42
15) 2 316
16) 300
17) 1 449
18) 546
19) 5
20) 50
21) 2 000
22) 7
23) a). R$10 800,00
b) R$204 000,00
24) 80 mulheres e 40 homens
25) R$2 400,00
26) 20
27) R$3 000,00
28)
a) $4x^2+12x+9$
b) $16-24x+9x^2$
c) $4-20x+25x^2$
d) $9x^2+12xy+4y^2$
e) x^4-4
f) $x^3+6x^2+12x+8$
g) $x^3-12x^2+48x-64$
h) $-x^3-3x^2-3x-1$
i) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$
j) $9x^2+4y^2+z^2-12xy-6xz+4yz$
29) 1 e 3
30) $40x^2-6x-27=0$
31) 9
32) 8
33) a
34) a
35) 65%
36) 48 bolas
37) 1 200
38) R$4 280,00
39) 42%
40) 44%
41) 36%
42) c
43) a
44) d
45) 16, 17, 18, 19 ou 20
46) 20
47) b
48) 20
49) 50
50) 10 ou 12
51) 50%
52) Redução de 10%
53) 8,7%
54) 25%
55) R$ 500,00
56) R$ 847,00
57) c
58) d
59) d
60) a
61) a
62) c
63) e
64) a
65) c
66) c
67) d
68) e
69) c
70) a
71) d
72) a
73) b
74) c
75) c
76) c
77) d
78) b
79) d
80) c
81) b
82) d
83) e
84) d
85) d
86) a
87) b
88) a
89) b
90) a
91) c
92) a
93) d
94) d
95) c
96) e
97) b
98) a
99) a
100) d
101) R$ 156,29
102) c
103) b
104) d
105) c
106) d
107) b
108) e
109) a
110) b
111) d
112) c
113) e
114) b
115) 22
116) R$ 20,00
117) c
118) a
119) a
120) d
121) b
122) b
123) d
124) c
125) b
126) d
127) c
128) b
129) a
130) d
131) c
132) b
133) a
134) b
135) e
136) b
137) c
138) b
139) a
140) a
141) R$ 1000,00
142) a
143) e
144) e
145) 125
146) c
147) c
148) b
149) b
150) a
151) b
152) c
153) a
154) b
155) b
156) d
157) a
158) b

Capítulo II

SEQUÊNCIAS

Introdução

Para o bom entendimento das progressões, é importante o conceito de sequência.

Em determinados casos, é necessário ordenarmos os elementos de um conjunto. Ao assim procedermos, estamos formando uma sucessão ou sequência.

As vogais do nosso alfabeto poderiam ser ordenadas da seguinte forma:

a: 1ª vogal

e: 2ª vogal

i: 3ª vogal

o: 4ª vogal

u: 5ª vogal

Assim teríamos a sequência (a, e, i, o, u). Note que os elementos de uma sequência devem estar entre parênteses.

Outra observação é que os elementos de uma sequência podem ser quaisquer, numéricos ou não. No entanto, daremos mais ênfase às sequências de elementos reais.

O n-ésimo elemento de uma sequência é representado por a_n, b_n, c_n etc. Assim a_1 representa o primeiro termo, a_2 representa o segundo termo, a_3 representa o terceiro termo e assim sucessivamente.

Exemplos:

1) Na sequência $\left(2; -5; \sqrt{2}; \pi\right)$ temos:

$a_1 = 2, a_2 = -5, a_3 = \sqrt{2}$ e $a_4 = \pi$

2) A sequência (1; 3; 5; 7; ...) representa os números naturais ímpares.

Daí: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, ...$

Sequência finita

Dado um conjunto $A = \{n \in IN \mid 1 \leq n \leq k\}$, qualquer função de A em $\Re$ é uma sequência finita.

Exemplo:

Sendo A = {1, 2, 3, 4}, a função f(x) = x + 2 de A em $\Re$ é uma sequência finita de elementos:

$f(1) = f_1 = 1 + 2 = 3$

$f(2) = f_2 = 2 + 2 = 4$

$f(3) = f_3 = 3 + 2 = 5$

$f(4) = f_4 = 4 + 2 = 6$

Sequência infinita

É toda função de IN* em $\Re$.

Exemplo:

A função $g(x) = x^2$ de IN* em $\Re$ é uma função infinita, na qual seus primeiros termos são:

$g(1) = g_1 = 1^2 = 1$

$g(2) = g_2 = 2^2 = 4$

$g(3) = g_3 = 3^2 = 9$

Processo de Recorrência

Em alguns casos, é (são) dado(s) o(s) primeiro(s) termo(s) de uma sentença aberta que nos permite calcular cada um dos termos seguintes em função do anterior ou anteriores; aí então, utilizamos o processo de recorrência.

Observe os exemplos que se seguem:

Exemplos:

1) Formar a sequência infinita tal que $a_1 = 3$ e para todo $n > 1$ tem-se $a_n = a_{n-1} - 5$.

$a_1 = 3$

$a_2 = a_1 - 5 = 3 - 5 = -2$

$a_3 = a_2 - 5 = -2 - 5 = -7$

$a_4 = a_3 - 5 = -7 - 5 = -12$

Logo, a sequência é dada por (3; –2; –7; –12; ...)

2) Dados $a_1 = a_2 = 2$, formar a sequência infinita definida por $a_n = a_{n-1} \,.\, a_{n-2}$, para todo $n \geq 3$.

$a_1 = 2$

$a_2 = 2$

$a_3 = a_2 \,.\, a_1 = 2 \,.\, 2 = 4$

$a_4 = a_3 \,.\, a_2 = 4 \,.\, 2 = 8$

$a_3 = a_4 \,.\, a_3 = 8 \,.\, 4 = 32$

Obtemos, portanto, a sequência (2; 2; 4; 8; 32; ...)

SOMATÓRIO

É muito usual representarmos uma soma pela letra grega Σ (sigma, que corresponde à letra S, de soma, do nosso alfabeto). O seu emprego sempre foi mais difundido no ensino superior, porém, com as novas tendências dos vestibulares, o somatório deve ser parte integrante dos currículos atuais. A sua utilização será trabalhada nos exemplos a seguir:

Exemplos:

1) $\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

NOTA: Lê-se: "Somatório dos termos a_i com *i* variando de *1* a *5*".

Observe que sob o símbolo de somatório aparece um valor que será o primeiro valor atribuído a_i; a partir daí, vamos incrementando i de uma unidade até alcançarmos o valor que se encontra sobre o símbolo de somatório, quando então somamos todos os termos obtidos.

2) $\sum_{i=2}^{6} b_i = b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$

3) $\sum_{j=3}^{5} 2^j = 2^3 + 2^4 + 2^5 = 56$

4) $\sum_{i=1}^{5} 3i = 3\,.\,1 + 3\,.\,2 + 3\,.\,3 + 3\,.\,4 + 3\,.\,5 = 45$

5) $\sum_{j=1}^{3} (3+2j) = (3+2\,.\,1) + (3+2\,.\,2) + (3+2\,.\,3) = 21$

6) $\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3^i) = (1^2+3^1) + (2^2+3^2) + (3^2+3^3) + (4^2+3^4) = 150$

Propriedades do Somatório

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i}$$

Exemplo:
Aplicando esta propriedade ao exemplo 6 anterior:

$$\sum_{i=1}^{4}(i^2+3^i)=\sum_{i=1}^{4}i^2+\sum_{i=1}^{4}3^i=(1^2+2^2+3^2+4^2)+(3^1+3^2+3^3+3^4)=$$
$$=150$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}c.a_i=c.\sum_{i=1}^{n}a_i;\ c\in\Re}$$

Exemplo:
Aplicando esta propriedade ao exemplo 4 anterior:

$$\sum_{i=1}^{5}3.i=3.\sum_{i=1}^{5}i=3.(1+2+3+4+5)=45$$

Exercícios

1) Escreva os 4 primeiros termos das sequências:

a) $a_n=2^n,\ n\in N$

b) $a_n=\dfrac{n+2}{n-1},\ n\in N$

c) $a_n=\sqrt{n},\ n\in N$

d) $\begin{cases}a_1=4\\ a_n=3\cdot a_{n-1};\ n\in N\ e\ n>1\end{cases}$

e) $\begin{cases}a_1=2\\ a_2=3\\ a_n=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}};\ n\in N\ e\ n>2\end{cases}$

2) Desenvolva e dê o resultado de cada um dos somatórios:

a) $\sum\limits_{i=2}^{6}\left(i^3\right)$

b) $\sum\limits_{j=1}^{3}\left(j^{-1}\right)$

c) $\sum\limits_{k=3}^{5}\left(\dfrac{k-1}{k+1}\right)$

3) Represente sob a forma de somatório:

a) $3+6+9+12+15$

b) $5+25+125+625$

c) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}$

4) Os coelhos se reproduzem mais rapidamente que a maioria dos mamíferos. Considerando uma colônia de coelhos que se inicia com um único casal de coelhos adultos e denote por a_n o número de casais adultos desta colônia ao final de n meses. Se $a_1=1$, $a_2=1$ e, para $n\geq 2$, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, o número de casais de coelhos adultos na colônia ao final do décimo mês será:

a) 13
b) 21
c) 34
d) 55
e) 89

5) Escolhi, para senha de meu cofre, uma sequência lógica formada por seis números naturais, menores do que 100. Os cinco primeiros números eram, respectivamente, 32, 27, 35, 30 e 38. Qual o último número dessa senha?

6) Dado um triângulo retângulo cujos catetos medem 2 cm, construímos um segundo triângulo onde um dos catetos está apoiado na hipotenusa do primeiro e o outro cateto mede 2 cm. Construímos um terceiro triângulo com um dos catetos medindo 2 cm e o outro apoiado na hipotenusa do segundo triângulo. Se continuarmos a construir triângulos sempre da mesma forma, determine a hipotenusa do 15º triângulo.

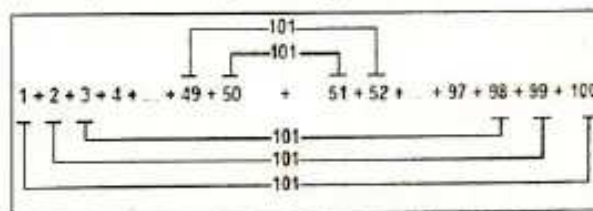
7) Determine uma expressão simples para representar a soma dos n primeiros termos da sequência $\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$.

8) **(ENEM)** A linguagem utilizada pelos chineses há milhares de anos é repleta de símbolos, os ideogramas, que revelam parte da história desse povo. Os ideogramas primitivos são quase um desenho dos objetos representados. Naturalmente, esses desenhos alteraram-se com o tempo, como ilustra a seguinte evolução do ideograma 馬, que significa cavalo e em que estão representados cabeça, cascos e cauda do animal.

馬 馬

Considerando o processo mencionado acima, escolha a sequência que poderia representar a evolução do ideograma chinês para a palavra luta.

a) 人
b) 鬥 鬥
c) 酒 酒
d) 山 山 山
e) 鳥

9) **(ENEM)** Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Aos 10 anos de idade, ele apresentou uma solução genial para somar os números inteiros de 1 a 100. A solução apresentada por Gauss foi 5050, obtida multiplicando-se 101 por 50, como sugere a figura abaixo.

Usando a ideia de Gauss como inspiração, responda quanto vale o produto:

$$\boxed{1\text{x}2\text{x}4\text{x}8\text{x}16\text{x}32\text{x}64\text{x}128}$$

a) 4^{129}
b) 4^{128}
c) 129^4
d) 128^4
e) 130^4

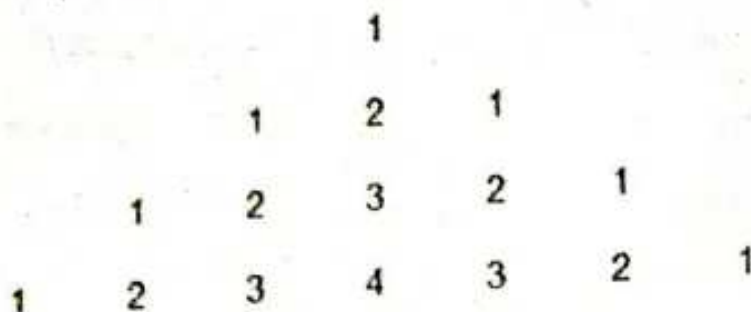
10) **(ENEM)** Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.

1

1 2 1

1 2 3 2 1

1 2 3 4 3 2 1

...

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas.

A partir dessa propriedade, qual será a soma dos números da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

a) 9
b) 45
c) 64
d) 81
e) 285

11) **(ENEM)** Pitágoras e seus discípulos relacionaram os números inteiros com a Geometria, estudando os números poligonais, assim chamados em virtudes de ser possível sua representação mediante pontos dispostos em forma de triângulos (números triangulares), quadrados (números quadrangulares), pentágonos (números pentagonais) etc.

Na figura a seguir tem-se a representação dos quatro primeiros números quadrangulares.

Nessas condições, é correto afirmar que o n-ésimo número quadrangular é igual a

a) 2n.
b) 2n + 1.
c) n^2.
d) $(n-1)^2$.
e) $(n+1)^2$.

12) **(ENEM)** Uma pessoa decidiu depositar moedas de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos em um cofre durante certo tempo. Todo dia da semana ela depositava uma única moeda, sempre nesta ordem: 1, 5, 10, 25, 50, e, novamente, 1, 5, 10, 25, 50, assim sucessivamente.

Se a primeira moeda foi depositada em uma segunda-feira, então essa pessoa conseguiu a quantia exata de R$ 95,05 após depositar a moeda de

a) 1 centavo no 679º dia, que caiu numa segunda-feira.
b) 5 centavos no 186º dia, que caiu numa quinta-feira.
c) 10 centavos no 188º dia, que caiu numa quinta-feira.
d) 25 centavos no 524º dia, que caiu num sábado.
e) 50 centavos no 535º dia, que caiu numa quinta-feira.

13) **(PUC)** Seja a sequência

$$x_1 = \frac{1}{1}, x_2 = \frac{1+1}{2+2}, x_3 = \frac{1+1+1}{3+3+3}, x_4 = \frac{1+1+1+1}{4+4+4+4}, \dots,$$

Temos que x_n é igual a:

a) $\frac{1}{n}$

b) $\frac{1}{n^2}$

c) 1

d) $\frac{1}{n \log(n)}$

e) $\frac{1}{2}$

Gabarito

1)
a) (1, 2, 4, 8)
b) (2, 3/2, 4/3, 5/4)
c) $(0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$
d) (4,12,36,108)
e) (2, 3, 3/2, 1/2)

2)
a) 440
b) 11/6
c) 53/30

3)
a) $\sum_{i=1}^{5} (3i)$
b) $\sum_{i=i}^{4} \left(5^i\right)$
c) $\sum_{i=2}^{6} \left(i^{-1}\right)$

4) d
5) 33
6) 8cm
7) $\frac{n}{2n+4}$
8) b
9) d
10) d
11) c
12) d
13) a

Anotações

Capítulo III

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Definição

É toda sucessão na qual a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e seu antecedente é constante e chamada de razão.

Exemplos:

1) (2; 7; 12; 17; ...) Razão: r = 7 – 2 = 12 – 7 = 5
2) (5; 1; –3; –7; ...) Razão: r = 1 – 5 = –3 – 1 = –4
3) (6; 6; 6) Razão: r = 6 – 6 = 0

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) No exemplo 1 como r > 0 a P.A. é dita crescente.
b) No exemplo 2 como r < 0 a P.A. é dita decrescente.
c) No exemplo 3 como r = 0 a P.A. é estacionária ou constante.
d) Nos exemplos **1** e **2** as P.A. são ilimitadas, enquanto, no exemplo **3**, ela é limitada.

Termo Geral

No desenvolvimento que se segue, objetivamos determinar o valor de um termo qualquer a_n, sem a recorrência aos seus antecedentes, utilizando apenas o primeiro termo a_1 e a razão r.

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n-1} = a_{n-2} + r \\ a_n = a_{n-1} + r \end{array}\right\} n-1 \text{ parcelas}$$

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$$

NOTA: Adicionando-se as n – 1 equações acima, membro a membro, o elemento a_2 da primeira equação será simplificado com o da segunda, o elemento a_3 da segunda simplificada com o da terceira, e assim sucessivamente. No final sobrará o a_n no primeiro membro, o a_1 no segundo membro, acrescido de n – 1 parcelas iguais a *r*, daí a fórmula.

Exemplo:
Determine o 18º termo da progressão (1, 4, 7, ...).

Solução:

Nessa P.A. temos a_1 = 1, r = 4 – 1 = 3 e n = 18, daí:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_{18} = 1 + (18 - 1) \cdot 3$

$a_{18} = 52$

Propriedades das Progressões Aritméticas

1) "Em toda P.A. cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre seu antecedente e seu consequente":

$$(\ldots; a_{k-1}; a_k; a_{k+1}; \ldots) \rightarrow \text{P.A.}$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Exemplo:
A sequência (..., 3; x + 1; 3x – 8;...) é uma P.A. Determine o valor de x.

Como é uma P.A., vale a propriedade anterior:

$$x + 1 = \frac{3 + 3x - 8}{2}$$

$$2x + 2 = 3x - 5$$

$$2x - 3x = -5 - 2$$

$$-x = -7 \quad \therefore \quad x = 7$$

2) **"Em toda P.A. limitada a soma de dois termos equidistante dos extremos é sempre igual à soma dos extremos, valendo o dobro do termo central, quando este existir (número impar de termos)."**

Exemplo:
Observe a P.A. a seguir e constate a veracidade desta propriedade:

Soma dos Termos da P.A. Limitada

Seja obter a soma S_n, dos n primeiros termos de uma P.A.. Então:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad \textbf{(I)}$$

ou

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \qquad \textbf{(II)}$$

Adicionando-se **(I)** e **(II)**, membro a membro:

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, ... são equidistantes dos extremos, pela 2ª propriedade temos que:

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

E daí:

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (n_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Como há *n* parcelas, podemos escrever:

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

Então:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

IMPORTANTE!
Se a P.A. tem nº ímpar de termos, vale a fórmula.
$S_n = T_c . n$

Exemplo:
Determine a soma dos 20 primeiros termos da P.A. (2, 5, 8, ...)

Solução:

$a_1 = 2$ $n = 20$ $r = 5 - 2 = 3$

Calculemos a_n:

$a_n = a_1 + (n-1) . r$
$a_n = 2 + (20-1) . 3$
$a_n = 59$

Calculemos agora S_n:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_2) . n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(2+59) . 20}{2}$$

$S_{20} = 610$

Exercícios

1) Determine o 19º termo da progressão (5, -3, -11,...).

2) Determine o valor numérico do 13º termo da progressão aritmética (2, a-b, a-b+7,...).

3) Quantos múltiplos de 5 há entre 13 e 207?

4) Em uma progressão aritmética o último termo é 41, a razão vale 3 e o primeiro termo é igual ao número de termos. Calcule o valor do primeiro termo.

5) Inserir 5 meios aritméticos entre 2 e 38.

6) Qual a razão da progressão aritmética que se obtém interpolando-se 4 meios aritméticos entre -1 e -16?

7) Determine a razão de uma progressão aritmética em que o quarto e o nono termos valem, respectivamente, 12 e 37.

8) Em uma PA a soma do sexto com o vigésimo primeiro termo vale 44 e a do terceiro com o décimo oitavo vale 32. Determine a razão dessa sequência.

9) A sucessão (..., x+3, 3x+5, x+15,...) é uma progressão aritmética para que valor real de x?

10) Determine o perímetro de um triângulo cujas medidas dos lados expressas por x+1, 2x e x^2-5, formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

11) Qual o valor do terceiro termo de um PA, que possui 5 termos, cujos extremos valem 26 e 6?

12) Os três primeiros termos de uma progressão aritmética são, respectivamente, 3x-1, 4x+1 e 7x-3. Determine o quarto termo dessa sequência.

13) Determine a razão de uma PA em que $a_x = y$ e $a_y = x$.

14) Os comprimentos dos degraus de uma escada que dá acesso a uma igreja diminuem progressivamente: o primeiro mede 6 m; o segundo mede 5,92 m; o terceiro mede 5,84 m e o último mede 80 cm. Quantos degraus há nessa escada?

15) Entre os primeiros mil números inteiros positivos, quantos são divisíveis pelos números 2, 3, 4 e 5?

a) 60
b) 30
c) 20
d) 16
e) 15

16) **(UERJ)** Um cliente, ao chegar a uma agência bancária, retirou a última senha de atendimento do dia, com o número 49. Verificou que havia 12 pessoas à sua frente na fila, cujas senhas representavam uma progressão aritmética de números naturais consecutivos, começando em 37. Algum tempo depois, mais de 4 pessoas desistiram do atendimento e saíram do banco. Com isso, os números das senhas daquelas que permaneceram na fila passaram a formar uma nova progressão aritmética.

Se os clientes com as senhas de números 37 e 49 não saíram do banco, o número máximo de pessoas que pode ter permanecido na fila é:

a) 6
b) 7
c) 9
d) 10

17) Determine a soma dos 16 primeiros termos da progressão (3, 7, 11, ...).

18) Em uma PA o primeiro termo vale 4 e o último termo vale 79. Determine a razão dessa sucessão, sabendo que a soma de seus termos vale 664.

19) Uma PA de 9 termos tem razão 2 e a soma dos seus termos é igual a zero. Determine o valor do sexto termo dessa progressão.

20) A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada pela expressão $n^2 - 3n$, sendo n um número natural positivo. Determine o valor do sexto termo dessa sequência.

21) Quanto vale o décimo termo de uma PA em que a soma dos n primeiros termos é dada por n.(n-5)?

22) Determine a soma dos k primeiros números ímpares positivos.

23) Quanto vale a soma dos múltiplos de 7 menores do que 200?

24) Numa caixa existem 1 000 bolas que vão ser retiradas do seguinte modo: em primeiro lugar retira-se uma bola, depois três, depois cinco e assim sucessivamente, seguindo esse padrão de crescimento.

Quantas bolas restarão na caixa após a vigésima primeira retirada?

25) Um número inteiro de três algarismos em PA e de soma 15, é tal que se invertermos a ordem dos seus algarismos, o novo número excederá o anterior em 594 unidades. Qual era o primeiro número?

26) Os ângulos internos de um quadrilátero convexo estão em progressão aritmética de razão igual a 20°. Determine o valor do maior ângulo desse quadrilátero.

27) Determine o valor da razão de um PA cujo primeiro termo vale 3 e a soma de seus quatro primeiros termos vale 60.

28) A soma dos cinco termos de uma PA é igual a k/2. Determine, em função de k, o valor do terceiro termo dessa progressão.

29) **(PUC)** Os números $a_1 = 5x - 5$, $a_2 = x + 14$ e $a_3 = 6x - 3$ estão em PA.

A soma dos 3 números é igual a:

a) 48
b) 54
c) 72
d) 125
e) 130

30) **(ENEM)** Em uma determinada estrada existem dois telefones instalados no acostamento: um no quilômetro 30 e outro no quilômetro 480. Entre eles serão colocados mais 8 telefones, mantendo-se entre dois telefones consecutivos sempre a mesma distância.

Qual a sequência numérica que corresponde à quilometragem em que os novos telefones serão instalados?

a) 30, 90, 150, 210, 270, 330, 390, 450
b) 75, 120, 165, 210, 255, 300, 345, 390
c) 78, 126, 174, 222, 270, 318, 366, 414
d) 80, 130, 180, 230, 280, 330, 380, 430
e) 81, 132, 183, 234, 285, 336, 387, 438

31) **(ENEM)** Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro.

Qual é o número de andares desse edifício?

a) 40
b) 60
c) 100
d) 115
e) 120

32) **(UERJ)**

Adaptado de leceblog.blogspot.com.

Na situação apresentada nos quadrinhos, as distâncias, em quilômetros, d_{AB}, d_{BC} e d_{CD} formam, nesta ordem, uma progressão aritmética.

O vigésimo termo dessa progressão corresponde a:

a) −50
b) −40
c) −30
d) −20

33) **(PUC)** Os termos da soma S = 4 + 6 + 8 + ... + 96 estão em progressão aritmética.

Assinale o valor de S.

a) 2000
b) 2150
c) 2300
d) 2350
e) 2400

34) **(PUC)** Se a soma dos quatro primeiros termos de uma progressão aritmética é 42, e a razão é 5, então o primeiro termo é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

35) **(UERJ)** Um jogo com dois participantes, A e B, obedece às seguintes regras:

- antes de A jogar uma moeda para o alto, B deve adivinhar a face que, ao cair, ficará voltada para cima, dizendo "cara" ou "coroa";
- quando B errar pela primeira vez, deverá escrever, em uma folha de papel, a sigla **UERJ** uma única vez; ao errar pela segunda vez, escreverá UERJUERJ, e assim sucessivamente;
- em seu enésimo erro, B escreverá n vezes a mesma sigla.

Veja o quadro que ilustra o jogo:

Ordem de erro	Letras escritas
1º	UERJ
2º	UERJUERJ
3º	UERJUERJUERJ
4º	UERJUERJUERJUERJ
. . .	
nº	UERJUERJUERJUERJ...UERJ

O jogo terminará quando o número total de letras escritas por B, do primeiro ao enésimo erro, for igual a dez vezes o número de letras escritas, considerando apenas o enésimo erro.

Determine o número total de letras que foram escritas até o final do jogo.

36) **(ENEM)** A cada dia que passa, um aluno resolve 2 exercícios a mais do que resolveu no dia anterior. Ele completou seu 11º dia de estudo e resolveu 22 exercícios. Seu objetivo é resolver, no total, pelo menos 272 exercícios.

Mantendo seu padrão de estudo, quantos dias ele ainda precisa para atingir sua meta?

a) 5
b) 6
c) 9
d) 16
e) 20

37) **(ENEM)** Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais r km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais r km; e, assim, sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais r km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1 560 km.

A distância r que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é

a) 3.
b) 7.
c) 10.
d) 13.
e) 20.

38) **(ENEM)** Ao elaborar um programa de condicionamento para um atleta, um preparador físico estipula que ele deve correr 1 000 metros no primeiro dia e, nos dias seguintes, 200 metros a mais do que correu no dia anterior. O treinador deseja que, ao final dos dias de treinamento, o atleta tenha percorrido, em média, 1 700 m por dia.

Esse atleta deve participar desse programa por

a) 9 dias.
b) 8 dias.
c) 5 dias.
d) 4 dias.
e) 2 dias.

39) **(UERJ)** Admita a realização de um campeonato de futebol no qual as advertências recebidas pelos atletas são representadas apenas por cartões amarelos. Esses cartões são convertidos em multas, de acordo com os seguintes critérios:

- os dois primeiros cartões recebidos não geram multas;
- o terceiro cartão gera multas cujos valores são sempre acrescidos de R$ 500,00 em relação ao valor da multa anterior.

Na tabela, indicam-se as multas relacionadas aos cinco primeiros cartões aplicados a um atleta.

Cartão amarelo recebido	Valor da multa (R$)
1º	
2º	
3º	500
4º	1.000
5º	1.500

Considere um atleta que tenha recebido 13 cartões amarelos durante o campeonato.

O valor total, em reais, das multas geradas por todos esses cartões equivale a:

a) 30.000
b) 33.000
c) 36.000
d) 39.000

40) **(PUC)** A soma de todos os números naturais pares de três algarismos é:

a) 244 888
b) 100 000
c) 247 050
d) 204 040
e) 204 000

41) **(ENEM)** "A matemática é um saco?" Talvez não, pelo menos depois de ler esse livro de Devlin, um norte-americano especialista em neurolinguística. Ele mostra que o raciocínio numérico é instintivo no ser humano e se baseia no mesmo princípio que rege a linguagem: a habilidade de lidar com símbolos. A partir daí, analisa o funcionamento do nosso cérebro e ressalta a beleza da matemática – a ciência dos padrões.

Superinteressante, junho, 2004. p. 91

Lembrando que "o raciocínio numérico é instintivo no ser humano e se baseia (...) na habilidade de lidar com símbolos", a expressão do termo geral de uma progressão aritmética, formada de números naturais cuja soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = 2n^2$, é:

a) $2n - 4$
b) $4n - 2$
c) $2n$
d) $4n$
e) $4 - 2n$

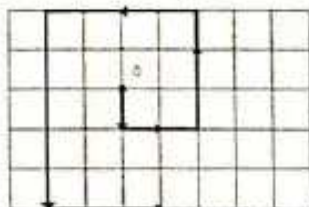
42) Um produtor rural teve problema em sua lavoura devido à ação de uma praga. Para tentar resolver esse problema, consultou um engenheiro-agrônomo e foi orientado a pulverizar, uma vez ao dia, um novo tipo de pesticida. No primeiro dia utilizou 3 litros desse pesticida. A partir do segundo dia, acrescentou 2 litros à dosagem do dia anterior. Sabendo que, nesse processo, foram utilizados 483 litros de pesticida, determine a duração desse "tratamento".

43) **(PUC)** Temos uma progressão aritmética de 20 termos onde o 1º termo é igual a 5. A soma de todos os termos dessa progressão aritmética é 480. O décimo termo é igual a:

a) 20
b) 21
c) 22
d) 23
e) 24

44) **(PUC)** Numa progressão aritmética de razão r e primeiro termo 3, a soma dos primeiros n termos é $3n^2$, logo a razão é:

a) 2
b) 3
c) 6
d) 7
e) 9

45) Cada um dos quadrados da figura abaixo tem 1 cm de lado.

Se a curva poligonal em destaque na figura continuar evoluindo no mesmo padrão, a partir da origem O, qual será seu comprimento quando tiver 20 lados?

a) 20 cm
b) 100 cm
c) 200 cm
d) 210 cm
e) 420 cm

46) Considere a sequência (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5,...). Observe que ela contém exatamente m vezes o número natural m. Determine em que posição dessa sequência encontra-se o primeiro número 100.

47) **(FUVEST)** Um número irracional r tem representação decimal da forma $r = a_1, a_2, a_3$, onde $1 \le a_1 \le 9$, $0 \le a_2 \le 9$ e $0 \le a_3 \le 9$. Supondo-se que a parte inteira de r é o quádruplo de a_3; a_1, a_2 e a_3 estão em progressão aritmética e que a_2 é divisível por 3, o valor de a_3 é igual a:

a) 1
b) 3
c) 4
d) 6
e) 9

48) Os termos da sequência (10, 8, 11, 9, 12, 10, 13, ...) obedecem a uma lei de formação. Se a_n, em que n é um número natural positivo, é o termo de ordem n dessa sequência, determine o valor de $a_{30}+a_{55}$.

49) Mister MM, o Mágico da Matemática, apresentou-se diante de uma plateia com 50 fichas, cada uma contendo um número. Ele pediu a uma espectadora que ordenasse as fichas de forma que o número de cada uma, excetuando-se a primeira e a última, fosse a média aritmética do número da anterior com o da posterior. Mister MM solicitou a seguir à espectadora que lhe informasse o valor da décima sexta e da trigésima primeira ficha, obtendo como resposta 103 e 58, respectivamente. Para delírio da plateia, Mister MM adivinhou então o valor da última ficha. Determine você também esse valor.

50) **(FUVEST)** Quanto vale a soma das frações irredutíveis, positivas, menores do que 10 e de denominador 4?

51) Quanto vale a média aritmética dos cem primeiros termos da sequência (1, -2, 3, -4, 5, -6, ...)?

52) Um número triangular é um número natural que pode ser representado como pontos dispostos em um triângulo equilátero. Tais números foram desenvolvidos por Gauss, em 1 788, quando tinha apenas 10 anos. Observe na tabela abaixo que há uma lei de formação para a obtenção da sequência de números triangulares.

Posição	1	2	3	...	X	...
Triangular	1	3	6	...	3486	...

Em que posição X encontra-se o número triangular 3 486?

53) Um pai resolve depositar todos os meses certa quantia na caderneta de poupança de sua filha. Pretende começar com R$ 5,00 e aumentar R$ 5,00 por mês, ou seja, depositar R$ 10,00 no segundo mês, R$ 15,00 no terceiro e assim por diante. Após efetuar o décimo quinto depósito, qual a quantia total depositada por ele?

54) **(UERJ)** Moedas idênticas de 10 centavos de real foram arrumadas sobre uma mesa, obedecendo à disposição apresentada no desenho: uma moeda no centro e as demais formando camadas tangentes.

Considerando que a última camada é composta por 84 moedas, calcule a quantia, em reais, do total de moedas usadas nessa arrumação.

55) **(PUC)** Num período de 14 dias de treinamento, um maratonista corre cada dia 500 metros a mais que o dia anterior. Ao final dos 14 dias, ele percorreu um total de 66,5 quilômetros. Qual o número de metros que ele correu no último dia?

56) **(UERJ)** Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia - corrida de 6 km;
- dias subsequentes - acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

a) 414
b) 438
c) 456
d) 484

57) **(UERJ)** Na figura, está representada uma torre de quatro andares construída com cubos congruentes empilhados, sendo sua base formada por dez cubos.

Calcule o número de cubos que formam a base de outra torre, com 100 andares, construída com cubos iguais e procedimento idêntico.

58) **(ENEM)** Com o objetivo de trabalhar a concentração e a sincronia de movimentos dos alunos de uma de suas turmas, um professor de educação física dividiu essa turma em três grupos (A, B e C) e estipulou a seguinte atividade: os alunos do grupo A deveriam bater palmas a cada 2 s, os alunos do grupo B deveriam bater palmas a cada 3 s e os alunos do grupo C deveriam bater palmas a cada 4 s.

O professor zerou o cronômetro e os três grupos começaram a bater palmas quando ele registrou 1 s. Os movimentos prosseguiram até o cronômetro registrar 60 s.

Um estagiário anotou no papel a sequência formada pelos instantes em que os três grupos bateram palmas simultaneamente.

Qual é o termo geral da sequência anotada?

a) 12 n, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 5$.
b) 24 n, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 2$.
c) 12 (n - 1), com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 6$.
d) 12 (n - 1) + 1, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 5$.
e) 24 (n - 1) + 1, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 3$.

59) **(UERJ)** Admita a seguinte sequência numérica para o número natural n:

$$a_1 = \frac{1}{3} \text{ e } a_n = a_{n-1} + 3$$

Sendo $2 \leq n \leq 10$, os dez elementos dessa sequência, em que $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_{10} = \frac{82}{3}$ são:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{19}{3}, \frac{28}{3}, \frac{37}{3}, a_6, a_7, a_8, a_9, \frac{82}{3}\right)$$

A média aritmética dos quatro últimos elementos da sequência é igual a:

a) $\frac{238}{12}$

b) $\frac{137}{6}$

c) $\frac{219}{4}$

d) $\frac{657}{9}$

60) **(UERJ)** Geraldo contraiu uma dívida que deveria ser paga em prestações mensais e iguais de R$ 500,00 cada uma, sem incidência de juros ou qualquer outro tipo de correção monetária. Um mês após contrair essa dívida, Geraldo pagou a primeira prestação e decidiu que o valor de cada uma das demais prestações seria sempre igual ao da anterior acrescido de uma parcela de K reais, sendo K um número natural. Assim, a dívida poderia ser liquidada na metade do tempo inicialmente previsto.

a) Considerando t o tempo, em meses, inicialmente previsto, $t > 2$ e $t - 2$ como um divisor par de 2000, demonstre que $K = \frac{2000}{t-2}$.

b) Se a dívida de Geraldo for igual a R$ 9 000,00, calcule o valor da constante K.

61) **(IME)** Considere os números ímpares escritos sucessivamente, como mostram as primeiras linhas da figura abaixo, onde a enésima linha compreende n números. Encontre, em função de n, nesta linha, a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

21 23 25 27 29

....

62) **(ENEM)** Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é

a) 21
b) 24
c) 26
d) 28
e) 31

63) **(ENEM)** O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a) 38 000
b) 40 500.
c) 41 000.
d) 42 000.
e) 48 000.

64) **(ENEM)** Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

Disponível em: http://www.webrun.com.br.
Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino.

Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

a) 12 dias.
b) 13 dias.
c) 14 dias.
d) 15 dias.
e) 16 dias.

65) **(ENEM)** O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

☆ ☆☆ ☆☆☆ ☆☆☆☆ ☆☆☆☆☆ ...
1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 150ª

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

- FUNCIONÁRIO I: aproximadamente 200 estrelas.
- FUNCIONÁRIO II: aproximadamente 6 000 estrelas.
- FUNCIONÁRIO III: aproximadamente 12 000 estrelas.
- FUNCIONÁRIO IV: aproximadamente 22 500 estrelas.
- FUNCIONÁRIO V: aproximadamente 22 800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

a) I
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

66) **(ENEM)** As projeções para a produção de arroz no período de 2012 – 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

a) 497,25.
b) 500,85.
c) 502,87.
d) 558,75.
e) 563,25.

Gabarito

1) -139
2) 86
3) 39
4) 11
5) 8, 14, 20, 26, 32
6) -3
7) 5
8) 2
9) 2
10) 24
11) 16
12) 23
13) -1
14) 66
15) d
16) b
17) 528
18) 5
19) 2
20) 8
21) 14
22) k^2
23) 2 842
24) 559
25) 258
26) 120°
27) 8
28) k/10
29) b
30) d
31) d
32) a
33) d
34) c
35) 760
36) a
37) c
38) b
39) b
40) c
41) b
42) 21 dias
43) d
44) c
45) d
46) 4 951
47) e
48) 59
49) 1
50) 100
51) -0,5
52) 83
53) R$ 600,00
54) R$ 63,10
55) 8 000
56) c
57) 5050
58) d
59) b
60) a) demonstração
b) 125
61) 1º: n^2-n+1
Último: n^2+n-1 $S_n = n^3$
62) b
63) d
64) d
65) c
66) d

Anotações

Capítulo IV

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Definição

Uma equação é dita exponencial quando apresenta variável no expoente.

Métodos de Resolução

Existem alguns tipos de equações exponenciais que só podem ser resolvidos com o auxílio da matemática superior. Assim, vamos nos deter nos casos que podem ser resolvidos com o conhecimento adquirido até aqui.

1º Caso: *Equações do tipo* $a^x = a^y$

Exemplo: $4^{3x+4} = 32$

Solução:

Devemos procurar escrever ambos os membros com potências de mesma base.

$(2^2)^{3x+4} = 2^5$

$2^{6x+8} = 2^5$

Como as bases são iguais, basta igualarmos os expoentes:

$6x + 8 = 5$

$6x = 5 - 8$

$6x = -3$

$x = -\frac{3}{6} \quad \therefore \quad x = -\frac{1}{2}$

2º Caso: *Resolução por artifícios*

Exemplos:

1) Resolver a equação $2^{2x} - 12 \,.\, 2^x + 32 = 0$

Solução:

Nesse caso devemos utilizar um artifício que consiste na transferência de variáveis. Assim, façamos $2^x = y$, logo $2^{2x} = y^2$ e, então:

$2^{2x} - 12 \,.\, 2^x + 32 = 0$

$y^2 - 12y + 32 = 0$

Resolvendo-se esta equação, obtemos: $y = 4$ ou $y = 8$

Lembrando que $2^x = y$, vem que:

$2^x = 4$ ou $2^x = 8$

$2^x = 2^2$; $2^x = 2^3$

$x = 2$; $x = 3$

2) Resolver a equação $2^{x+2} + 2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x-3} = 90$

Solução:

Como o primeiro membro da equação é composto de potências de mesma base, um dos processo de resolução será a evidenciação. Neste caso, devemos colocar em evidência a base comum elevada ao menor dos expoentes, como veremos a seguir:

$2^{x+2} + 2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x-3} = 90$

Menor expoente: $x - 3$

$2^{x-3} \,.\, [2^{x+2-(x-3)} + 2^{x+1-(x-3)} - 2^{x-1-(x-3)} + 2^{x-3-(x-3)}] = 90$

$2^{x-3} \,.\, [2^5 + 2^4 - 2^2 + 2^0] = 90$

$2^{x-3} \,.\, 45 = 90$

$2^{x-3} = 2$

$2^{x-3} = 2^1 \rightarrow x - 3 = 1 \quad \therefore \quad x = 4$

Exercícios

1) Determine o conjunto-solução de cada uma das equações:

a) $81^{x-1} = 27$

b) $6^{2x+6} = 6$

c) $7^{x^2-5x+6} = 1$

d) $2^{2^x} = 256$

e) $3^{2x-1} = \frac{1}{3}$

f) $16^{3x+2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-4}$

g) $5^{2x} = \sqrt[4]{3125}$

h) $\sqrt{11^{x-1}} = \sqrt[3]{11^{x-1}}$

i) $5^{2x} + 2x + + 20.5^x - 125 = 0$

j) $9^x + 3^x = 90$

k) $3.3^{2x} + 28.3^x + 9 = 0$

l) $3^{x+2} + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 769$

m) $5^{3x+1} + 5^{3x-2} + 5^{3x-1} + 5^{3x} = 156$

2) No sistema $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 81^{x-y} = 3 \end{cases}$, determine o valor de $\frac{x}{y}$.

3) Determine o valor de x na equação $0,08^{12-x} = 12,5^{3x-6}$.

4) Sendo $2^x + 2^{-x} = 7$, determine o valor da expressão $4^x + 4^{-x}$.

5) **(PUC)** A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1024}$ tem duas soluções reais. A soma das duas soluções é:

a) -5
b) 0
c) 2
d) 14
e) 1 024

6) **(FUVEST)** Se $4^{16} \cdot 5^{25} = \alpha \cdot 10^n$, com $1 \leq \alpha < 10$, então n é igual a:

a) 24
b) 25
c) 26
d) 27
e) 28

7) Arquimedes, matemático e filósofo grego, nascido em Siracusa no ano de 287 a.C., destacou-se em vários ramos do conhecimento. Em um de seus livros, o Contador de Areia, mostrou, a partir de conhecimentos de sua época, e após resolver algumas equações exponenciais, que para preencher o universo seria necessário certo número inteiro de vigintilhões de grãos de areia. O termo vigintilhões refere-se a uma potência de dez. Suponha que essa quantidade de grãos possa ser escrita na forma $n \cdot 10^{n^2-1}$, com n natural. Sabendo que a quantidade de algarismos desse número está entre 60 e 70, determine o valor de n.

8) Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, que decresce em função do tempo t, em horas, de acordo com a fórmula $M = -3^{2t} - 3^{t+1} + 108$.

Assim sendo, o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar este material antes que ele se volatize totalmente é

a) inferior a 15 minutos.
b) superior a 15 minutos e inferior a 30 minutos.
c) superior a 30 minutos e inferior a 60 minutos.
d) superior a 60 minutos e inferior a 90 minutos.
e) superior a 90 minutos e inferior a 120 minutos.

9) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:

I. Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos.
II. Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem.
III. Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se "lucrou" ou "ficou devendo".

O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de

a) 6 acertos e 2 erros.
b) 5 acertos e 3 erros.
c) 4 acertos e 4 erros.
d) 3 acertos e 5 erros.
e) 2 acertos e 6 erros.

10) **(FGV)** Determine a raiz da equação $2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^x = 7$.

11) Determine o valor de x nas equações:

a) $2^{3x-2} . 8^{x+1} = 4^{x-1}$

b) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+7}$

12) **(FUVEST)** No sistema $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$, determine o valor de $x + y$.

13) Determine o produto dos números inteiros x e y que satisfazem a equação $2^x \cdot 3^{y-1} = \dfrac{18^y}{2}$.

14) **(UERJ)** Considere três elementos químicos cujos números atômicos são consecutivos e representados por x, y e z. Na equação $2^x + 2^y + 2^z = 7.16^4$, y é o número atômico de um elemento químico da família denominada:

a) alcalinos
b) halogênios
c) calcogênios
d) gases nobres

15) O número de colônias de bactérias de uma cultura colocada sob condições ideais t horas após o seu preparo é dado pela função $B(t) = 9^t - 2.3^t + 3$, sendo t um número natural. Qual o tempo mínimo necessário para que essa cultura alcance 66 colônias?

16) Uma siderúrgica passou por um programa de modernização. Verifica-se que o número n de toneladas de aço produzido mensalmente por ela, t meses após o início desse programa, pode ser calculado pela fórmula $n = 900 - 900.3^{-0,04t}$. Determine o tempo mínimo necessário para que essa siderúrgica alcance a produção mensal de 800 toneladas.

17) **(PUC)** A soma das soluções reais da equação $10^{x^2-9} = \dfrac{1}{1000}$ é:

a) $\sqrt{6}$
b) $-\sqrt{6}$
c) 0
d) 1
e) 2

18) **(PUC)** Quanto vale a soma de todas as soluções reais da equação abaixo?

$$(5x)^2 - 26.5^x + 25 = 0$$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

19) **(UERJ)** Considere uma folha de papel retangular que foi dobrada ao meio, resultando em duas partes, cada uma com metade da área inicial da folha, conforme as ilustrações.

Esse procedimento de dobradura pode ser repetido n vezes, até resultar em partes com áreas inferiores a 0,0001% da área inicial da folha.

Calcule o menor valor de n. Se necessário, utilize em seus cálculos os dados da tabela.

x	2^x
9	$10^{2,70}$
10	$10^{3,01}$
11	$10^{3,32}$
12	$10^{3,63}$

Gabarito

1) a) {7/4}
   b) {-5/2}
   c) {2;3}
   d) {3}
   e) {0}
   f) {4/15}
   g) {5/8}
   h) {-5}
   i) {1}
   j) {2}
   k) ϕ
   l) {4}
   m) {2/3}

2) 17/15

3) -3

4) 47

5) 0

6) d

7) 8

8) e

9) b

10) 2

11) a) -3/4
    b) {3}

12) 27

13) 2

14) b

15) 2 horas

16) 50 meses

17) c

18) c

19) 20

Anotações

Capítulo V

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Definição

É toda sucessão na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto de seu antecedente por uma constante **q**, chamada de razão.

Exemplos:

(2; 6; 18, ...) Razão: $q = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = 3$

(16; 8; 4, ...) Razão: $q = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(7; 7; 7, ...) Razão: $q = \frac{7}{7} = 1$

(3; –15; 75; –375) Razão: $q = \frac{-15}{3} = -5$

Classificação

Uma P.G. pode ser classificada em CRESCENTE, DECRESCENTE, ESTACIONÁRIA, ALTERNADA ou SINGULAR. Vamos analisar cada um dos casos a seguir.

1. P.G. CRESCENTE: Cada termo, a partir do segundo, é maior do que o seu antecedente. Uma P.G. será crescente em dois casos:

a) $a_1 > 0$ e $q > 1$

Exemplo:

(2, 10, 5, ...) → $a_1 = 2$ e $q = 5$

b) $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$

Exemplo:

(–12, –6, –3, ...) → $a_1 = -12$ e $q = ½$

2. P.G. DECRESCENTE: Cada termo, a partir do segundo, é menor do que seu antecedente. Uma P.G. será decrescente em dois casos:

a) $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$

Exemplo:

(36, 12, 4, ...) → $a_1 = 36$ e $q = 1/3$

b) $a_1 < 0$ e $q > 1$

Exemplo:

(–3, –12, –48, ...) → $a_1 = -3$ e $q = 4$

3. P.G. ESTACIONÁRIA ou CONSTANTE: Possui todos os termos não-nulos e iguais. Isto ocorre exclusivamente quando $q = 1$ e $a_1 \neq 0$.

Exemplo:

(7, 7, 7, ...) → $a_1 = 7$ e $q = 1$.

4. P.G. ALTERNADA ou NÃO MONÓTONA: Cada termo, a partir do segundo, possui sinal trocado em relação ao seu antecedente. Nesta caso basta que tenhamos $q < 0$ e $a_1 \neq 0$.

Exemplo:

(5, –10, 20, ...) → $a_1 = 5$ e $q = -2$.

5. P.G. SINGULAR: Há muita controvérsia com relação às P.Gs que possuem algum termo nulo, por isso o nome singular, que expressa um caso especial no estudo de P.Gs. Na realidade são dois os casos em que uma P.G. é singular.

a) $a_1 \neq 0$ e $q = 0$

Exemplo:

(3, 0, 0, ...) → $a_1 = 3$ e $q = 0$

b) $a_1 = 0$

Exemplo:

(0, 0, 0, ...) → $a_1 = 0$ e q indeterminada.

Termo Geral

Em uma P.G. de razão ***q*** cujo primeiro termo é a_1, o n-ésimo termo é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Exemplo:

Determine o 6º termo da progressão geométrica (2, 6, ...)

Solução:

$a_1 = 2$ $\quad q = \frac{6}{2} = 3$ $\quad n = 6$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_6 = 2 \cdot 3^{6-1}$ ∴ $a_6 = 486$

Propriedades das Progressões Geométricas

1. **"Em toda progressão geométrica cada termo, a partir do segundo, é média geométrica entre seu antecedente e seu consequente."**

(...; a_{n-1}; a_n; a_{n+1}; ...) → P.G.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\boxed{a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Exemplo:

A sequência (...; x; 6; 5x - 3;...) é uma P.G. Calcule x.

Solução:

Aplicando a 1ª propriedade:

$6^2 = x \cdot (5x - 3)$

$36 = 5x^2 - 3x$

$5x^2 - 3x - 36 = 0$

Resolvendo a equação obtemos:

$x = 3$ ou $x = -2,4$

2. **"Em toda P.G. limitada o produto de dois termos equidistantes dos extremos é sempre igual ao produto dos extremos, valendo o quadrado do termo central, quando este existe (quantidade ímpar de termos)".**

Exemplo:

Constate a validade desta propriedade no exemplo que se segue:

Termo central

(2; 4; 8; ⑯ ; 32; 34; 128)

Produto = 256

Produto = 256

3. "Dados os termos a_b, a_c, a_d, e a_e de uma P.G., se $b + c = d + e$, então $a_b \cdot a_c = a_d \cdot a_e$."

Com efeito, se $b + c = d + e = x$, temos que:

$a_b \cdot a_c = a_1 \cdot q^{b-1} \cdot a_1 \cdot q^{c-1} = a_1^2 \cdot q^{b+c-2} = a_1^2 \cdot q^{x-2}$

$a_d \cdot a_e = a_1 \cdot q^{d-1} \cdot a_1 \cdot q^{e-1} = a_1^2 \cdot a^{d+e-2} = a_1^2 \cdot q^{x-2}$

Portanto constatamos que

$a_b \cdot a_c = a_d \cdot a_e$

Exemplo:

Na P.G. $\left(\frac{3}{16}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots\right)$

$a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{3}{2}$, $a_9 = 48$ e $a_{10} = 96$.

Podemos observar que

$a_3 \cdot a_{10} = a_4 \cdot a_9$

$\frac{3}{4} \cdot 96 = \frac{3}{2} \cdot 48 = 72$

SOMA DOS TERMOS DA P.G. LIMITADA

A soma dos n primeiros termos de uma P.G. de razão *q* cujo primeiro termo é a_1 pode ser determinada através de duas fórmulas:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

Tais fórmulas são equivalentes, por isso cabe ao aluno optar por uma delas de acordo com os dados do exercício a ser resolvido.

Exemplo:
Determine a soma dos 10 primeiros termos da P.G. (3, 6, ...).

Solução:
Conferindo os dados:

$a_1 = 3$, $q = \frac{6}{3} = 2$ e $n = 10$, verificamos ser mais indicada

a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} \quad \therefore \quad S_{10} = 3069.$$

Limite da Soma dos Termos de Uma P.G. Ilimitada Decrescente

Se uma P.G. é ilimitada é impossível determinar o valor da soma de seus termos. Porém, se tal P.G. é decrescente, podemos obter uma aproximação bastante boa para esse somatório. Basta observar que à medida que o número de termos aumenta, os termos vão diminuindo, e daí, ao considerarmos infinitos termos, cada vez mais eles irão tendendo ao valor **ZERO**.

Assim, o chamado **LIMITE DA SOMA** é um valor para o qual a soma tende quando o "último termo" tende a zero. Então:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - a}$$

$$\lim S = \frac{0 \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1}$$

$$\boxed{\lim S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Exemplo:
Obter o limite da soma dos termos da P.G. (3, ¾, 3/16, ...)

Solução:

Dados do exercício: $a_1 = 3$ $q = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{4}$.

$$\lim S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 3 \cdot \frac{4}{3}$$

$\lim S = 4$

PRODUTO DOS TERMOS DE UMA P.G. LIMITADA

Considerando-se uma P.G. limitada $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, o produto dos seus n primeiros termos representados por P_n é dado por:

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$

$P_n = a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot q^{n-1}$

$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+\ldots+n-1}$

$$\boxed{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}$$

Há uma outra forma alternativa de determinar o módulo do produto:

$$\boxed{|P_n| = \sqrt{|a_1 \cdot a_n|^n}}$$

teste sua veracidade no exercício que se segue!

Exemplo:

Determine o produto dos 7 primeiros termos da P.G. (50, 25, ...).

Solução:

Dados do problema: $a_1 = 50$, $n = 7$ e $q = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$.

$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n \cdot (n-10)}{2}}$

$$P_7 = 50^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7 \cdot (7-1)}{2}} = 50^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = \frac{50^7}{2^{21}} =$$

$$= \frac{(2 \cdot 5^2)^7}{2^{21}} = \frac{2^7 \cdot 5^{14}}{2^{21}} = \frac{5^{14}}{2^{14}} \quad \therefore \quad P_7 = \left(\frac{5}{2}\right)^{14}$$

Exercícios

1) Determine o 10° termo da progressão geométrica $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$.

2) O nono termo de uma PG de razão 3, vale 486. Determine o valor do primeiro termo.

3) Determine a razão de cada uma das progressões geométricas abaixo em que são dados:

a) $a_7 = 5$ e $a_{12} = 160$
b) $a_5 + a_7 = 135$ e $a_2 + a_4 = 5$
c) $a_p = q$ e $a_q = p$

4) Determine o primeiro termo de uma progressão geométrica em que o segundo, o terceiro e o quarto termos são respectivamente iguais a $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{5}$.

5) Que número deve ser subtraído de 3; 5 e 11 para que os resultados fiquem em PG?

6) Os números x-1, x+1 e 4x+1 formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Calcule x.

7) Inserir quatro meios geométricos entre 32 e 243.

8) Determine a soma dos dez primeiros termos da PG (2, 4, ...).

9) Determine o valor da soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

10) Determine o valor de $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \cdots\right)$

11) Resolva as equações:

a) $\frac{3x}{5} + \frac{3x}{20} + \frac{3x}{80} + \cdots = 100$

b) $\frac{3m^3}{2} - \frac{3m^3}{4} + \frac{3m^3}{8} - \cdots = 216$

12) Determine o valor de $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}}$.

13) Determine o produto dos quinze primeiros termos da PG $(3^{-5,2}, 3^{-3,2}, 3^{-1,2}, \ldots)$.

14) Determine o primeiro termo de uma PG, de razão 5, cujo produto dos onze primeiros termos vale -5^{77}.

15) Determine o número de termos de uma PG, cujo produto dos termos é igual a 5^{253}, sabendo que o primeiro e o último termos valem, respectivamente, 5 e 5^{22}?

16) Sabe-se que em uma PG de 27 termos tem-se $a_{14} = 3$. Determine o valor da expressão $\frac{a_{24} \cdot a_8 \cdot a_{20} \cdot a_4}{9} + \frac{a_{11} \cdot a_{17}}{12}$.

17) Os números x, y, z e w formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Escreva o resultado da expressão $(y-z)^2 + (z-x)^2 + (w-y)^2$, sob a forma do quadrado da diferença de dois dentre os termos dessa sucessão.

18) João percebeu que, ao abrir a torneira ligada ao reservatório de água por 5 minutos, o volume diminuía para 1/5 da sua capacidade. A partir do reservatório totalmente cheio, deixou-se a torneira aberta durante 20 minutos e verificou-se que o volume de água era de 0,12 m^3 Qual a capacidade total desse reservatório?

19) Uma bola é lançada verticalmente de encontro ao solo de uma altura h. Cada vez que bate no solo ela sobe até a metade da altura de que caiu. Determine o comprimento total percorrido pela bola em sua trajetória até atingir o repouso.

20) **(PUC)** Vamos empilhar 5 caixas em ordem crescente de altura. A primeira caixa tem 1 m de altura, cada caixa seguinte tem o triplo da altura da anterior. A altura da nossa pilha de caixas será:

a) 121 m
b) 81 m
c) 32 m
d) 21 m
e) 15 m

21) **(PUC)** A sequência (2, x, y, 8) representa uma progressão geométrica. O produto xy vale:

a) 8
b) 10
c) 12
d) 14
e) 16

22) **(PUC)** Os termos da soma S = 4 + 8 + 16 + ... + 2048 estão em progressão geométrica.

Assinale o valor de S.

a) 4092
b) 4100
c) 8192
d) 65536
e) 196883

23) **(UERJ)** Em 1965, o engenheiro Gordon Moore divulgou em um artigo que, a cada ano, a indústria de eletrônicos conseguiria construir um processador com o dobro de transistores existentes no mesmo processador no ano anterior. Em 1975, ele atualizou o artigo, afirmando que, de fato, a quantidade de transistores dobraria a cada dois anos. Essa última formulação descreve uma progressão que ficou conhecida como Lei de Moore e que permite afirmar que um processador que possuía 144×10^2 transistores em 1975 evoluiu para um processador com 288×10^2 transistores em 1977.

Admitindo um processador com 731×10^6 transistores em 2009, calcule a quantidade de transistores que a evolução desse processador possuirá em 2019, segundo a Lei de Moore.

24) **(UERJ)** Em uma atividade nas olimpíadas de matemática de uma escola, os alunos largaram, no sentido do solo, uma pequena bola de uma altura de 12 m. Eles observaram que, cada vez que a bola toca o solo, ela sobe e atinge 50% da altura máxima da queda imediatamente anterior.

Calcule a distância total, em metros, percorrida na vertical pela bola ao tocar o solo pela oitava vez.

25) **(ENEM)** A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

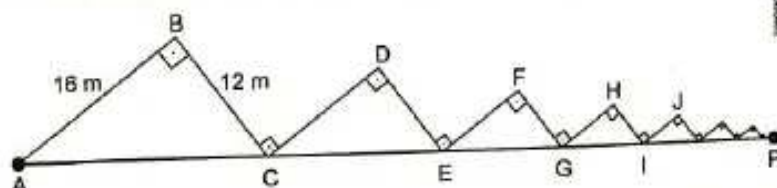
Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

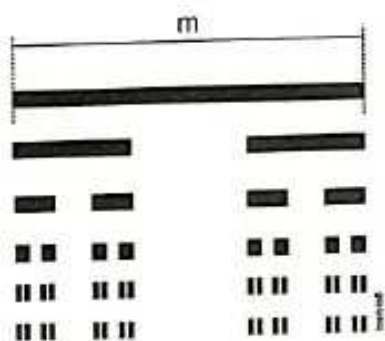
Disponível em: www.saladeimprensa.ibge.gov.br. Acesso em: 31 jul. 2013.

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020.

Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de

a) 1,14.
b) 1,42.
c) 1,52.
e) 1,70.
e) 1,80.

26) **(ESPM)** A figura abaixo mostra a trajetória de um móvel a partir de um ponto A, com $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{EF}$, $\overline{FG} = \overline{GH}$, $\overline{HI} = \overline{IJ}$ e assim por diante.

Considerando infinita a quantidade desses segmentos, determine a distância horizontal AP alcançada por esse móvel.

27) Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original. Em muitos casos, um fractal é gerado pela repetição indefinida de um padrão. A figura abaixo segue esse princípio. Para construí-la, inicia-se com uma faixa de comprimento m na primeira linha. Para obter a segunda linha, uma faixa de comprimento m é dividida em três partes congruentes, suprimindo-se a parte do meio. Procede-se de maneira análoga para a obtenção das demais linhas, conforme indicado na figura.

Se, partindo de uma faixa de comprimento m, esse procedimento for efetuado infinitas vezes, quanto vale a soma das medidas dos comprimentos de todas as faixas?

28) Um investidor aplicou R$ 1 000 000,00 em um fundo de ações que lhe rende 10% de lucro anualmente. Ao fim de seis anos, qual o montante produzido pelo capital investido?

29) Se o investidor do exercício anterior tivesse aplicado a mesma quantia durante o mesmo tempo em ações que desvalorizam 10% ao ano, qual seria seu novo montante após o referido intervalo de tempo?

30) **(UERJ)** Um capital de C reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de R$ 53240,00.

Calcule o valor, em reais, do capital inicial C.

31) **(FUVEST)** Um país contraiu em 1 829 um empréstimo de 1 milhão de dólares, para pagar em cem anos, à taxa de juros de 9% ao ano. Por problemas de balança comercial, nada foi pago até hoje, e a dívida foi sendo "rolada", com capitalização anual dos juros. Qual dos valores a seguir está mais próximo do valor da dívida em 1 989?

(Para os cálculos, adote 1,09...)

a) 14 milhões de dólares
b) 500 milhões de dólares
c) 1 bilhão de dólares
d) 80 bilhões de dólares
e) 1 trilhão de dólares

32) Determine a razão da PG em que a soma dos n primeiros termos é dado pela expressão $3^{n+1} - 3$.

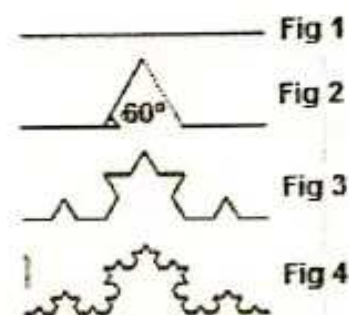
33) A soma de três números que formam uma PG crescente é 19 e, se subtrairmos 1 do primeiro, sem alterar os outros dois, eles passam a constituir uma PA. Quanto vale a diferença entre a soma dos dois primeiros números e o terceiro?

34) **(PUC)** De acordo com a disposição dos números abaixo,

2
4 6
8 10 12
16 18 20 22
32 34 36 38 40
... ...

A soma dos elementos da décima linha vale:

a) 2 066
b) 5 130
c) 10 330
d) 20 570
e) 20 660

35) **(UNICAMP)** Para construir uma curva "floco de neve", divide-se um segmento de reta (Figura 1) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60°, e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na Figura 2. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas Figuras 3 e 4.

Se o segmento inicial mede 1 cm, o comprimento da curva obtida na sexta figura é igual a

a) $\left(\frac{6!}{4!\ 3!}\right)$cm

b) $\left(\frac{5!}{4!\ 3!}\right)$cm

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^5$ cm

d) $\left(\frac{4}{3}\right)^6$ cm

36) Em 2 003, a população de marlim-azul foi reduzida a 20% da existente em 1953. Considerando que foi constante, nesse período, a razão anual de decréscimo, conclui-se que a população de marlim-azul, em 1 978, ficou reduzida a aproximadamente:

a) 10% da população existente em 1 953.
b) 20% da população existente em 1 953.
c) 30% da população existente em 1 953.
d) 45% da população existente em 1 953.
e) 65% da população existente em 1 953.

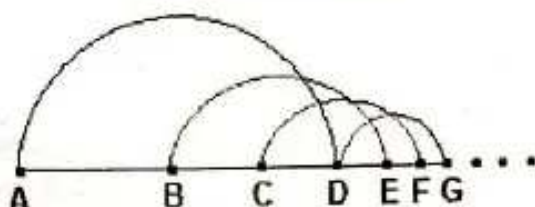
37) Certa vez um garoto disse a seu pai que tinha inventado um número muito grande. Indagado sobre o valor desse número, que foi chamado de mictilhão, o garoto respondeu: "Como o milhão é 1, o bilhão é 2 e o trilhão é 3, o mictilhão é 1 000.". De acordo com a explicação do menino, é possível concluir que 1 mictilhão é igual a:

a) $10^{3\,300}$
b) $10^{3\,030}$
c) $10^{3\,003}$
d) $10^{3\,001}$
e) $10^{1\,003}$

38) **(FUVEST)** Sabe-se sobre a progressão geométrica a_1, a_2, a_3, ..., que $a_1 > 0$ e $a_6 = -9\sqrt{3}$. Além disso, a progressão geométrica a_1, a_5, a_9, ... tem razão igual a 9. Determine o valor do produto $a_2 \cdot a_7$.

39) **(UNICAMP)** Por norma, uma folha de papel A4 deve ter 210mm x 297mm. Considere que uma folha A4, com 0,1mm de espessura, é seguidamente dobrada ao meio, de forma que a dobra é sempre perpendicular à maior dimensão resultante até a dobra anterior.

a) Escreva a expressão do termo geral da progressão geométrica que representa a espessura do papel dobrado em função do número k de dobras feitas.
b) Considere que, idealmente, o papel dobrado tem o formato de um paralelepípedo. Nesse caso, após dobrar o papel seis vezes, quais serão as dimensões do paralelepípedo?

40) **(UERJ)** A figura a seguir mostra um molusco Triton tritoris sobre uma estrela do mar. Um corte transversal nesse molusco permite visualizar, geometricamente, uma sequência de semicírculos. O esquema abaixo indica quatro desses semicírculos.

Admita que as medidas dos raios formem uma progressão tal que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = ...$

Assim, considerando $\overline{AB} = 2$, a soma $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + ...$ será equivalente a

a) $2+\sqrt{3}$
b) $2+\sqrt{5}$
c) $3+\sqrt{3}$
d) $3+\sqrt{5}$

41) **(FUVEST)** Para n inteiro positivo, o valor da soma S=9+99+999+...+99...9, considerando que o último termo dessa sequência possua exatamente n algarismos, é igual a:

a) $\frac{10^n - 10 - 9n}{9}$

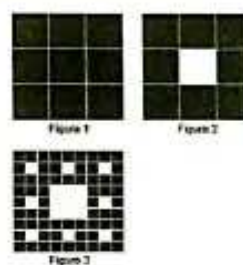
b) $\frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$

c) $\frac{10^{n-1} + 10 - 9n}{9}$

d) $\frac{10^n - 10 + 9n}{9}$

e) $\frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$

42) **(ENEM)** Uma maneira muito útil de se criar belas figuras decorativas utilizando a matemática é pelo processo de autossemelhança, uma forma de se criar fractais. Informalmente, dizemos que uma figura é autossemelhante se partes dessa figura são semelhantes à figura vista como um todo. Um exemplo clássico é o Carpete de Sierpinski, criado por um processo recursivo, descrito a seguir:

- Passo 1: Considere um quadrado dividido em nove quadrados idênticos (Figura 1). Inicia-se o processo removendo o quadrado central, restando 8 quadrados pretos (Figura 2).
- Passo 2: Repete-se o processo com cada um dos quadrados restantes, ou seja, divide-se cada um deles em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um, restando apenas os quadrados pretos (Figura 3).
- Passo 3: Repete-se o passo 2.

Admita que esse processo seja executado 3 vezes, ou seja, divide-se cada um dos quadrados pretos da Figura 3 em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um deles.

O número de quadrados pretos restantes nesse momento é

a) 64.
b) 512.
c) 568.
d) 576.
e) 648.

43) **(UERJ)** Em um recipiente com a forma de um paralelepípedo retângulo com 40 cm de comprimento, 25 cm de largura e 20 cm de altura, foram depositadas, em etapas, pequenas esferas, cada uma com volume igual a $0,5\ cm^3$. Na primeira etapa, depositou-se uma esfera; na segunda, duas; na terceira, quatro; e assim sucessivamente, dobrando-se o número de esferas a cada etapa.

Admita que, quando o recipiente está cheio, o espaço vazio entre as esferas é desprezível.

Considerando $2^{10} = 1000$, o menor número de etapas necessárias para que o volume total de esferas seja maior do que o volume do recipiente é:

a) 15
b) 16
c) 17
d) 18

44) **(UNIGRANRIO)** O quinto termo da sequência $\left(\sqrt[3]{4}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \ldots\right)$, é:

a) $\sqrt[4]{2}$
b) $\sqrt[5]{2}$
c) $\sqrt[6]{2}$
d) $\sqrt[7]{2}$
e) 1

45) **(UNIGRANRIO)** Considerando a progressão geométrica (2, x, y, 2662), pode-se afirmar que y – x é igual a:

a) 200
b) 240
c) 210
d) 230
e) 220

46) **(UNIGRANRIO)** Seja $S = x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \frac{x}{64} + \frac{x}{256} + \cdots$.

Para que S seja igual a 28, o valor de x deve ser igual a:

a) 22
b) 24
c) 18
d) 20
e) 21

47) Para que a sequência $(-9, -5, 3)$ se transforme numa progressão geométrica, devemos somar a cada um dos seus termos certo número. Esse número é

a) par.
b) quadrado perfeito.
c) primo.
d) maior do que 15.
e) não inteiro.

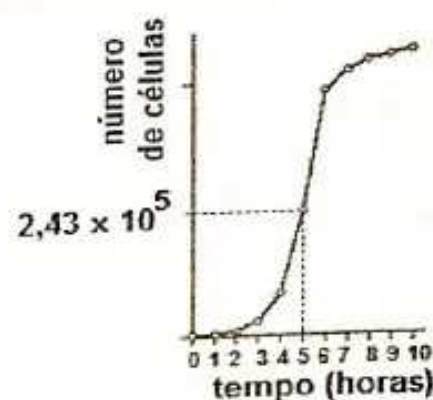
48) Sendo $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}$, onde n é um número natural não nulo, determine o menor valor de n para o qual $S_n > \frac{4}{9}$.

49) Em uma população, a cada ano, 10% dos seus indivíduos sadios desenvolvem tuberculose. Se essa população tinha inicialmente 100.000 indivíduos sadios, após quantos anos, exatamente, 40.951 indivíduos desenvolveram tuberculose?

50) Determine o valor de $\cot g\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \cdots\right)$.

51) A sequência (a_n), com $n \geq 1$, tem seus termos dados pela fórmula $a_n = \frac{n+1}{2}$. Calcule a soma dos dez primeiros termos da sequência (b_n), com $n \geq 1$, onde $b_n = 2^{a_n}$.

52) Em um rebanho de 15 000 reses, uma foi infectada pelo vírus "mc1". Cada animal infectado vive dois dias, ao final dos quais infecciona outros três animais. Se cada rês é infectada uma única vez, em quanto tempo o "mc1" exterminará a metade do rebanho?

53) **(UERJ)** Para analisar o crescimento de uma bactéria, foram inoculadas 1×10^3 células a um determinado volume de meio de cultura apropriado. Em seguida, durante 10 horas, em intervalos de 1 hora, era medido o número total de bactérias nessa cultura. Os resultados da pesquisa estão mostrados no gráfico abaixo.

Nesse gráfico, o tempo 0 corresponde ao momento do inoculo bacteriano. Observe que a quantidade de bactérias presentes no meio, medida a cada hora, segue uma progressão geométrica até 5 horas.

O número de bactérias encontrado no meio de cultura 3 horas após o inoculo, expresso em milhares, é igual a:

a) 16
b) 27
c) 64
d) 105

54) Uma pilha de latas de leite está exposta em um supermercado, em forma de pirâmide de base triangular, como mostra a figura.

Para montar uma pirâmide semelhante, um promotor de vendas usou 5 caixas contendo 24 latas cada uma. Cada lata mede 15 cm de altura. Observe que, do topo para a base da pirâmide, a quantidade de latas é 1, 3, 6 e assim sucessivamente.

a) Essa sequência é uma progressão geométrica?
b) Essa sequência é uma progressão aritmética?
c) Determine a altura da pirâmide formada pelo promotor de vendas.

55) O vazamento dos dutos de uma plataforma de perfuração de petróleo provocou, no mar, uma mancha de óleo, em forma circular, cujo diâmetro, no primeiro dia, atingiu 2 metros. Os técnicos só conseguiram tomar providências após um mês, tendo por dia o raio da mancha aumentado 1/5 do aumento verificado no dia anterior. No final do décimo dia após o início do processo, qual era a medida do raio da mancha?

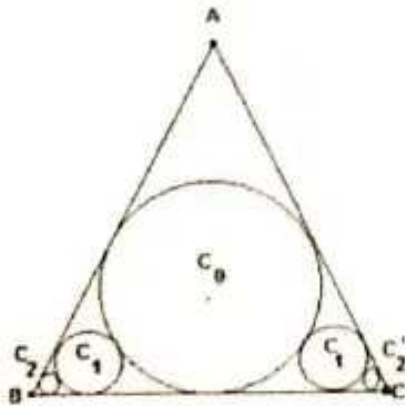
a) $\dfrac{5^9 - 1}{4.5^8}$

b) $\dfrac{5^{10} - 1}{4.5^9}$

c) $\dfrac{5^{10} - 1}{2.5^9}$

d) $\dfrac{5^9 - 1}{2.5^8}$

e) $2.\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}$

56) Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1. Considere um círculo C_0 inscrito em ABC e, em seguida, construa um círculo C_1 tangente a C_0, AB e BC e outro círculo C'_1 também tangente a C_0, BC e AC. Continue construindo infinitos círculos C_n tangentes a C_{n-1}, AB e BC. Faça o mesmo para os círculos C'_n também tangentes a C'_{n-1}, BC e AC. A seguir, a figura representa um exemplo com cinco círculos.

Determine a soma dos comprimentos das infinitas circunferências assim formadas.

Gabarito

1) 192
2) 2/27
3) a) 2　b) 3　c) $\sqrt[q-p]{\dfrac{p}{q}}$
4) 1
5) 2
6) -1/3 ou 2
7) 48, 72, 108 e 162
8) 2046
9) 2
10) -1
11) a) {125}　b) {6}
12) x
13) 3^{132}
14) -25
15) 22
16) 39/4
17) $(x-w)^2$ ou $(w-x)^2$
18) 75 000 L
19) 3h
20) a
21) e
22) a
23) 23 392 000 000
24) 36 m
25) c
26) 80 m
27) 3m
28) R$ 1 771 561,00
29) R$ 531 441,00
30) R$ 40 000,00
31) e
32) 3
33) 1
34) c
35) c
36) d
37) c
38) $-27\sqrt{3}$
39) a) $0{,}1.2^n$ mm
b) 37,1
40) d
41) e
42) b
43) b
44) e
45) e
46) e
47) c
48) 3
49) 5
50) $-\sqrt{3}/3$
51) $62\left(\sqrt{2}+1\right)$
52) 18
53) b
54) a) Não
b) Sim, de 2ª ordem
c) 1,2 m
55) b
56) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

Anotações

Capítulo VI

LOGARITMOS

Definição

O logaritmo de um número real positivo **N** em uma base **b** real positiva e diferente de **1** é igual a x se e somente se $b^x = N$

Simbolicamente:

$$\boxed{\log_b^N = x \Rightarrow b^x = N} \longrightarrow$$

N – antilogaritmo ou logaritmando
b – base
x – logaritmo

Exemplos:

1) $\log_3^9 = 2$, pois $3^2 = 9$

2) $\log_5^{1/5} = -1$, pois $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) **Logaritmo decimal** é aquele dado na base 10. Na representação do logaritmo decimal é opcional a indicação da base.

$$\boxed{\log_{10}^N = \log^N}$$

Exemplo: $\log_{10}^3 = \log^3$

b) **Logaritmo neperiano**, **natural** ou **hiperbólico** é aquele que tem como base o número irracional e = 2,7182..., conhecido como base de Neper.

$$\boxed{\log_e^N = \ln N}$$

Exemplo: $\log_e^7 = \ln 7$

c) **Cologaritmo** é o simétrico do logaritmo.

$$\boxed{\text{colog}_b^N = -\log_b^N}$$

Exemplo: $\text{colog}_2^{32} = -\log_2^{32}$

d) O logaritmo de 1 em qualquer base é zero.

Exemplo: $\log_{174}^1 = 0$

e) Quando o antilogaritmo é igual à base, o logaritmo vale 1.

Exemplo: $\log_c^c = 1$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

Logaritmo de um produto

"O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores."

$$\boxed{\log_b(A \cdot B) = \log_b^A + \log_b^B}$$

Exemplo:

$$\log_5^6 = \log_5(2 \cdot 3) = \log_5^2 + \log_5^3$$

Logaritmo de um quociente

"O logaritmo de um quociente é igual à diferença entre os logaritmos do dividendo e divisor."

$$\boxed{\log_b \frac{A}{B} = \log_b^A - \log_b^B}$$

Exemplo: $\log_3^{0,7} = \log_3^{\frac{7}{10}} = \log_3^7 - \log_3^{10}$

Logaritmo de uma potência

"O logaritmo de uma potência é o logaritmo da base, multiplicado pelo expoente."

$$\boxed{\log_b A^n = n \cdot \log_b^A}$$

Exemplo: $\log_2^{125} = \log_2 5^3 = 3\log_2^5$

Logaritmo de uma raiz

"O logaritmo de uma raiz é o logaritmo do radicando, dividido pelo índice do radical."

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{\log_b^A}{n}}$$

Exemplo: $\log_2 \sqrt[5]{3} = \dfrac{\log_2^3}{5}$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Às vezes, a complexidade de uma questão é aparente, desde que saibamos o caminho a seguir. Cabe-nos ressaltar a importância da igualdade abaixo:

$$\boxed{b^{\log_b^N} = N}$$

Demonstração:

Sendo $\log_b^N = x$(I), temos, pela definição de logaritmo, que $b^x = N$ (II). Substituindo-se (I) em (II):

$$b^{\log_b^N} = N$$

Exemplo: $\pi^{\log_\pi^{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$

Mudança de base

Em muitos casos, é dado o logaritmo de um número em uma certa base e é pedido o logaritmo desse número em outra base. Assim, torna-se necessária a mudança de base.

$$\textbf{Sendo } \log_b^N = x \rightarrow b^x = N(\text{I})$$

Supondo-se a necessidade de passarmos o logaritmo de base *b* usada até aqui para uma outra base *a*, apliquemos em (I) o logaritmo nesta base *a* em ambos os membros:

$$\log_a b^x = \log_a^N$$

Pela 3ª propriedade operatória:

$$x \log_a^b = \log_a^N$$

$$x = \frac{\log_a^N}{\log_a^b}, \quad \text{ou seja} \quad \log_b^N = \frac{\log_a^N}{\log_a^b}$$

Exemplos:

1) Escreva $\log_3^5$ na base 2.

Solução: $\log_3^5 = \dfrac{\log_2^5}{\log_2^3}$

2) Simplifique a expressão $\dfrac{\log_4^7}{\log_4^3}$

Solução: $\dfrac{\log_4^7}{\log_4^3} = \log_3^7$

Relações Importantes

a) $\log_b^a = \dfrac{1}{\log_a^b}$

b) $\log_{b^n}^{a^n} = \log_b^a$

c) $\log_{b^n}^a = \dfrac{\log_b a}{n}$

> **NOTA:** Tente demonstrar estas relações. Todas são dedutíveis através da mudança de base.

Exemplos:

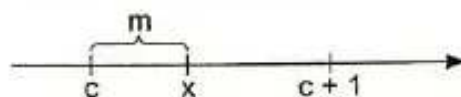
1) Sendo $\log_5^3 = x$, então $\log_3^5 = \dfrac{1}{x}$

2) Se $\log_{10}^3 = 0,4771$, então $\log_{1000}^{27} = \log_{10^3}^{3^3} = 0,4771$

3) Se $\log_{10}^2 = 0,3010$, então $\log_{100}^2 = \log_{10^2}^2 =$

$= \dfrac{0,3010}{2} = 0,1505$

Característica e Mantissa

Todo número real x pode ser localizado na reta numerada entre dois números inteiros consecutivos, excetuando-se o caso em que x já é inteiro. Supondo o caso mais geral, o número x se encontra entre os inteiros c e c + 1:

Podemos observar que x = c + m.

O número c é a **característica** de x e definida como sendo o maior número inteiro que é menor ou igual a x. Já o número m é a **mantissa** de x, sendo um número real não negativo menor do que 1 e pode ser calculada através da diferença entre x e c.

$$m = N - c$$

Exemplos:

Determine a característica e a mantissa dos números abaixo:

1) 7,493 $\begin{cases} c = 7 \\ m = 7,493 - 7 = 0,493 \end{cases}$

2) −5,1478 $\begin{cases} c = -6 \\ m = -5,1478 - (-6) = 0,8522 \end{cases}$

3) 11 $\begin{cases} c = 11 \\ m = 11 - 11 = 0 \end{cases}$

Como a mantissa m é um número real tal que sua parte inteira será sempre nula, a partir de agora vamos associar a mantissa à sua parte decimal.

Número Preparado

Um número será chamado de preparado, quando está escrito na forma *c, m*, onde c é sua característica e *m* é sua mantissa.

Exemplos:

Preparar os números:

1) 3,819 $\begin{cases} c = 3 \\ 3,819 - 3 = 0,819 \\ m = 819 \end{cases}$

$\underbrace{3,819}_{\text{n° dado}} = \underbrace{3,819}_{\text{n° preparado}}$

> **NOTA:** Todo número positivo já está preparado.

2) −7,246 $\begin{cases} c = -8 \\ -7,246 - (-8) = 0,754 \\ m = 754 \end{cases}$

$\underbrace{-7,246}_{\text{n° dado}} = \underbrace{\bar{8},754}_{\text{n° preparado}}$

Note que $\bar{8},754 = -8 + 0754 = -7,246$

3) −0,8471 $\begin{cases} c = -1 \\ -0,8471 - (1) = 0,1529 \\ m = 1529 \end{cases}$

$-0,8471 = \bar{1},1529$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Quando o número real dado é negativo, sua característica é negativa, porém sua mantissa nunca será negativa, como visto anteriormente. Portanto, para escrever tal número na forma preparada, devemos colocar a característica (negativa) ao lado da mantissa (não negativa) e para não confundir, indicamos o sinal negativo da característica colocando-se uma barra sobre ela, já que se colocássemos o sinal negativo na frente do número, teríamos a impressão de que todo número seria negativo, o que não corresponderia à realidade, pois, reiterando, a mantissa não é negativa. Cabe ressaltar que a forma preparada de um número real negativo não é um número real, posto que qualquer número real ou é positivo, ou é negativo ou é nulo. Neste caso, a forma preparada serve, tão somente, para uma amostragem explícita da característica e mantissa, sem a necessidade de cálculos prévios de seus valores.

Característica e Mantissa do Logaritmo Decimal

Seja obter a característica de log N. Temos dois casos a considerar:

1° caso: N > 1

Se N possui K algarismos na sua parte inteira, a característica de seu logaritmo decimal será **K − 1**.

Exemplos:

1) $\log \overline{37{,}583} \xrightarrow{\text{2 algarismos}} c = 2 - 1 = 1$

2) $\log \overline{4\,583{,}21} \xrightarrow{\text{4 algarismos}} c = 4 - 1 = 3$

3) $\log \overline{6{,}195} \xrightarrow{\text{1 algarismos}} c = 1 - 1 = 0$

2º caso: $0 < N < 1$

Se N possui K zeros antecedendo seu primeiro algarismo significativo, a característica de seu logaritmo decimal será –K.

Exemplos:

1) $\log \overline{0{,}0057} \xrightarrow{\text{3 zeros}} c = -3$

2) $\log \overline{0{,}18} \xrightarrow{\text{1 zero}} c = -1$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

1) No caso de logaritmos decimais, as mantissas são dadas através da tábua de logaritmos, não cabendo ao aluno sabe-las de cor.

2) São iguais as mantissas dos logaritmos decimais de números que diferem pela posição da vírgula ou pela quantidade de zeros à direita dos números.

Exemplos:

Sabendo que log 637 = 2,8041, observe os valores dos seguintes logaritmos:

1) $\log 63{,}7 = 1{,}8041$

2) $\log 6370000 = 6{,}8041$

3) $\log 0{,}637 = \bar{1}{,}8041$

4) $\log 0{,}00637 = \bar{3}{,}8041$

Exercícios

1) Considere as aproximações $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$. Determine os valores de:

a) log16
b) log36
c) log1,5
d) $\log \sqrt[4]{3}$
e) colog6
f) log5

2) Determine os valores de x em:

a) $\log_2^{(x-5)} = 3$
b) $\log_x^{(5x-4)} = 2$
c) $\text{co}\log_3^{(2x+5)} = 4$
d) $\text{anti}\log_5^{2} = 4x+1$
e) $\log_{81}^{(\log_3^x)} = \frac{1}{4}$

3) Na equação $3^{\log_3^x} = 9$, determine o valor de x.

4) Determine o valor da expressão E = [illegible] $+ \log_3^{24} \cdot \log$ [illegible].

5) Calcule o valor de x na equação $x = 3^{\log_3^{[illegible]}}$.

6) Determine os valores de x nas equações:

a) $\log_3^x = \log_3^4 + \log_3^7 - \log_3^{[illegible]}$
b) $\log_a^x = \log_a^3 - \log_a^{(x+2)}$
c) $\log_2^{(x+1)} + \log_2^{(3x+7)} = 2\log_2^{(2x+2)} - 1$

7) Sendo $A = \frac{1024}{\sqrt[3]{256}}$, determine o valor de $\log_2^A$.

8) A sequência $\left[\log_2^{x}, \log_2^{(x+9)}, \log_2^{(x+7)}\right]$ é uma progressão aritmética. Determine o valor de x.

9) Determine o valor de
$\log(\text{cotg}1^\circ) + \log(\text{cotg}2^\circ) + \cdots + \log(\text{cotg}89^\circ)$.

10) Determine o valor da expressão
$E = \log_5^6 \cdot \log_6^7 \cdot \log_7^5 \cdot \log_2^{[illegible]} + 4^{\log_2^{[illegible]}}$.

11) Em que base o logaritmo de ¼ é -2?

12) Determine o valor de x na equação $\log_3^{4^{2x-1}} \cdot \log_4^3 = 5$.

13) Resolva as equações:

a) $3^{x-4} = 25$
b) $2^{3x-5} = 7$

14) Calcule o valor de $1 + \log_2^{(\text{sen}22^\circ30')} + \log_2^{(\cos 22^\circ30')}$.

15) Sendo $\frac{1+\log_a^b}{1-\log_{a^2}^b} = 4$, determine o valor da expressão $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

16) Em que base cada número real positivo tem como logaritmo o quádruplo de seu logaritmo decimal?

17) Quanto vale a razão entre os logaritmos de 729 e 9 em qualquer base real positiva e diferente de 1?

18) Se o logaritmo de 100 na base b é 16, determine o valor do logaritmo decimal de b.

19) Calcule o valor de x na equação $\log_3^{\sqrt[4]{x}} + \log_9^{\sqrt{x}} + \log_{81}^{x} = \frac{3}{4}$

20) Resolva o sistema $\begin{cases} 5^{x+1} = \frac{1}{5^{y-5}} \\ \log_3^{(2x+3y)} = 2 \end{cases}$.

21) Determine o domínio da função real, de variável real $f(x) = \log\left(\frac{x^2-4x+3}{x+2}\right)$.

22) Se log2 = k e log3 = s, determine o valor de x, em função de k e s, na equação $1000^{3x} = \sqrt{75}$.

23) Se $\log\sqrt{a} = 1{,}236$, determine o valor de $\log\sqrt[3]{a}$.

24) Se 5 números reais positivos distintos, p, q, r, s e t formam, nesta ordem, uma progressão geométrica, o valor da expressão log p + log q + log s + log t equivale a:

a) logr
b) 2logr
c) 3logr
d) 4logr

25) Sendo a > 0 e a ≠ 1, que valores reais de x satisfazem à igualdade $10^{\log_a^{(x^2-5x+2)}} = 6^{\log_a^{10}}$?

26) Qual valor assume a expressão $3^x + 3^{-x}$, quando consideramos que $x = \log_3^2$?

27) Determine o valor de x + y, considerando que x e y são números reais positivos tais que $\log_3^{(\log_2^x)} = \log_4^{(\log_3^y)} = 0$.

28) Sabendo que $2 \cdot \log_3^x + 1 = 0$, , determine o valor de $\log_{1/9}^x$.

29) Considerando que $\log_2^3 = x$, determine o valor de $\log_{\frac{1}{8}}^{\sqrt[3]{12}}$.

30) Quanto vale a soma dos valores reais de x que verificam a igualdade $\log_4^x + \log_x^4 = \frac{5}{2}$?

31) Há números em que, para cada um deles, o quadrado do logaritmo decimal é igual ao logaritmo decimal do seu respectivo quadrado. Quanto vale a soma dos números reais que satisfazem essa igualdade?

32) Abaixo temos uma pequena tabela de logaritmos na base m:

x	10	20	30	40	50
$\log_m x$	1,431	1,861	2,113	2,292	2,431

Determine o valor de m.

33) **(PUC)** Coloque em ordem crescente os números $p = \log_3^2, q = \log_{\sqrt{3}}^4$ e $r = \log_{1/3}^{\sqrt{2}}$.

34) **(PUC)** Seja x = $\log_2 3 + \log_2 9 + \log_2 27$. Então, é correto afirmar que:

a) $6 \leq x < 7$
b) $7 \leq x < 8$
c) $8 \leq x < 9$
d) $9 \leq x < 10$
e) $x \geq 10$

35) **(PUC)** Se $\log_{1/2} x = -3$, então $\sqrt[3]{x} + x^2$ vale:

a) 3/4
b) 6
c) 28
d) 50
e) 66

36) **(UERJ)** Uma calculadora tem duas teclas especiais, A e B. Quando a tecla A é digitada, o número que está no visor é substituído pelo logaritmo decimal desse número. Quando a tecla B é digitada, o número do visor é multiplicado por 5.

Considere que uma pessoa digitou as teclas BAB, nesta ordem, e obteve no visor o número 10.

Nesse caso, o visor da calculadora mostrava inicialmente o seguinte número:

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50

37) **(UERJ)** Considere a equação:

$$(\log_2^x)^2 - \log_{\sqrt[3]{2}}^x = 0$$

Um aluno apresentou o seguinte desenvolvimento para a

$$(\log_2^x)^2 = \log_{\sqrt[3]{2}}^x$$

$$(\log_2^x)^2 = 3\log_2^x$$

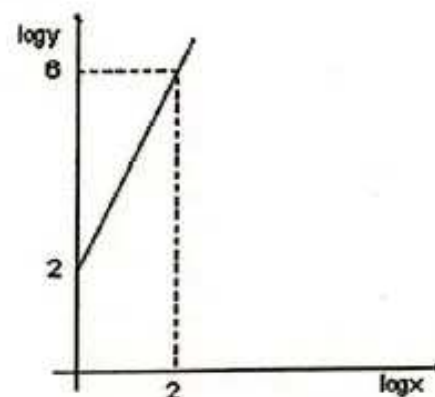
$$\log_2^x = 3$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

$$S = \{8\}$$

O conjunto-solução encontrado pelo aluno está incompleto. Resolva a equação e determine corretamente o seu conjunto-solução.

38) Sejam x e y duas quantidades. O gráfico abaixo expressa a variação de logy em função de logx, onde log é o logaritmo na base decimal.

Determine uma relação entre x e y que não envolve a função logaritmo.

39) Na tabela abaixo, a primeira coluna é formada por números N e a segunda coluna pelas respectivas mantissas de seus logaritmos decimais.

N	MANTISSAS
540	73239
541	73319
542	73400
543	73480
544	73560
545	73640
546	73719
547	73799
548	73878

Determine os valores de:

a) log 541
b) log 54 000
c) log 54,7
d) log 0,00548
e) log 5,43
f) log 0,00000546
g) colog 542
h) colog 0,000545

40) **(PUC)** Sabendo-se que $\log_{10}^3 \cong 0{,}47712$, , determine a quantidade de algarismos de 9^{25}.

41) **(ENEM)** Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

solução dessa equação:

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br.
Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

a) $E_1 = E_2 + 2$
b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$
c) $E_1 = 10^{\frac{3}{4}} \cdot E_2$
d) $E_1 = 10^7 \cdot E_2$
e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

42) **(ENEM)** Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.

Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

a) 22.
b) 50.
c) 100.
d) 200.
e) 400.

43) Ana e Bia participam de um site de relacionamentos. No dia 1º de abril do corrente ano, elas notaram que Ana tinha exatamente 128 vezes o número de amigos de Bia. Ana informou que, para cada amigo que tinha no final de um dia, três novos amigos entravam para a sua lista no dia seguinte. Já Bia disse que, para cada amigo que tinha no final de um dia, cinco novos amigos entravam para a sua lista no dia seguinte. Suponha que nenhum amigo deixe as listas e que o número de amigos aumente, por dia, conforme elas informaram.

(A) No dia 2 de abril desse ano, vinte novos amigos entraram para alista de Bia. Quantos amigos havia na lista de Ana no dia 1º de abril?

(B) Determine a partir de que dia o número de amigos de Bia passa a ser maior do que o número de amigos de Ana.

Se precisar, use $1{,}584 < \log_2^3 < 1{,}585$.

44) Devido à inflação, os habitantes de certo país pagam hoje por um produto a mesma quantia com que compravam, há dois anos e meio, 17 unidades do mesmo produto. Qual foi a taxa média mensal da inflação durante esse período?

Para resolver este problema, pode ser útil a seguinte tabela de logaritmos decimais:

Número	Logaritmo
1,1	0,041
1,2	0,079
1,3	0,114
1,4	0,146
1,5	0,176
1,6	0,204
1,7	0,230
1,8	0,255
1,9	0,278

45) **(UNIGRANRIO)** Sabendo que $\log_2^3 = p$ e $x = \log_7^2$, pode-se afirmar que $\log_7^{\left(\frac{?}{2^?}\right)}$ é igual a:

a) $\frac{p+1}{q} + 3$

b) $\frac{p-1}{q} - 1$

c) $\frac{p+1}{q} - 1$

d) $\frac{p+1}{q} - 3$

e) $\frac{p+1}{q}$

46) **(ENEM)** A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}^{M_0}\,.$$

onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina×cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.

Disponível em: http://earthquake.usgs.gov.
Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado)

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina×cm)?

a) $10^{-5{,}10}$
b) $10^{-0{,}73}$
c) $10^{12{,}00}$
d) $10^{21{,}65}$
e) $10^{27{,}00}$

47) **(ENEM)** Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \times (2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

(Considere 0,3 como aproximação para o logaritmo decimal de 2 .)

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27
b) 36
c) 50
d) 54

48) **(FUVEST)** O conjunto de raízes da equação $\log_{10}^{(x^2)} = (\log_{10}^{x})^2$ é:

a) {1}
b) {1, 100}
c) {10, 100}
d) {1, 10}
e) $\{x \in R \mid x > 0\}$

49) **(FUVEST)** O número real x que satisfaz a equação $\log_2^{(12-2^x)} = 2x$ é:

a) $\log_2^5$

b) $\log_2^{\sqrt{3}}$

c) 2

d) $\log_2^{\sqrt{5}}$

e) $\log_2^3$

50) Suponha que existam 20 diferentes tipos de aminoácidos. Qual dos valores abaixo mais se aproxima do número de agrupamentos ordenados, formados de 200 aminoácidos, que podem ser obtidos?

(Dado: use a aproximação log 2 = 0,3.)

a) 10^{220}
b) 10^{230}
c) 10^{240}
d) 10^{250}
e) 10^{260}

51) **(UERJ)** O pH de um sistema-tampão pode ser calculado pela expressão $pH = pKa + \log_{10}^{\frac{[HCO_3]}{[H_2CO_3]}}$.

No sangue, a concentração de ácido carbônico varia com a pressão parcial do CO_2. Considere o pH fisiológico e o pKa iguais a 7,4 e 6,1, respectivamente.

Para que esse pH seja mantido, a razão $\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]}$ deverá ser igual a:

a) 0,1
b) 2,5
c) 10,0
d) 20,0

52) **(UERJ)** Para melhor estudar o Sol, os astrônomos utilizam filtros de luz em seus instrumentos de observação.

Admita um filtro que deixe passar 4/5 da intensidade da luz que nele incide. Para reduzir essa intensidade a menos de 10% da original, foi necessário utilizar n filtros.

Considerando log 2 = 0,301, o menor valor de n é igual a:

a) 9
b) 10
c) 11
d) 12

53) **(UERJ)** Um soldado fez n séries de flexões de braço, cada uma delas com 20 repetições. No entanto, como consequência das alterações da contração muscular devidas ao acúmulo de ácido lático, o tempo de duração de cada série, a partir da segunda, foi sempre 28% maior do que o tempo gasto para fazer a série imediatamente anterior. A primeira série foi realizada em 25 segundos e a última em 1 minuto e 40 segundos. Considerando log 2 = 0,3, a soma do número de repetições realizadas nas n séries é igual a:

a) 100
b) 120
c) 140
d) 160

54) **(UERJ)** Seja β a altura de um som, medida em decibéis. Essa altura β está relacionada com a intensidade do som, I, pela expressão abaixo, na qual a intensidade padrão, I_0, é igual a 10^{-12} W/m².

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Observe a tabela a seguir. Nela, os valores de I foram aferidos a distâncias idênticas das respectivas fontes de som.

Fontes de Som	I(W/m²)
turbina	$1,0 \times 10^{2}$
amplificador	1,0
triturador	$1,0 \times 10^{-4}$
TV	$3,2 \times 10^{-5}$

Sabendo que há risco de danos ao ouvido médio a partir de 90 dB, o número de fontes da tabela cuja intensidade de emissão de sons está na faixa de risco é de:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

55) **(UERJ)** Admita que, em determinado lago, a cada 40 cm de profundidade, a intensidade da luz é reduzida em 20%, de acordo com a equação $I = I_0 \cdot 0,8^{\frac{h}{40}}$, na qual é a intensidade da luz em uma profundidade h, em centímetros, e I_0 é a intensidade na superfície.

Um nadador verificou, ao mergulhar nesse lago, que a intensidade da luz, em um ponto P, é de 32% daquela observada na superfície.

A profundidade do ponto P, em metros, considerando log 2 = 0,3, equivale a:

a) 0,64
b) 1,8
c) 2,0
d) 3,2

56) **(UERJ)** Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0, correspondente a dez vezes o nível inicial.

Leia as informações a seguir.

- A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.
- O nível de toxidez T(x), após x dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$T(x) = T_0 \cdot (0,5)^{0,1x}$$

Considere D o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial.

Sendo log 2 = 0,3, o valor de D é igual a:

a) 30
b) 32
c) 34
d) 36

57)**(UERJ)** A acidez de frutas cítricas é determinada pela concentração de íons hidrogênio. Uma amostra de polpa de laranja apresenta pH = 2,3. Considerando-se log 2 = 0,3, a concentração de íons hidrogênio nessa amostra, em $mol.L^{-1}$, equivale a:

a) 0,001
b) 0,003
c) 0,005
d) 0,007

58)**(UERJ)** Jorge quer vender seu carro por R$ 40 000,00. Pedro, para comprá-lo, dispõe de R$ 5 000,00 e aplica este valor em um investimento que rende juros compostos a uma taxa de 28 a cada dois anos.

Considere que a desvalorização do carro de Jorge seja de 19% a cada dois anos, calculada sobre o valor do carro no período de dois anos imediatamente anterior.

Calcule o tempo mínimo em que Pedro terá dinheiro suficiente para comprar o carro de Jorge. Utilize, em seus cálculos, log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48.

59)Sabendo que log 108 = a e log 72 = b, determine, em função de a e b, o valor de log 6.

60)**(UERJ)** Admita que a ordem de grandeza de uma medida x é uma potência de base 10, com expoente n inteiro, para $10^{n-\frac{1}{2}} \leq x < 10^{n+\frac{1}{2}}$.

Considere que um terremoto tenha liberado uma energia E, em joules, cujo valor numérico é tal que $\log_{10} E = 15,3$.

A ordem de grandeza de E, em joules, equivale a:

a) 10^{14}
b) 10^{15}
c) 10^{16}
d) 10^{17}

61)**(UERJ)** Ao digitar corretamente a expressão $\log_{10}(-2)$ em uma calculadora, o retorno obtido no visor corresponde a uma mensagem de erro, uma vez que esse logaritmo não é um número real.

Determine todos os valores reais de x para que o valor da expressão $\log_{0,1}(\log_{10}(\log_{0,1}(x)))$ seja um número real.

62) Ao passar a limpo o seu caderno de Matemática, um aluno deparou-se com a seguinte expressão: $\log_b^2 = 0,3154648...$.

Embora a base b do logaritmo estivesse borrada, o aluno lembrava-se que b era um número natural de um algarismo.

Determine o valor de b.

63)**(ITA)** Determine o domínio da função $f(x) = \log\left[\dfrac{\sqrt{\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x}\right]$.

64) **(UNICAMP)** Resolva o sistema $\begin{cases} \log_2^x + \log_4^y = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$.

65)Calculando manualmente o valor de certa grandeza x, um engenheiro obteve log x = 5,552. Não dispondo de uma máquina de calcular, nem de tábua de logaritmos, e necessitando de uma estimativa da ordem de grandeza de x, pôs-se a pensar um instante, ao fim do qual descobriu o que precisava saber. Você é capaz de indicar a ordem de grandeza de x, em termos de unidade de medida de x?

a) Centena de unidades
b) Milhares de unidades
c) Dezenas de milhares de unidades
d) Centenas de milhares de unidades
e) Milhões de unidades

66)**(FUVEST)** Seja x > 0 tal que $a_1 = \log_2^x$, $a_2 = \log_4^{(4x)}$ e $a_3 = \log_8^{(8x)}$, formem, nessa ordem, uma progressão aritmética. Então $a_1 + a_2 + a_3$ é igual a:

a) 13/2
b) 15/2
c) 17/2
d) 19/2
e) 21/2

67)**(FUVEST)** A magnitude de um terremoto na escala Richter é proporcional ao logaritmo, na base 10, da energia liberada pelo abalo sísmico. Analogamente, o pH de uma solução aquosa é dado pelo logaritmo, na base 10, do inverso da concentração de íons H^+.

Considere as afirmações:

I.O uso do logaritmo nas escalas mencionadas justifica-se pelas variações exponenciais das grandezas.
II.A concentração de íons H^+ de uma solução ácida com pH 4 é 10 mil vezes maior que a de uma solução alcalina de pH 8.
III.Um abalo sísmico de magnitude 6 na escala Richter libera duas vezes mais energia que outro, de magnitude 3.

Está correto o que se afirma somente em

a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) I e III.

68) A produção de uma fábrica tem crescido a uma taxa de 20% ao ano. Se esta tendência for mantida, a produção dessa fábrica será três vezes maior que a de hoje daqui a aproximadamente (considere, se necessário, log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48):

a) 6 anos
b) 7 anos
c) 8 anos
d) 9 anos
e) 10 anos

69)Uma calculadora eletrônica pode escrever números inteiros de até oito dígitos. Quando uma operação cujo resultado é maior ou igual a 100 000 000 é realizada, aparece no visor o símbolo E, que indica a incapacidade da máquina realizar aquele cálculo.

Uma pessoa digitou o número 5 na máquina e, em seguida, efetuou a operação "multiplicação por 2" diversas vezes até aparecer o símbolo E no visor.

Sabendo que log 2 = 0,301, determine o número de vezes que a operação foi realizada.

70)**(UERJ)** A International Electrotechnical Commission – IEC padronizou as unidades e os símbolos a serem usados em Telecomunicações e Eletrônica. Os prefixos kibi, mebi e gibi, entre outros, empregados para especificar múltiplos binários são formados a partir de prefixos já existentes no Sistema Internacional de Medidas – SI, acrescidos de bi, primeira sílaba de binário. A figura 1 abaixo mostra as tabelas que indicam a correspondência entre algumas unidades do SI e da IEC.

Um fabricante de equipamentos de informática, usuário do SI, anuncia um disco rígido de 30 gigabytes. Na linguagem usual de computação, essa medida corresponde a $p \times 2^{30}$ bytes.

Considere a figura 2, que traz uma tabela de logaritmos, e calcule o valor de p.

Figura 1

SI			IEC		
nome	símbolo	magnitude	nome	símbolo	magnitude
quilo	k	10^3	kibi	Ki	2^{10}
mega	M	10^6	mebi	Mi	2^{20}
giga	G	10^9	gibi	Gi	2^{30}

Figura 2

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
Log x	0,301	0,342	0,380	0,415	0,447	0,477

Gabarito

1)
a) 1,20
b) 1,56
c) 0,18
d) 0,12
e) -0,78
f) 0,70

2)
a) 13
b) 4
c) 38
d) 6
e) 8

3) 4

4) 6

5) 2

6) a) 28/5
a) 1
b) 3

7) 22/3

8) -5

9) 0

10) 84

11) 2

12) 3

13)
a) $S = \{ \log_3^{25} - 4 \}$
b) $S = \left\{ \frac{\log_2^7 + 5}{3} \right\}$

14) -1/2

15) 1/2

16) $\sqrt[4]{10}$

17) 3

18) 1/8

19) 3

20) S = {(3, 1)}

21) S= {x ∈ R| - 2 < x < 1 ou x > 3}

22) s-2k+2

23) 0,824

24) d

25) -4 e 1

26) 5/2

27) 7

28) 1/4

29) $-\frac{2+x}{9}$

30) 18

31) 101

32) 5

33) r < p < q

34) d

35) e

36) a

37) S={1; 8}

38) $y = 100x^2$

39)
a) 2,73319
b) 4,73239
c) 1,73799
d) -2,26122
e) 0,73480
f) -5,26281
g) -2,73400
h) 3,26360

40) 24

41) c

42) d

43)
a) 512
b) 13 de abril

44) 10%

45) d

46) e

47) e

48) b

49) e

50) e

51) d

52) c

53) c

54) b

55) c

56) c

57) c

58) 10 anos

59) $\frac{a+b}{5}$

60) b

61) 0<x<0,1

62) 9

63) $\left\{ x \in R \mid 0 < x < \frac{1}{\pi} \text{ ou } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \right\}$

64) S = {(32,1/4)}

65) d

66) b

67) d

68) a

69) 25

70) 28

Anotações

Capítulo VII

FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Função Exponencial

Definição
Dado um número a real positivo e diferente de 1, chamamos de função exponencial de base a à função f, de $\Re$ em $\Re^*_+$, definida por

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

Exemplos:

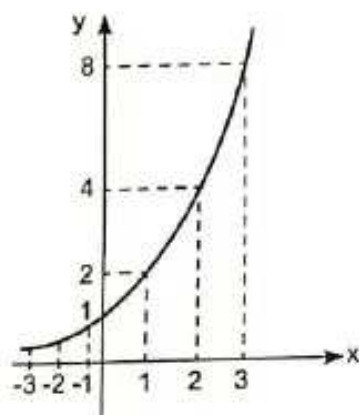
1) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial de base 3.
2) $y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ é uma função exponencial de base $\frac{4}{5}$.

Gráficos da Função Exponencial

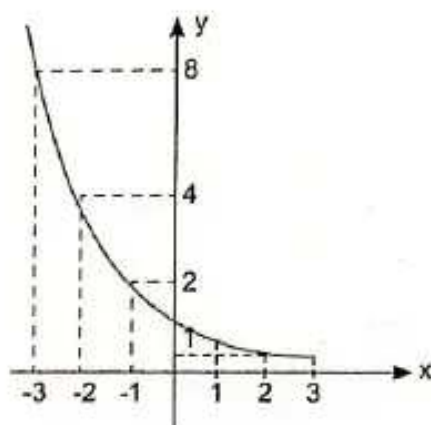
Para facilitar as conclusões sobre os gráficos de funções exponenciais, tomemos como exemplos duas funções, uma com base a > 1 e outra com base 0 < a < 1.

a) $a > 1$

Exemplo: $y = 2^x$

$y = 2^x$	
x	y
...	...
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
...	...

b) $0 < a < 1$

Exemplo: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
x	y
...	...
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
...	...

Conclusão:

1) Quando a base é maior do que 1, a função é crescente.
2) Quando a base está entre 0 e 1, a função é decrescente.
3) O domínio da função é $\Re$ e a imagem $\Re^*_+$.
4) Em ambos os casos os gráficos intersectam o eixo y no ponto (0, 1).
5) Em ambos os casos os gráficos não intersectam o eixo x.

Inequações Exponenciais

Devemos abordar tal assunto com dois procedimentos distintos:

1º caso: Base > 1
Como podemos observar nos gráficos anteriores, neste caso a função é crescente, ou seja, quanto maior o valor de x maior é o valor da função, daí, sintetizando:

$$a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} > a^{x_2} & \Rightarrow \quad x_1 > x_2 \\ a^{x_1} < a^{x_2} & \Rightarrow \quad x_1 < x_2 \end{cases}$$

2º caso: 0 < Base < 1
Quando a base está entre 0 e 1 a função é decrescente, logo quanto maior o valor de x menor é o valor da função. Então:

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} > a^{x_2} & \Rightarrow \quad x_1 < x_2 \\ a^{x_1} < a^{x_2} & \Rightarrow \quad x_1 > x_2 \end{cases}$$

Exemplos:

Resolver as inequações:

1) $3^{3x+4} > 3^{2x-5}$

Solução:
Como a base é maior do que 1:

$3x + 4 > 2x - 5$

$x > -9$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-3} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x+4}$

Solução:
A base está entre 0 e 1, logo:

$4x - 3 < x + 4$

$3x < 7$

$x < \frac{7}{3}$

Função Logarítmica

Definição
Dado um número a real positivo e diferente de 1, chamamos de *função logarítmica de base* a à função f, de $\Re^*_+$ em $\Re$, definida por:

$$\boxed{f(x) = \log_a^x}$$

Exemplos:

1) $f(x) = \log_7^x$ é uma função logarítmica de base 7.
2) $y = \log_{3/5}^x$ é uma função logarítmica de base $\frac{3}{5}$.

Gráfico da Função Logarítmica

Seja obter a inversa da função exponencial:

$$y = a^x$$

Basta trocarmos x por y e vice-versa:

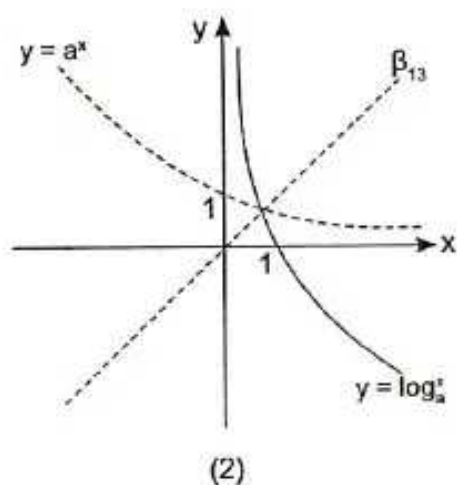
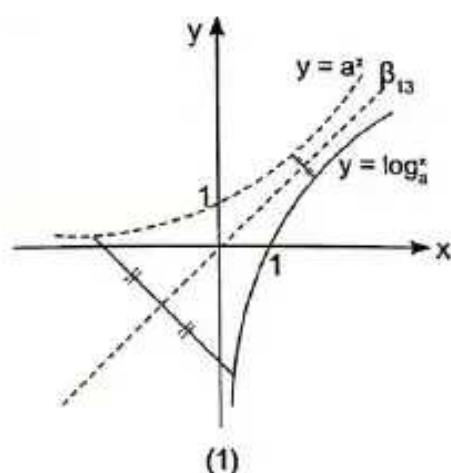
$$x = a^y$$

Daí, pelo estudado em logaritmos, tem que:

$$y = \log_a^x$$

Então concluímos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, e como tal terá gráfico simétrico ao da exponencial em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. ($\beta_{1,3}$).

(1)

(2)

Conclusões:

1) Na figura (1) temos o gráfico de uma função logarítmica de base maior do que 1, a qual verificamos ser crescente.
2) Na figura (2) temos o gráfico de uma função logarítmica de base compreendida entre 0 e 1, notadamente decrescente.
3) O domínio é $\Re_+^*$ e a imagem $\Re$.
4) Os gráficos, em ambos os casos, intersectam o eixo x no ponto (1, 0).
5) Os gráficos, em ambos os casos, não intersectam o eixo y.

Inequações Logarítmicas

O seu processo de resolução é semelhante ao analisado nas inequações exponenciais. Ou seja:

$$a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x_1 > \log_a x_2 & \Rightarrow & x_1 > x_2 \\ \log_a x_1 < \log_a x_2 & \Rightarrow & x_1 < x_2 \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x_1 > \log_a x_2 & \Rightarrow & x_1 < x_2 \end{cases}$$

Exemplos:

Resolver as equações:

1) $\log_4(3x + 2) > \log_4(x - 1)$

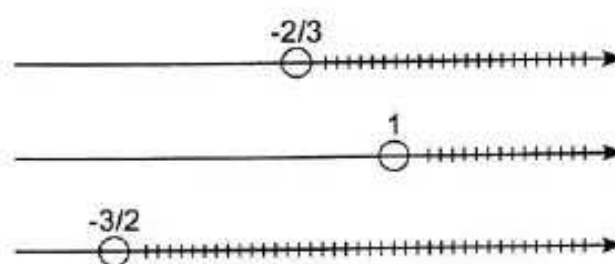
Solução:

Como a base é maior do que 1:

$3x + 2 > x - 1$

$2x > -3 \quad \ldots \quad x > -\dfrac{3}{2}$

Devemos agora satisfazer também às definições de logaritmo:

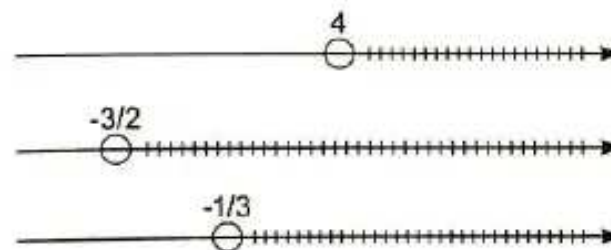
$$\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{2}{3} \\ x > 1 \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

A solução do sistema e por conseguinte da inequação é x > 1.

2) $\log_{0,4}(2x + 3) > \log_{0,4}(3x - 1)$

Solução:

Como a base está entre 0 e 1:

$$\begin{cases} 2x + 3 < 3x - 1 \\ 2x + 3 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x < -4 \\ 2x > -3 \\ 3x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

A solução é x > 4.

Exercícios

1) Esboçar os gráficos das funções:

a) $y = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

c) $y = 4^{-x}$

d) $f(x) = 7^{\frac{x}{3}}$

e) $y = 2^{x+3}$

f) $f(x) = \log_6^x$

g) $y = \log_{0,1}^x$

2) Resolva, em R, as inequações:

a) $6^{3x+1} < 6^{x+9}$

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-3} \geq \left(\frac{4}{5}\right)^{x+1}$

c) $\ln(4x-2) \leq \ln(x+7)$

d) $\log_{0,5}^{(3-x)} > \log_{0,5}^{(2x+6)}$

3) Quantos valores naturais de x satisfazem à inequação $1{,}25^{2x+1} \leq 0{,}8^{x-5}$?

4) **(ITA)** Resolva, em R, a inequação $16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/5}^{(x^2-x+19)}}$.

5) **(ITA)** Seja a função f dada por

$f(x) = \left(\log_3^5\right) \cdot \log_5^{8^{x-1}} + \log_3^{4^{1+2x-x^2}} - \log_3^{2^{x(3x+1)}}$

Determine os valores reais de x que tornam f não negativa.

6) Considere a função f de R em R, definida por $f(x) = 2^{|x|}$. Qual o conjunto imagem de f?

7) Determine os valores de x de modo que a função $f(x) = 2^{x^2+5x-3}$ seja menor do que 8.

8) **(FUVEST)** Seja $f(x) = \log_{10}(\log_{1/3}(x^2 - x + 1))$ uma função de valores reais, para todo $x \in D$, com domínio $D \subset R$.

O conjunto que pode ser o domínio D é

a) $\{x \in R;\ 0 < x < 1\}$

b) $\{x \in R;\ x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$

c) $\left\{x \in R;\ \frac{1}{3} < x < 10\right\}$

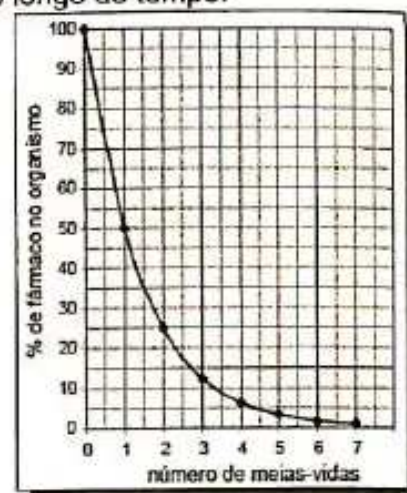
d) $\left\{x \in R;\ x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 10\right\}$

e) $\left\{x \in R;\ \frac{1}{9} < x < \frac{10}{3}\right\}$

9) **(ENEM)** Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida. Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

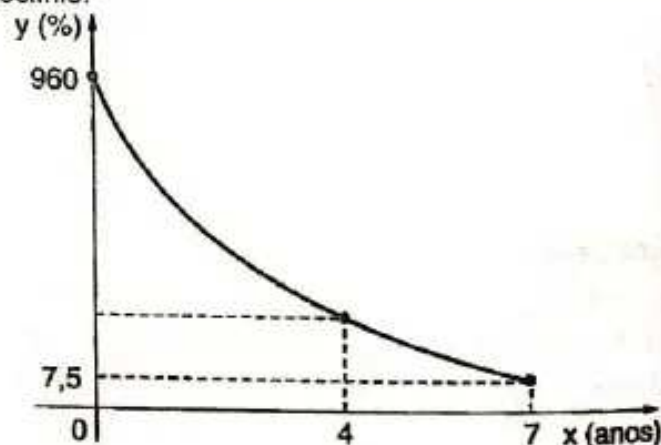
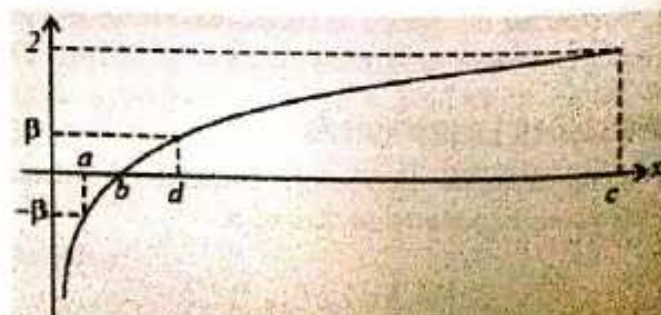
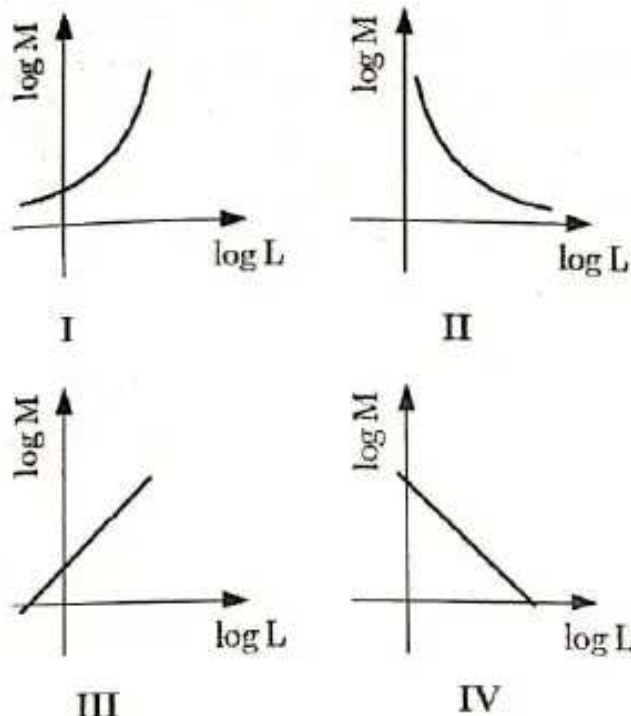
a) afim.
b) seno.
c) cosseno.
d) logarítmica.
e) exponencial.

10) **(ENEM)** A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo, no final do intervalo, é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.

O gráfico a seguir representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

A meia-vida do antibiótico amoxilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min será, aproximadamente, de

a) 10%.
b) 15%.
c) 25%.
d) 35%.
e) 50%.

11) **(UERJ)** A inflação anual de um país decresceu no período de sete anos. Esse fenômeno pode ser representado por uma função exponencial do tipo $f(x) = a \cdot b^x$, conforme o gráfico abaixo.

Determine a taxa de inflação desse país no quarto ano de declínio.

12) Seja f:]0, ∞[→ IR dada por $f(x) = \log_3 x$. Sabendo que os pontos (a, - β), (b, 0), (c, 2) e (d, β) estão no gráfico de f, calcule b + c + ad.

13) **(UERJ)** Um pesquisador, interessado em estudar uma determinada espécie de cobras, verificou que, numa amostra de trezentas cobras, suas massas M, em gramas, eram proporcionais ao cubo de seus comprimentos L, em metros, ou seja, $M = a \times L^3$, em que a é uma constante positiva. Observe os gráficos abaixo.

Aquele que melhor representa logM em função de LogL é o indicado pelo número:

a) I
b) II
c) III
d) IV

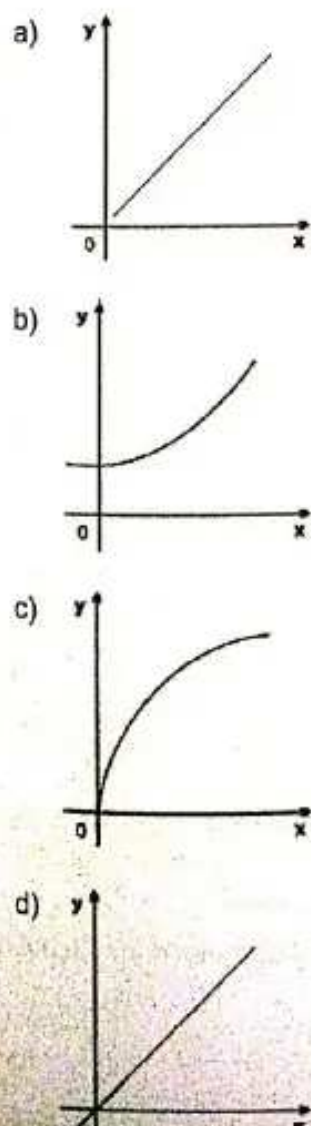
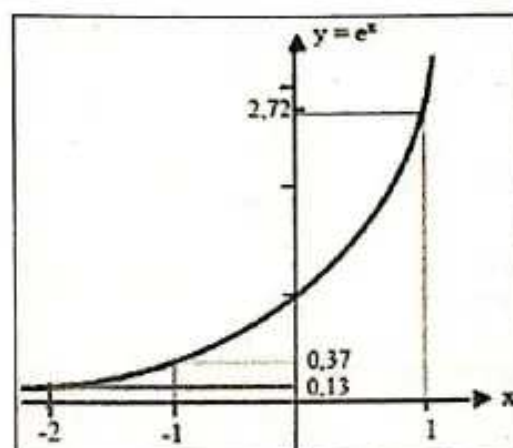
14) **(UERJ)** A relação entre as coordenadas x e y de um corpo em movimento no plano é dada por $y = 10^{\log x}$.

O gráfico correspondente a esta relação é:

a)

b)

c)

d)

15) **(UERJ)** Uma empresa acompanha a produção diária de um funcionário recém-admitido, utilizando uma função f(d), cujo valor corresponde ao número mínimo de peças que a empresa espera que ele produza em cada dia (d), a partir da data de sua admissão. Considere o gráfico auxiliar abaixo, que representa a função $y = e^x$.

Utilizando $f(d) = 100 - 100.e^{-0,2d}$ e o gráfico ao lado, a empresa pode prever que o funcionário alcançará a produção de 87 peças num mesmo dia, quando d for igual a:

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20

16) **(UERJ)** A intensidade I de um terremoto, medida pela escala Richter, é definida pela equação abaixo, na qual E representa a energia liberada em kWh.

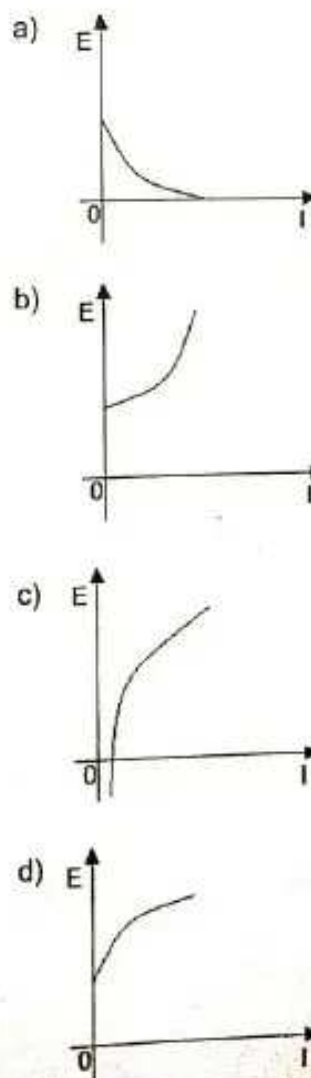
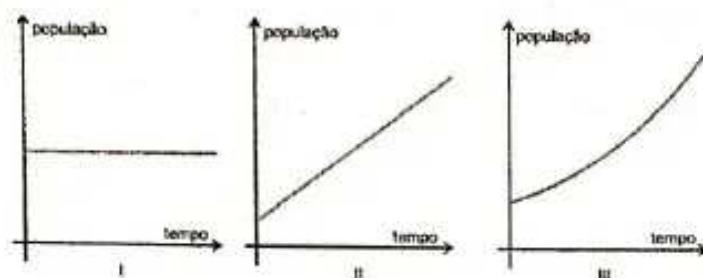
$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

O gráfico que melhor representa a energia E, em função da intensidade I, sendo E_0 igual a 10^{-3} kWh, está indicado em:

a)

b)

c)

d)

17) Os gráficos I, II e III, abaixo, esboçados em uma mesma escala, ilustram modelos teóricos que descrevem a população de três espécies de pássaros ao longo do tempo.

Sabe-se que a população da espécie A aumenta 20% ao ano, que a população da espécie B aumenta 100 pássaros ao ano e que a população da espécie C permanece estável ao longo dos anos. Assim, a evolução das populações das espécies A, B e C, ao longo do tempo, correspondem, respectivamente, aos gráficos

a) I, III e II.
b) II, I e III.
c) II, III e I.
d) III, I e II.
e) III, II e I.

18) **(ENEM)** O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria. Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$?

a) $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8\,000$
b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\,000$
c) $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$
d) $P(t) = 8\,000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$
e) $P(t) = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

19) **(ENEM)** O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e p(t) é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

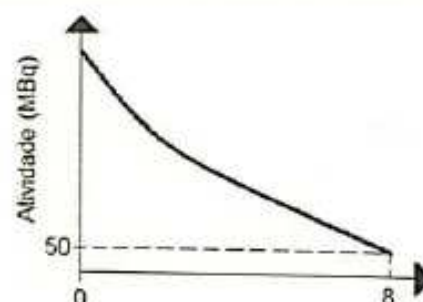
a) reduzida a um terço.
b) reduzida à metade.
c) reduzida a dois terços.
d) duplicada.
e) triplicada.

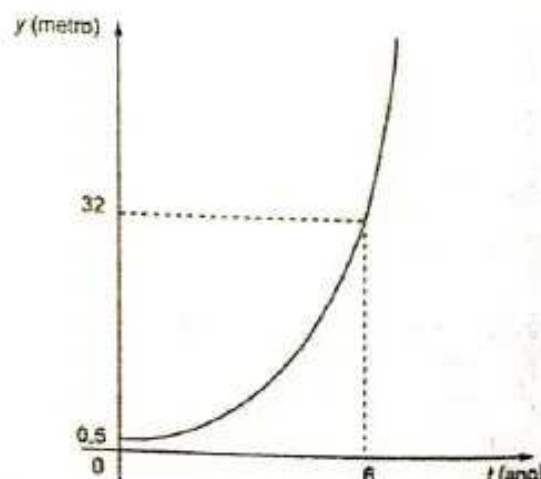
20) **(ENEM)** O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,

a) 7 416,00.
b) 3 819,24.
c) 3 709,62.
d) 3 708,00.
e) 1 909,62.

21) O ítrio-90 é um radioisótopo que tem sido cada vez mais utilizado no tratamento de tumores, especialmente do fígado, e apresenta meia-vida de 64 horas. No gráfico, sem escala definida, a curva mostra a atividade de certa amostra de ^{90}Y ao logo do tempo.

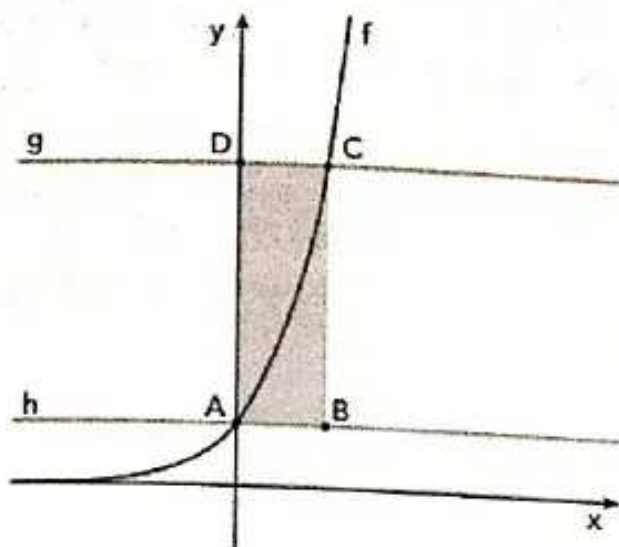
De acordo com os valores indicados no gráfico, o valor da atividade, em MBq, no tempo zero, era igual a

a) 200.
b) 300.
c) 400.
d) 500.
e) 600.

22) **(ENEM)** Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.

Admita ainda que y(0) fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

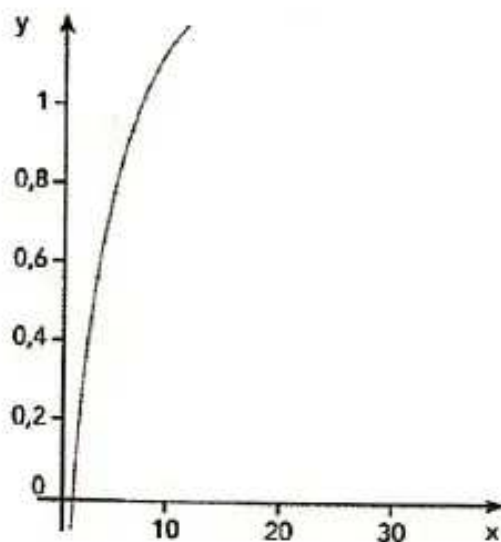
O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

a) 3.
b) 4.
c) 6.
d) $\log_2 7$.

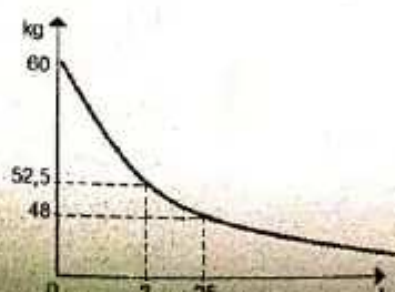
e) $\log_2 15$.

23) **(UERJ)** Observe o plano cartesiano a seguir, no qual estão representados os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 8$ e $h(x) = k$, sendo $x \in IR$ e k uma constante real.

No retângulo ABCD, destacado no plano, os vértices A e C são as interseções dos gráficos $f \cap h$ e $f \cap g$, respectivamente.

Determine a área desse retângulo.

24) **(UERJ)** Observe no gráfico a função logaritmo decimal definida por $y = \log(x)$.

Admita que, no eixo x, 10 unidades correspondem a 1 cm e que, no eixo y, a ordenada log(1000) corresponde a 15 cm. A escala x : y na qual os eixos foram construídos equivale a:

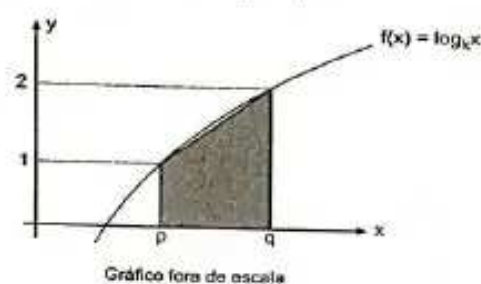
a) 5 : 1
b) 15 : 1
c) 50 : 1
d) 100 : 1

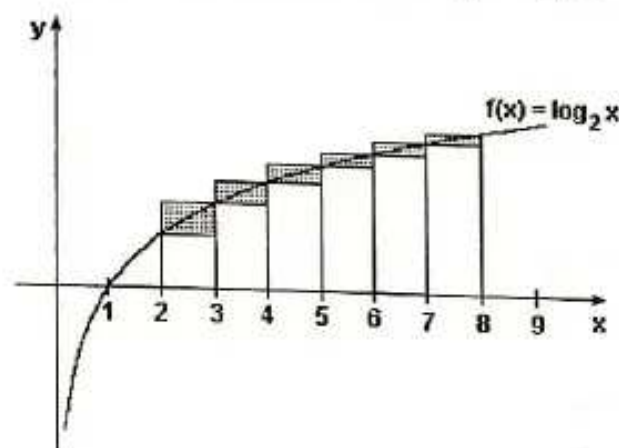
25) Uma pessoa, com certa doença, está perdendo massa dia a dia, de acordo com a função $m(t) = k \times (0,8)^{\frac{t}{25}}$. O gráfico representa a perda de massa dessa pessoa após o início da doença ($t = 0$), sendo m(t) a massa em kg, t o tempo em dias e k uma constante.

O número de dias, após o início da doença, para que a massa dessa pessoa atinja 52,5 kg será

Dados:

n	$(0,8)^n$
0,5	0,894
0,6	0,875
0,7	0,855

a) 18.
b) 15.
c) 13.
d) 10.
e) 6.

26) Na figura abaixo, dois vértices do trapézio sombreado estão no eixo x e os outros dois vértices estão sobre o gráfico da função real $f(x) = \log_k x$, com $k > 0$ e $k \neq 1$. Sabe-se que o trapézio sombreado tem 30 unidades de área; assim, o valor de $k + p - q$ é

a) -20
b) -15
c) 10
d) 15

27) Na figura a seguir estão representados seis retângulos com lados paralelos aos eixos coordenados e vértices opostos sobre o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$, $x > 0$.

A soma das áreas dos seis retângulos é igual a

a) 1 unidade de área.
b) 2 unidades de área.
c) 3 unidades de área.
d) 4 unidades de área.
e) 5 unidades de área.

28) Sob certas condições, o número de colônias de bactérias, t horas após ser preparada a cultura, é dado pela função a seguir.

$$B(t) = 9^t - 2 \cdot 3^t + 3, t \geq 0$$

O tempo mínimo necessário para esse número ultrapassar 6 colônias é de

a) 1 hora.
b) 2 horas.
c) 3 horas.
d) 4 horas.

Figura fora de escala. e) 6 horas.

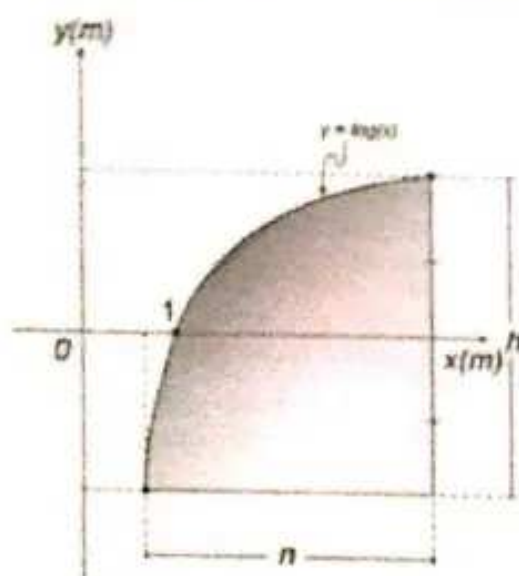
29) **(UERJ)** Um imóvel perde 36% do valor de venda a cada dois anos. O valor V(t) desse imóvel em t anos pode ser obtido por meio da fórmula a seguir, na qual V_0 corresponde ao seu valor atual.

$$V(t) = V_0 \times (0,64)^{\frac{t}{2}}$$

Admitindo que o valor de venda atual do imóvel seja igual a 50 mil reais, calcule seu valor de venda daqui a três anos.

30) Juliana participa de um leilão de obras de arte, adquirindo uma obra por D reais, em que é acordado que ela irá pagar em prestações mensais sem acréscimo de juros. Enquanto o saldo devedor for superior a 25% do valor de D, ela pagará uma prestação no valor de 20% do saldo devedor; no mês que o saldo for inferior a 25% do valor de D, ela pagará o restante de sua dívida. Nessas condições, em quantos pagamentos Juliana quitará sua dívida?

(Dado: log 2 = 0,301.)

31) **(ENEM)** Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y = log (x), conforme a figura.

A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

a) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

b) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) - \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

c) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) + \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

d) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

e) $2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

32) **(UNICAMP)** Para certo modelo de computadores produzidos por uma empresa, o percentual dos processadores que apresentam falhas após T anos de uso é dado pela seguinte função:

(A) Em quanto tempo 75% dos processadores de um lote desse modelo de computadores terão apresentado falhas?

(B) Os novos computadores dessa empresa vêm com um processador menos suscetível a falhas. Para o modelo mais recente, embora o percentual de processadores que apresentam falhas também seja dado por uma função na forma $Q(T) = 100 \cdot (1 - 2^{cT})$, o percentual de processadores defeituosos após dez anos de uso equivale a 1/4 do valor observado, nesse mesmo período, para o modelo antigo (ou seja, o valor obtido empregando-se a função P(T) acima).

Determine, nesse caso, o valor da constante real c. Se necessário, use $\log_2 7 \approx 2,81$.

Gabarito

1)

a)

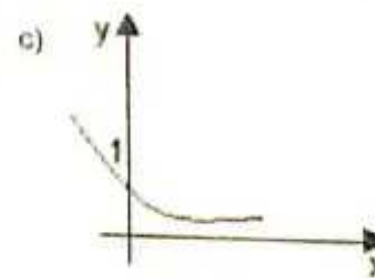
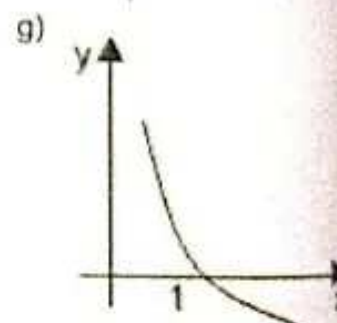
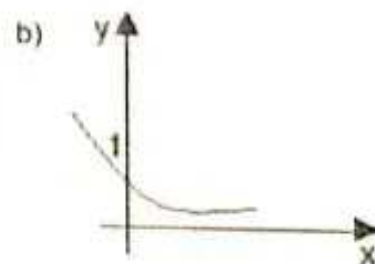
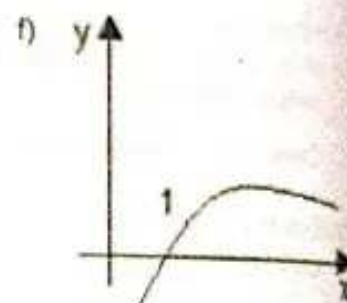
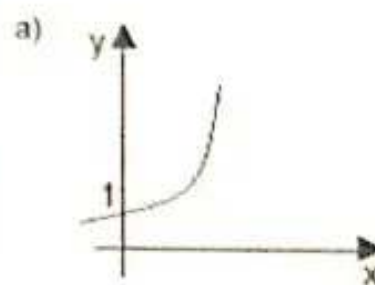
b)

c)

d)

e)

f)

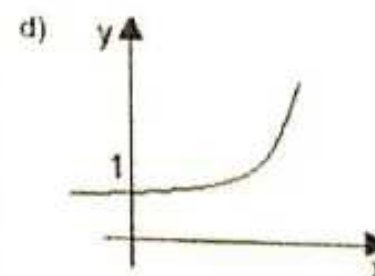
g)

2)

a) $S = \{x \in R \mid x < 4\}$

b) $S = \{x \in R \mid x \leq 4\}$

c) $S = \{x \in R \mid x \geq 3\}$

d) $S = \{x \in R \mid -1 < x < 3\}$

3) 2

4) $S = \{x \in R \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

5) $\frac{1}{5} \leq x \leq 1$

6) $[1, +\infty)$

7) (-6, 1)

8) a

9) e

10) d

11) 60%

12) 11

13) c

14) a

15) b

16) b

17) e

18) e

19) d

$P(T) = 100 \cdot (1 - 2^{-0,1T})$

74

20) e
21) c
22) b
23) 12
24) c
25) b
26) b
27) b
28) a
29) R$ 25 600,00
30) 8
31) e
32)
a) 20 anos
b) -0,019

Anotações

Capítulo VIII

BINÔMIO DE NEWTON

Fatorial de Um Número

Dado um número n, inteiro maior do que 1, definimos o seu fatorial, representado por **n!** como sendo o produto de n por todos os números inteiros positivos, menores que ele. Assim:

$$n! = n(n-1)\ldots 1;\ \forall n \in Z \wedge n > 1$$

Exemplos:

a) $5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$

b) $7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040$

É importante ressaltar que $1! = 1$ e $0! = 1$, por convenção.

Números Binomiais

Dados os números inteiros não negativos n e p, tais que $n \geq p$, definimos o **binomial de n sobre p**, como sendo:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

onde n é dito numerador e p é o denominador.

Exemplos:

a) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7.6.5.4!}{\cancel{4}!3!} = \frac{7.\cancel{6}.5}{\cancel{3}.\cancel{2}.1} = 35$

b) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7.6.5.4!}{3!\cancel{4}!} = \frac{7.\cancel{6}.5}{\cancel{3}.\cancel{2}.1} = 35$

c) $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10.9.8.\cancel{7}!}{\cancel{7}!\cancel{3}!} = \frac{10.\overset{3}{\cancel{9}}.\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{3}}.\underset{1}{\cancel{2}}.1} = 120$

d) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10.9.8.\cancel{7}!}{\cancel{3}!\cancel{7}!} = \frac{10.\overset{3}{\cancel{9}}.\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{3}}.\underset{1}{\cancel{2}}.1} = 120$

Propriedades

1. Binomiais complementares

"Se dois binomiais têm numeradores iguais, e a soma de seus denominadores é igual a esse numerador, tais binomiais têm o mesmo valor e são chamados de **binomiais complementares**".

Acompanhe a demonstração abaixo:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \binom{n}{n-p}$$

Logo: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Nos exemplos do item anterior verificamos que $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ e $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$, o que confirma a propriedade aqui citada.

Exemplos:

$\binom{30}{\ldots} = \binom{30}{\ldots} = \frac{30!}{\ldots} = \frac{30.29.28.\cancel{27}!}{\ldots}$

$$= \frac{\overset{10}{\cancel{30}}.29.\overset{14}{\cancel{28}}}{\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{1}} = 4060$$

b) $\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100!}{2!(100-2)!} = \frac{100.99.\cancel{98}!}{2!\ \cancel{98}!} = \frac{\overset{50}{\cancel{100}}.99}{\cancel{2}.\cancel{1}} = 4.950$

2. Relação de Stifel

Dados $n, p \in Z_+$ tais que $n \geq p$, demonstra-se, como veremos a seguir, a relação de Stifel:

$$\boxed{\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}}$$

Demonstração:

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)![n-1-(p-1)]!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} =$$

Multiplicando-se ambos os termos da 1ª fração por $n-p$ e ambos os termos da 2ª por p...

$$= \frac{(n-p).(n-1)!}{p!(n-p).(n-p-1)!} + \frac{p.(n-1)!}{p.(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} +$$

$$+ \frac{p.(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-p+p).(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n.(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Exemplos: $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$, pois:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.\cancel{3}!}{\cancel{3}!\ 2!} = 10$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4.\cancel{3}!}{\cancel{3}!1} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.\cancel{2}!}{\cancel{2}!\,2.1} = 6$$

Fórmula do Binômio de Newton

Dado um número natural n, demonstra-se utilizando os conceitos de produto de Stevin e cálculo combinatório, que

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . x^{n-k} . a^k, \text{ ou seja:}$$

$$\boxed{(x+a)^n = \binom{n}{0}.x^n + \binom{n}{1}.x^{n-1}.a + \binom{n}{2}.x^{n-2}.a^2 + \ldots + \binom{n}{n}.a^n}$$

Exemplo:

$$(x+2)^4 = \binom{4}{0}.x^4.2^0 + \binom{4}{1}.x^3.2^1 + \binom{4}{2}.x^2.2^2 + \binom{4}{3}.x^1.2^3 +$$

$$+ \binom{4}{4}.x^0.2^4 = 1.x^4.1 + 4.x^3.2 + 6.x^2.4 + 4.x.8 + 1.1.16$$

Logo:

Termo Geral do Desenvolvimento de $(x + a)^n$

No desenvolvimento de $(x + a)^n$, por vezes desejamos determinar um termo qualquer em especial. Assim, por indução, podemos chegar a uma fórmula que nos permita obter tal termo sem o desenvolvimento de todo o binômio. Considerando o desenvolvimento de $(x + a)^n$.

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^{n-0} \cdot a^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot x^{n-n} \cdot a^n$$

temos que:

$$T_1 = \binom{n}{0} . n^{n-0} . a^0$$

$$T_2 = \binom{n}{1} . x^{n-1} . a^1$$

$$T_3 = \binom{n}{2} . x^{n-2} . a^2$$

.
.
.
.
.
.

$$T_k = \binom{n}{k-1} . x^{n-(k-1)} . a^{k-1}$$

$$\boxed{T_{k+1} = \binom{n}{k} . x^{n-k} . a^k}$$, que é a fórmula do termo geral.

Exemplos:

1. Obter o 4º termo do desenvolvimento de $(y^3 + 2)^5$.

Solução: Em $(y^3 + 2)^5$ temos $n = 5$, $x = y^3$ e $a = 2$, daí:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot a^k$$

$$T_4 = \binom{5}{3} \cdot (y^3)^{5-3} \cdot 2^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} \cdot (y^3)^2 \cdot 8 = \frac{5.4.3!}{3!.2.1} \cdot y^6 \cdot 8 = 80y^6$$

$k + 1 = 4$

$k = 3$

2. Determine o termo em x^6 do desenvolvimento de $(x^2 - 3)^4$.

Solução: Em $(x^2 - 3)^4$, $n = 4$, $x = x^2$ e $a = -3$, então:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} . x^{n-k} . a^k$$

Como não sabemos a posição que o termo em x^6 ocupará no desenvolvimento, não sabemos o valor de *k*, logo:

$$T_{k+1} = \binom{4}{k} . (x^2)^{4-k} . (-3)^k = \binom{4}{k} . x^{8-2k} . (-3)^k$$

Basta agora igualarmos o expoente de x, no desenvolvimento, àquele desejado no exercício:

$$8 - 2k = 6$$
$$-2k = -2$$
$$k = 1$$

Daí, tiramos que o termo em x^6 será o 2º termo (termo k + 1).

$$T_{k+1} = T_{1+1} = T_2 = \binom{4}{1} . x^{8-2.1} . (-3)^1 = 4 . x^6 . (-3) = -12x^6$$

O Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é um conjunto de números dispostos em forma de triângulo retângulo, no qual o primeiro e o último elemento de cada linha são iguais a 1. Para obtermos um elemento qualquer, devemos somar o elemento que se encontra na linha anterior e acima dele com o elemento imediatamente à esquerda deste (aplicação da relação de Stifel). Observe agora a formação do triângulo de Pascal:

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

1) Vamos desenvolver algumas potências do binômio x + a:

$(x + a)^0 = 1 \rightarrow$ coeficiente: 1 $\rightarrow$ linha 0

$(x + a)^1 = x + a \rightarrow$ coeficientes: 1 1 $\rightarrow$ linha 1

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \rightarrow$ coeficientes: 1 2 1 $\rightarrow$ linha 2

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 \rightarrow$ coeficientes: 1 3 3 1 $\rightarrow \rightarrow$ linha 3

$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4 \rightarrow$ coeficientes: 1 4 6 4 1 $\rightarrow \rightarrow$ linha 4

Portanto, constatamos que os elementos da linha **n** do triângulo de Pascal são os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$.

2) Vamos agora analisar a soma dos elementos de cada linha do triângulo de Pascal, onde S_K representará a soma dos elementos da linha K:

$S_0 = 1 = 2^0$

$S_1 = 1 + 1 = 2 = 2^1$

$S_2 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

$S_3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

$S_4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

$$\boxed{S_n = 2^n}$$

Daí, concluímos que a soma dos elementos de linha **n** do triângulo é dada por 2^n; e, como os elementos de linha **n** são os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$, temos que:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

Exemplo:

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=2^6=64$$

Exercícios

1)

a) $7!$

b) $\binom{8}{3}$

c) $\binom{8^9}{0}+\binom{3^4}{1}-\binom{100^2}{100^2}$

d) $\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\cdots+\binom{7}{6}$

e) $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\cdots+\binom{10}{3}$

2) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{n!}{(n-3)!}$

b) $\dfrac{(n-2)!}{n!}$

c) $\dfrac{(n+1)!(n-5)!}{n!(n-3)!}$

d) $\dfrac{[(n-1)!]^2-(n-2)!(n-1)!}{(n-2)!(n-1)!}$

3) Que valores naturais de x satisfazem a equação $\binom{10}{2x+3}=\binom{10}{7}$?

4) Determine os valores de x nas equações:

a) $2\cdot\binom{x}{2}-3\cdot\binom{x-1}{2}=2$

b) $\binom{x+3}{x+1}=21$

c) $\binom{x+4}{x}=35$

d) $\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\cdots+\binom{x}{x}=1024$

e) $\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\cdots+\binom{x}{x-1}=254$

f) $\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}+\binom{8}{6}=\binom{9}{x}$

5) No triângulo de Pascal, quanto vale a soma do penúltimo elemento da 2000ª linha com o segundo elemento da linha imediatamente posterior a ela?

6) O valor de $\binom{18}{7}+\binom{18}{8}+\binom{19}{9}+\binom{20}{10}$ é igual a:

a) $\binom{18}{10}$

b) $\binom{19}{11}$

c) $\binom{20}{10}$

d) $\binom{21}{10}$

7) O valor da expressão

$$\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}+2\cdot\binom{10}{7}+\binom{10}{2}$$

equivale a:

a) $\binom{11}{8}$

b) $\binom{11}{9}$

c) $\binom{12}{8}$

d) $\binom{12}{9}$

8) Determine o valor n que torna verdadeira a igualdade $\binom{n+6}{9}-\binom{n+5}{8}=10$.

9) A expressão $\binom{x+2}{x+1}+\binom{x+3}{x+2}+\binom{x+4}{x+1}+\binom{x+2}{x}$ é equivalente a:

a) $\binom{x+4}{x+1}$

b) $\binom{x+5}{x+1}$

c) $\binom{x+4}{x+3}$

d) $\binom{x+5}{x+4}$

e) $\binom{x+5}{x+2}$

10) Determine o valor da soma dos coeficientes de cada um dos desenvolvimentos a seguir.

a) $(3x^3-2y^5)^{74}$

b) $(4x^2 - 6y^3)^7$
c) $(1 - x - x^2)^{35}$

78

11) **(PUC)** Determine os dois últimos algarismos do número $1! + 2! + 3! + 4! + ... + 99!$.

12) Determine o valor do logaritmo na base 2 do resultado de $\sum_{x=0}^{50} \binom{100}{2x}$

13) Desenvolva o binômio $(a + b)^5$.

14) Determine o valor do 4º termo do desenvolvimento de $(3x + 2y)^7$.

15) Determine o valor do termo médio do desenvolvimento de $(2 - 3x^2)^8$.

16) Determine o valor do 6º termo da expansão $\left(4x^3 - \frac{3}{2x^2}\right)^7$.

17) Determine o valor do termo central do desenvolvimento de $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}}\right)^{10}$.

18) **(PUC)** O coeficiente de a^{13} no binômio $(a + 2)^{15}$ é:

a) 105
b) 210
c) 360
d) 420
e) 480

19) Um dos termos do desenvolvimento de $(x^2 + m)^6$ é $1215x^4$. Determine os valores reais de m.

20) Determine o valor do termo em x^{16} no desenvolvimento de $(2x^3 - 4x^2)^6$.

21) Qual o valor do termo independente de x na expansão $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5$?

22) Na expansão $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^8$, qual o coeficiente de x?

23) Determine os valores das expressões:

a) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1}\cdot 3 + \binom{10}{2}\cdot 3^2 + \cdots + \binom{10}{10}\cdot 3^{10}$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots - \binom{n}{n}$

24) Determine o valor da expressão $(2\sqrt{2} + 3)^5 - (2\sqrt{2} - 3)^5$.

25) Quantos termos irracionais possui o desenvolvimento de $(\sqrt[4]{2} + \sqrt[3]{5})^{20}$?

26) A expressão

$1 - 4sen^2x + 6sen^4x - 4sen^6x + sen^8x$ equivale a:

a) $sen^{10}x$
b) $sen^{12}x$
c) cos^8x
d) $cos^{10}x$
e) 0

27) Uma agência bancária cadastra as contas de seus clientes usando um número N de quatro algarismos, seguido de um dígito de controle, o qual é definido como o resto da divisão de N^{11} por 7. Por exemplo, na conta 2 001-6, o algarismo de controle 6 é o resto da divisão de $2\,001^{11}$ por 7. Isso pode ser comprovado escrevendo-se $2\,001 = 7 \times 286 - 1$ e, a seguir, utilizando o Binômio de Newton pra desenvolver a potência $(7 \times 286 - 1)^{11}$.

Por esse raciocínio, ou equivalente, calcule o algarismo de controle da conta 2 000.

28) (ITA) Determine o coeficiente do termo em x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^{10}$.

29) (IME) Determine o termo máximo do desenvolvimento da expressão $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{65}$.

Gabarito

1)
a) 5 040
b) 56
c) 81
d) 330

2)
a) $n^3 - 3n^2 + 2n$
b) $\frac{1}{n^2 - n}$
c) $\frac{n+1}{n^2 - 7n + 12}$
d) $n - 2$

3) 0 ou 2

4)
a) 5
b) 4
c) 3
d) 10
e) 8
f) 3 ou 6

5) 3 999

6) d

7) c

8) 5

9) e

10)
a) 1

11) 1 e 3

12) 99

13) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

14) $22\,680x^4y^3$

15) $90\,720x^8$

16) $-\frac{5103}{2x^4}$

17) -252

18) d

19) -3 e 3

20) $3\,840x^{16}$

21) -10

22) -56

23)
a) 2^{20}
b) 0

24) 6 726

25) 19

26) c

27) 3

28) 615

29) $C_{65}^{16}\cdot 3^{-16}$

b) -128
c) -1

Capítulo IX

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Introdução

Em nosso cotidiano por vezes nos deparamos com situações em que precisamos escolher e arrumar elementos quaisquer de uma coleção. É nesse momento que a **Análise Combinatória** se faz necessária, pois ela é a parte da Matemática, que se dedica à resolução de tais problemas. Seus métodos são aplicados na Estatística, no cálculo de probabilidades, na Informática, na montagem de horários, na elaboração de loterias, na Química, na Genética, na Matemática Superior e numa infinidade de outras áreas do conhecimento humano.

A seguir vamos estudar as técnicas que nos possibilitam solucionar problemas de contagem.

Princípio Multiplicativo ou Teorema Fundamental da Contagem

É a base da Análise Combinatória. Grande parte dos exercícios sobre contagem é resolvida usando-se o Princípio Multiplicativo. Para melhor entendermos o enunciado de tal princípio vamos analisar duas situações distintas.

Situação 1:

Em um bar são vendidos apenas sanduíches de queijo, presunto e mortadela com pão de forma ou de batata. Uma pessoa que deseja consumir um desses sanduíches, de quantas opções diferentes dispõe?

Solução:

Sejam os tipos de pães **F**(forma) e **B**(batata) e os recheios **Q**(queijo), **P**(presunto), **M**(mortadela). Na tabela abaixo temos todas as hipóteses de sanduíches.

Pão \ Recheio	Q	P	M
F	FQ	FP	FM
B	BQ	BP	BM

Observamos que o total de opções para 2 tipos de pães e 3 tipos de recheios é 2 . 3 = 6.

Situação 2:

Um turista deseja deslocar-se de uma cidade **A** para uma cidade **C**, porém deseja passar a noite em uma outra cidade **B**. Sabendo que existem três linhas aéreas que têm vôos programados de **A** para **B**, e outras quatro que ligam **B** a **C**, de quantos modos diferentes ele pode sair de **A** e chegar a **C** usando duas dessas linhas aéreas?

Solução:

Consideremos as linhas aéreas x_1, x_2 e x_3 que ligam **A** e **B**, e y_1, y_2, y_3 e y_4 que vão de **B** para **C**. As maneiras de ir de **A** até **C** usando duas dessas linhas podem ser observadas no quadro a seguir:

A → B \ B → C	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	x_1y_1	x_1y_2	x_1y_3	x_1y_4
x_2	x_2y_1	x_2y_2	x_2y_3	x_2y_4
x_3	x_3y_1	x_3y_2	x_3y_3	x_3y_4

Pelo exposto, utilizando uma das 3 linhas para ir de **A** para **B**, e outra dentre 4 para deslocar-se de **B** para **C**, o turista tem 3 . 4 = 12 opções diferentes para escolher. Assim, observamos que:

> **"Se um determinado evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e um outro evento B, independente de A, pode ocorrer de n maneiras diferentes, a ocorrência sucessiva dos eventos A e B pode dar-se de m . n maneiras distintas."**

Exemplos:

1) Entre um grupo de 8 professores e 20 alunos, de quantas maneiras diferentes podemos escolher um padrinho para esta turma e um aluno orador?

Solução:

Escolha de um padrinho → 8 opções

Escolha do orador → 20 opções

Escolha de um padrinho e um orador → 8 . 20 = 160 opções.

2) Um restaurante põe à disposição de seus clientes 7 opções de pratos quentes, 5 opções de bebidas e 4 opções de sobremesas. Um cliente que deseja um prato quente, um tipo de bebida e uma sobremesa, de quantas opções dispõe?

Solução:

Escolha do prato quente → 7 opções

Escolha da bebida → 5 opções

Escolha da sobremesa → 4 opções

Escolha do prato, bebida e sobremesa → 7 . 5 . 4 = 140 opções.

Análise Combinatória Simples

Neste caso os elementos de cada agrupamento são todos distintos e basicamente divididos em três tipos: **PERMUTAÇÕES, ARRANJOS** e **COMBINAÇÕES**.

Nos exemplos que se seguem, vamos evidenciar características que nos permitam distinguir quais dos agrupamentos devemos considerar.

Sejam as três situações abaixo:

Situação 1

De quantas maneiras diferentes cinco pessoas podem sentar-se em um banco de cinco lugares?

Situação 2

Quantos jogos podemos programar em um turno de um campeonato de futebol disputado por cinco times?

Situação 3

De quantas maneiras podemos escolher um presidente e um vice-presidente de uma agremiação entre cinco da

sócios?

No primeiro caso, como são cinco lugares e cinco pessoas, qualquer que seja a maneira de sentar-se, todas estarão sentadas. Se chamarmos as pessoas de **A, B, C, D** e **E**, algumas maneiras diferentes de sentar-se seriam:

1	2	3	4	5
A	B	C	D	E

1	2	3	4	5
A	C	B	E	D

1	2	3	4	5
E	C	D	A	B

Observamos que os agrupamentos diferem entre si apenas pela ordem de seus elementos, pois de um para outro existe apenas uma permuta de posições, logo estamos diante de um caso de **permutação simples**.

No segundo caso, dos cinco times existentes devemos escolher apenas dois por jogo. Se chamamos os times de **A, B, C, D** e **E**, o jogo do time **A** contra o **B** será o mesmo do que o time **B** contra o **A**, logo a ordem dos elementos nesse agrupamento não influi, daí estamos tratando de **combinações simples**.

No terceiro caso, devemos escolher duas entre as cinco pessoas postulantes aos cargos. Se **A, B, C, D** e **E** são os candidatos, a escolha de **A** para presidente e **B** para vice-presidente não seria a mesma que **B** para presidente e **A** para vice. Assim a ordem dos elementos nesse agrupamento influi, então este é um problema de **arranjos simples**.

Observamos que, no caso da permutação, todos os elementos serão utilizados e a diferença entre os agrupamentos é apenas a ordem em que eles serão considerados.

Na combinação e no arranjo nem todos são necessariamente utilizados, sendo que no caso da combinação a ordem dos elementos não influi, ao passo que no arranjo a ordem influi na formação do agrupamento.

Em seguida, vamos formalizar os conceitos de permutações, combinações e arranjos simples, mostrando a solução numérica para cada uma das três situações aqui analisadas.

Permutações Simples

"Uma **permutação simples** dos **n** elementos distintos de um conjunto é todo agrupamento ordenado desses **n** elementos, onde cada um deles aparece uma única vez".

Cálculo do Número de Permutações Simples

O número de permutações simples que podemos formar a partir dos **n** elementos distintos de um conjunto, é dado por:

$$P_n = n!$$

Assim a primeira situação, antes aludida, pode ser resolvida da seguinte forma:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Logo, aquelas cinco pessoas podem sentar-se de 120 maneiras diferentes.

Combinações Simples

"Uma combinação simples dos n elementos distintos de um conjunto, tomados **p** a **p** ($1 \leq p \leq n$), é todo agrupamento não ordenado de **p** elementos distintos quaisquer desse conjunto".

Cálculo do Número de Combinações Simples

O número de **combinações simples** que podemos formar com os **n** elementos distintos de um conjunto tomados **p** a **p**, é dado por:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Retornando à análise de segunda situação proposta anteriormente, verificamos tratar-se de uma combinação do cinco times tomados dois a dois, daí o cálculo combinatório nos leva a:

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}!}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3}!} = 10$$

Então serão programados 10 jogos para o 1º turno daquele campeonato de futebol.

Arranjos Simples

"Um **arranjo simples** dos **n** elementos distintos de um conjunto, tomado **p** a **p** ($1 \leq p \leq n$), é todo agrupamento **ordenado** de **p** elementos distintos quaisquer desse conjunto".

Cálculos do Número de Arranjos Simples

O número de arranjos simples que podemos formar com os n elementos distintos de um conjunto tomados **p** a **p** é dado por:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Logo, a solução do problema exposto na situação 3 é dada através do arranjo dos cinco sócios escolhidos, ordenadamente, dois a dois:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}!}{\cancel{3}!} = 20$$

Daí, existem 20 maneiras diferentes de escolhermos um presidente e um vice-presidente para aquela agremiação.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) "O número de arranjos simples de **n** elementos tomados **n** a **n** é igual ao número de permutações simples desses **n** elementos".

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$$

b) "O número de combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p** é igual ao quociente do número de arranjos simples dos **n** elementos tomados **p** a **p** pelo número de permutações desses **p** elementos".

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{A_n^p}{P_p}$$

Exemplos:

1) De quantas maneiras diferentes posso arrumar meus

sete livros de Matemática em uma estante?

Solução:

Dispomos de 7 livros, os quais, em cada arrumação diferente, serão **todos utilizados**. A diferença de uma arrumação para outra estará **apenas na ordem** de colocação, assim estes será um problema de **permutações simples**.

$$P_7 = 7! = 7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 5040$$

2) Em uma loja de plantas existem sete vasos expostos. Uma pessoa que deseja adquirir três deles, quantas opções para escolher possui?

Solução:

Chamemos os vasos de **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** e **G**. Observemos que nem todos serão adquiridos, e sim apenas três, logo não é problema de permutação. Verifiquemos agora se a ordem influi na formação do grupamento. A escolha dos vasos **A**, **B** e **C** é idêntica à escolha dos vasos **B**, **C** e **A**, portanto a ordem não influi, daí ser um caso de combinações simples:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{3\,.\,2\,.\,1\,.\,4!} = 35$$

3) Quantos pares ordenados de elementos não repetidos podemos formar com os algarismos **2**, **3**, **5**, **7**, **8** e **9**?

Solução:

Dos seis algarismos apresentados vamos utilizar apenas dois por par. Observe que os pares **(2, 3)** e **(3, 2)** são diferentes, logo a ordem dos elementos influi na formação do par, que é ordenado. Então se trata de um problema de arranjos simples:

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4!}{4!} = 30$$

NOTA: Todos os problemas de contagem, com elementos distintos em que a ordem influa, podem ser resolvidos pelo princípio multiplicativo. Assim, problemas envolvendo permutações e arranjos podem ser resolvidos pelo princípio multiplicativo.

Permutações com Elementos Repetidos

O número de permutações de **n** elementos em que o elemento a aparece α vezes, o elemento b apenas β vezes, o elemento c aparece γ vezes, etc ... é dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}$$

Exemplo:

Quantos anagramas têm a palavra **BATATA**?

Solução:

Os anagramas de uma palavra são obtidos trocando-se a ordem das letras que a compõem. No nosso caso, são anagramas da palavra **BATATA**:

ATATAB, BTTAAA, BATAAT, etc...

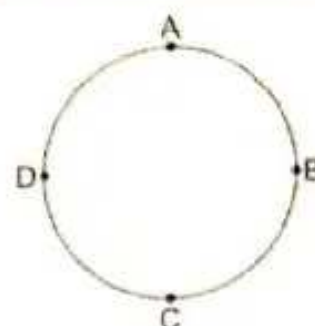
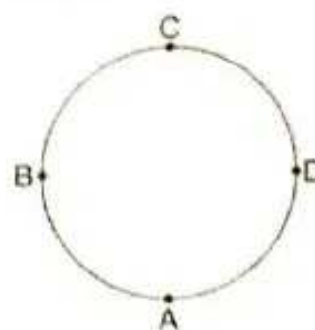
Cada anagrama é uma permutação das letras da palavra inicial. Neste exemplo são seis a serem permutadas, com repetição de três letras **A** e duas letras **T**. Do cálculo combinatório, tiramos que:

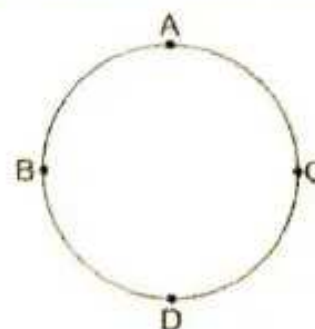
$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3!}{3!\,2\,.\,1} = 60$$

Permutações Circulares

"Dados **n** elementos distintos, duas acomodações desses **n** elementos em torno de uma circunferência (Permutações Circulares) são diferentes se não conseguimos obter uma delas através de uma rotação qualquer da outra."

Exemplo:

Vamos considerar uma mesa circular com quatro cadeiras, nas quais devem sentar-se as pessoas **A**, **B**, **C** e **D**. Uma maneira disto ocorrer é a encontrada abaixo.

Uma outra maneira seria

Observem que se fizermos uma rotação de 180° no sentido horário de todas as pessoas dispostas na primeira acomodação, iremos obter exatamente a segunda. Então elas são acomodações equivalentes e representam uma mesma permutação circular.

Observem agora esta outra disposição

Podemos notar que não há rotação das duas primeiras acomodações que resulte nesta terceira. Assim esta é uma permutação circular diferente das anteriores.

Número de Permutações Circulares

Para obtermos o número de permutações circulares diferentes de **n** elementos, podemos tomar como base de análise a primeira e a terceira acomodações mostradas anteriormente. Nelas a pessoa **A** ficou fixa, enquanto que as demais foram permutadas entre si, o que certamente originou acomodações distintas. Portanto, dados **n** elementos dispostos em uma circunferência, para determinarmos o número de permutações circulares distintas delas, basta fixarmos um dos elementos e permutar os n – 1 restantes, ou seja:

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Portanto existem 60 anagramas da palavra **BATATA.**

Exemplo:

No caso anterior, de quantos modos diferentes as pessoas **A, B, C** e **D** poderiam sentar-se ao redor de uma mesa circular?

Solução:

$(PC)_4 = 3! = 6$

Exercícios

1) Em uma banca de jornais estão expostas as últimas dez edições mensais da revista Matemática é vida. De quantos modos diferentes Juarez pode escolher três desses exemplares para levar para seu filho?

2) Na prateleira de um supermercado são oferecidas seis marcas de biscoitos doces, oito de biscoitos salgados e cinco de batatas fritas. Um cliente que deseja adquirir um pacote de biscoitos doces, outro de biscoitos salgados e um saco de batatas fritas, nesse mercado, quantas opções diferentes possui?

3) Em seu camarim, uma atriz possui oito vestidos, sete pares de sapatos, quatro colares e três carteiras. De quantos modos diferentes ela pode apresentar-se diante da plateia, usando um vestido, um par de sapatos, um colar e uma carteira escolhidos, ao acaso, entre as opções existentes em seu camarim?

4) Em um shopping, há três elevadores que levam os clientes da garagem até o primeiro piso, quatro escadas rolantes que os levam do primeiro ao segundo piso e quatro elevadores panorâmicos que ligam o segundo e o terceiro piso. Quantas maneiras diferentes um cliente tem para sair da garagem e chegar ao terceiro piso?

5) No clube Barapendi há seis armários, numerados de 1 a 6, para que os sócios guardem seus pertences. Em certo dia, há seis associados nas dependências desse clube que desejam utilizar esses armários. De quantos modos diferentes eles poderão escolher os armários que irão utilizar?

6) Palíndromos são números que têm a leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda. São exemplos de palíndromos os números 212, 5555 e 78087. Quantos palíndromos existem com cinco algarismos?

7) (**PUC**) A Copa do Mundo, dividida em cinco fases, é disputada por 32 times. Em cada fase, só metade dos times se mantém na disputa pelo título final. Com o mesmo critério em vigor, uma competição com 64 times iria necessitar de quantas fases?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

8) Certo sindicato possui doze conselheiros, entre os quais quatro serão escolhidos para participar de uma convenção sobre segurança no trabalho. De quantos modos distintos essa escolha pode ser feita?

9) **(UERJ)** Sete figuras diferentes foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual. Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto do outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente. Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

a) 24
b) 35
c) 70
d) 140

10) **(PUC)** Em uma sorveteria, há sorvetes nos sabores morango, chocolate, creme e flocos.

De quantas maneiras podemos montar uma casquinha, com dois sabores diferentes, nessa sorveteria?

a) 6 maneiras
b) 7 maneiras
c) 8 maneiras
d) 9 maneiras
e) 10 maneiras

11) **(PUC)** Uma escola quer fazer um sorteio com as crianças. Então, distribui cartelas que têm cada uma 3 números distintos de 1 a 20. No dia da festa, trarão uma urna com 20 bolas numeradas de 1 a 20 e serão retiradas (simultaneamente) três bolas. A criança que tiver a cartela com os três números ganhará uma viagem.

Quantas cartelas diferentes são possíveis?

a) 1140
b) 2000
c) 6840
d) 8000
e) 4400

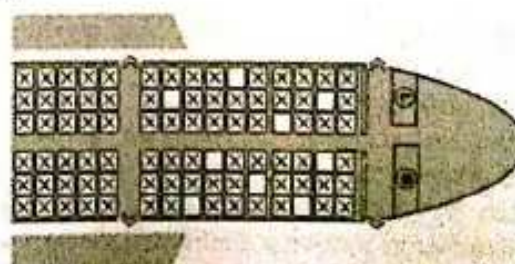
12) **(UERJ)** Todas as n capitais de um país estão interligadas por estradas pavimentadas, de acordo com o seguinte critério: uma única estrada liga cada duas capitais.

Com a criação de duas novas capitais, foi necessária a construção de mais 21 estradas pavimentadas para que todas as capitais continuassem ligadas de acordo com o mesmo critério.

Determine o número n de capitais, que existiam inicialmente nesse país.

13) Entre os oito docentes mais antigos de uma instituição serão escolhidos, ao acaso, o diretor, o diretor-adjunto e o coordenador de projetos especiais. De quantas maneiras diferentes esses cargos podem ser preenchidos, nessa instituição?

14) **(ENEM)** Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$

c) 7!

d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

15) Para acessar a sua conta bancária pela internet, Ângelo precisa criar uma senha formada por duas vogais, de nosso alfabeto, seguidas de quatro algarismos. Quantas opções distintas ele possui para formar a sua senha?

16) **(ENEM)** Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

a) $10^2 \cdot 26^2$

b) $10^2 \cdot 52^2$

c) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

d) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

e) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

17) **(ENEM)** Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficar multiplicado por

a) 100.
b) 90.
c) 80.
d) 25.
e) 20.

18) **(ENEM)** Computadores utilizam, por padrão, dados em formato binário, em que cada dígito, denominado de bit, pode assumir dois valores (0 ou 1). Para representação de caracteres e outras informações, é necessário fazer uso de uma sequência de bits, o byte. No passado, um byte era composto de 6 bits em alguns computadores mas atualmente tem-se a padronização que o byte é um octeto, ou seja, uma sequência de 8 bits. Esse padrão permite representar apenas 2^8 informações distintas.

Se um novo padrão for proposto, de modo que um byte seja capaz de representar pelo menos 2 560 informações distintas, o número de bits em um byte deve passar de 8 para

a) 10.
b) 12.
c) 13.
d) 18.
e) 20.

19) Uma banca de feira oferece oito tipos de frutas e seis tipos de legumes a seus clientes. Juracy pretende comprar, aleatoriamente, três tipos diferentes de frutas e dois diferentes tipos de legumes nessa barraca. De quantas maneiras ela pode fazer sua escolha?

20) Na vitrine de uma confeitaria há seis salgados e oito doces, todos de tipos diferentes. Um cliente solicita que a atendente embale exatamente cinco dos artigos expostos para viagem, sendo que haja, no mínimo, dois doces. Quantas opções diferentes a atendente tem para satisfazer o pedido do cliente?

21) **(PUC)** O técnico da seleção brasileira de futebol precisa convocar mais 4 jogadores, dentre os quais exatamente um deve ser goleiro.

Sabendo que na sua lista de possibilidades para essa convocação existem 15 nomes, dos quais 3 são goleiros, qual é o número de maneiras possíveis de ele escolher os 4 jogadores?

a) 220
b) 660
c) 1980
d) 3960
e) 7920

22) **(ENEM)** O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$

b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

c) $\frac{10!}{2! \times 8!} - 2$

d) $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$

e) $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

23) **(UERJ)** Com o objetivo de melhorar o tráfego de veículos, a prefeitura de uma grande cidade propôs a construção de quatro terminais de ônibus. Para estabelecer conexão entre os terminais, foram estipuladas as seguintes quantidades de linhas de ônibus:

- do terminal A para o B, 4 linhas distintas;
- do terminal B para o C, 3 linhas distintas;
- do terminal A para o D, 5 linhas distintas;
- do terminal D para o C, 2 linhas distintas.

Não há linhas diretas entre os terminais A e C.

Supondo que um passageiro utilize exatamente duas linhas de ônibus para ir do terminal A para o terminal C, calcule a quantidade possível de trajetos distintos que ele poderá fazer.

24) Em uma lanchonete há oito frutas disponíveis para o preparo de sucos, sendo que há a possibilidade de sucos mistos, à vontade do cliente. Quantas opções diferentes de sabor um cliente possui para solicitar um suco nessa lanchonete?

25) Quantos anagramas tem a palavra AMIGO?

26) Quantos anagramas tem a palavra MATEMATICA?

27) **(PUC)** A quantidade de anagramas da palavra CONCURSO é:

a) 2520
b) 5040
c) 10080
d) 20160
e) 40320

28) Quantos anagramas tem a palavra MARTELO, em que:

a) as consoantes encontram-se juntas, em ordem alfabética?
b) as consoantes encontram-se juntas, em qualquer ordem?
c) as consoantes encontram-se juntas e as vogais encontram-se juntas, todas em ordem alfabética entre si?
d) as consoantes encontram-se juntas e as vogais encontram-se juntas, em qualquer ordem?
e) as consoantes encontram-se em ordem alfabética entre si?
f) as vogais encontram-se em ordem alfabética entre si?
g) as vogais encontram-se em ordem alfabética entre si e as consoantes também?

29) **(PUC)** Seja n a quantidade de anagramas da palavra FILOSOFIA que possuem todas as vogais juntas.

Temos que n vale:

a) 1800
b) 3600
c) 4800
d) 181440
e) 362880

30) Para receber os seus boletins, dez estudantes, sendo seis meninas e quatro meninos, devem formar uma fila. De quantos modos diferentes essa fila poderá ser formada, de modo que tanto as meninas, entre si, quanto os meninos, entre si, estejam em ordem crescente de altura?

31) Qual o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para garantirmos que haja 6 delas que tenham nascido em um mesmo dia da semana? E para garantirmos que haja 5 delas que tenham nascido em um mesmo mês?

32) O alvo de certo jogo de dardos é um círculo dividido igualmente em seis setores, numerados de 1 a 6. Qual o número mínimo de vezes que o dardo deve ser lançado e acertado no alvo, de modo que possamos garantir que um dos setores do alvo será acertado 3 vezes?

33) **(UERJ)** Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso.

Para garantir a retirada de 4 bolas de uma mesma cor, o menor número de moedas a serem inseridas na máquina corresponde a:

a) 5
b) 13
c) 31
d) 40

34) Quantos números formados por quatro algarismos há no sistema decimal? E com quatro algarismos distintos?

35) Um estudante ganhou doze livros distintos, sendo cinco de Matemática, quatro de Física e os demais de Química. De quantos modos diferentes ele pode arrumar esses livros em sua estante, lado a lado, de modo que livros de uma mesma matéria fiquem juntos?

36) Em uma cidade, as bicicletas tinham placas formadas por duas letras, seguidas de três algarismos. Com o objetivo de aumentar o número de placas disponíveis, as placas antigas foram substituídas por novas placas formadas por três letras, seguidas de dois algarismos. Qual o aumento percentual, ocasionado por essa mudança, no número de placas disponibilizadas para os usuários? (Considere as 26 letras de nosso alfabeto.)

37) Uma lanchonete disponibiliza o serviço de sanduíche montado. Assim sendo, oferece aos clientes duas opções de tamanho: médio e grande, quatro opções de pães: ciabata, árabe, alho e milho, e cinco opções de recheio: presunto, queijo prato, salame, peito de peru e ricota. Para montar o seu sanduíche, o cliente deve escolher um tamanho, um tipo de pão e de um a cinco recheios diferentes. Quantas opções diferentes, para a escolha do sabor, possui um cliente que deseja consumir um sanduíche nessa lanchonete?

38) **(ENEM)** Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \times 8! + (3!)^2$

b) $8! \times 5! \times 3!$

c) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$

d) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$

e) $\frac{16!}{2^8}$

39) **(ENEM)** Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile do Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

a) 21
b) 90
c) 750
d) 1 250
e) 3 125

40) De quantas formas diferentes seis crianças podem arrumar-se para uma brincadeira de roda?

41) Em torno de uma mesa circular são colocadas oito cadeiras idênticas. Nelas deverão sentar-se oito pessoas, sendo quatro mulheres e quatro homens. De quantos modos diferentes eles podem sentar-se à mesa, de modo que uma mulher não fique ao lado de outra mulher?

42) No exercício anterior, entre as mulheres está Diana e entre os homens está Frederico, que, por motivos estritamente pessoais, não podem sentar-se lado a lado. De quantas formas diferentes podemos dispor essas pessoas em torno da mesa de modo que essa condição seja satisfeita?

43) Dez casais serão dispostos nos dez carros de uma montanha russa, sendo que cada deve ser ocupado por exatamente duas pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem ser distribuídos de modo que cada casal permaneça junto? Esse mesmo grupo foi andar em uma roda gigante formada por dez balanços com capacidade para duas pessoas cada. De quantos modos diferentes elas podem ser dispostas de modo que cada casal permaneça junto?

44) Quantas pulseiras diferentes podem ser produzidas com exatamente seis pedras de cores também diferentes?

45) Sobre a reta r são marcados seis pontos distintos e sobre a reta s, paralela à reta r, são marcados outros cinco pontos distintos.

Determine:

a) o número de triângulos que podemos formar com vértices nesses pontos.

b) o número de quadriláteros convexos que podemos formar com vértices nesses pontos.

46) Sobre uma circunferência são marcados cinco pontos distintos. Quantos polígonos diferentes podemos formar com vértices nesses pontos?

47) Dispõe-se de cinco cores distintas para colorir o retângulo que está dividido em quatro outros retângulos menores R_1, R_2, R_3 e R_4, utilizando em cada um deles uma única cor. De quantos modos diferentes podemos colori-los, de maneira que retângulos com exatamente um lado comum não devem ser coloridos da mesma cor? E se quisermos utilizar apenas duas cores para colori-los?

R_1	R_3
R_2	R_4

48) **(ENEM)** A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D, e E, disposta conforme a figura.

<table>
<tr><td rowspan="2">A</td><td>B</td></tr>
<tr><td>C</td></tr>
<tr><td colspan="2">D</td></tr>
<tr><td colspan="2">E</td></tr>
</table>

Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor.

O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é

a) $1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$.
b) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$.
c) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 3$.
d) $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2$.
e) $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

49) Na sala de espera de um consultório médico existem quatro cadeiras de cores diferentes. Nessa sala encontram-se quatro gestantes e cinco idosos. De quantos modos diferentes a atendente pode acomodar duas gestantes e dois idosos nessas cadeiras?

50) Com os algarismos de 1 a 9, quantos números diferentes de 4 algarismos podemos formar com exatamente dois algarismos pares? E se os algarismos fossem distintos?

51) Uma montadora participará de uma exposição automobilística com seis modelos diferentes, sendo dois deles de cor vermelha e os demais de cores variadas. Esses automóveis serão arrumados em um estande com capacidade para três modelos, somente com cores distintas. De quantas maneiras diferentes esse estande poderá ser arrumado?

52) Uma turma de pós-graduação tem aulas às segundas, quartas e sextas-feiras, de 13h30min às 15h e de 15h30min às 17h. As matérias são Topologia, Equações Diferenciais e Combinatória, cada uma com duas aulas por semana em dias diferentes. De quantos modos diferentes podemos fazer o horário dessa turma?

53) **(UERJ)** A tabela abaixo apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto roman

c) o número de quadriláteros que podemos formar com vértices nesses pontos.

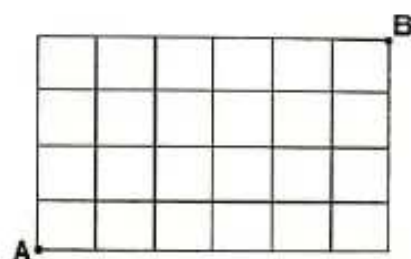
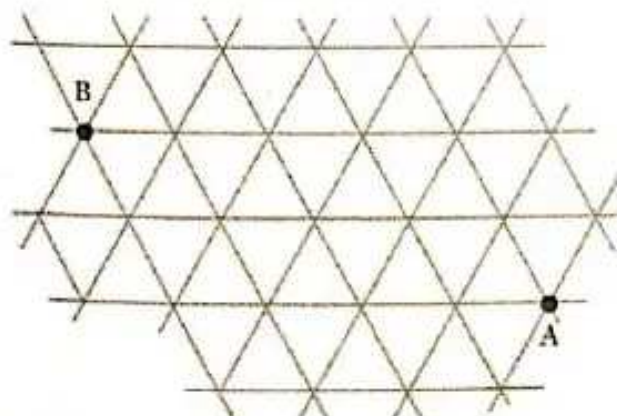
PAÍS	DESCRIÇÃO DO CRITÉRIO	EXEMPLO DE PLACA
X	3 Letras e 3 algarismos, em qualquer ordem	M3MK09
Y	um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem	YBW0299

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a n e no país Y igual a p.

A razão $\frac{n}{p}$ corresponde a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 6

54) Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro "Combinatória é fácil" e 5 exemplares de "Combinatória não é difícil". Considerando que os livros com o mesmo título são indistinguíveis, determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares do livro "Combinatória não é difícil" nunca estejam juntos.

55) Uma formiga encontra-se no vértice A de um reticulado, e deseja chegar até o ponto B, caminhando sempre sobre os segmentos da figura abaixo, deslocando-se sempre para a direita ou para cima. De quantos modos diferentes ela pode realizar o seu intento?

56) **(UERJ)** Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.

Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d.

Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, X equivale a:

a) 20
b) 15
c) 12
d) 10

57) Uma partícula desloca-se sobre uma reta, percorrendo 1 cm para a esquerda ou para a direita em cada movimento. Calcule de quantas maneiras diferentes a partícula pode realizar uma sequência de 10 movimentos, terminando na posição de partida.

58) **(UERJ)** Uma criança ganhou seis picolés de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate, representados, respectivamente, pelas letras B, M e C. De segunda a sábado, a criança consome um único picolé por dia, formando uma sequência de consumo dos sabores. Observe estas sequências, que correspondem a diferentes modos de consumo:

(B,B,M,C,M,C) ou (B,M,M,C,B,C) ou (C,M,M,B,B,C)

O número total de modos distintos de consumir os picolés equivale a:

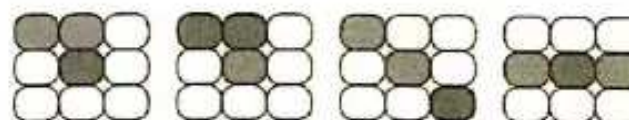
a) 6
b) 90
c) 180
d) 720

59) **(UERJ)** Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes – vermelha, amarela e verde. Observe a figura:

Considere as seguintes informações:

- cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

60) **(UERJ)** Um painel de iluminação possui nove seções distintas, e cada uma delas acende uma luz de cor vermelha ou azul. A cada segundo, são acesas, ao acaso, duas seções de uma mesma cor e uma terceira de outra cor, enquanto as seis demais permanecem apagadas. Observe quatro diferentes possibilidades de iluminação do painel:

O tempo mínimo necessário para a ocorrência de todas as possibilidades distintas de iluminação do painel, após seu acionamento, é igual a x minutos e y segundos, sendo $y < 60$.

Os valores respectivos de x e y são:

a) 4 e 12
b) 8 e 24
c) 25 e 12
d) 50 e 24

61) **(ENEM)** O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam o preto e o branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são escuras ou claras.

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14
b) 18
c) 20
d) 21
e) 23

62) **(UERJ)** Na ilustração abaixo, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.

Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:

O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:

a) 624
b) 676
c) 715
d) 720

63) O jogo da Mega-Sena consiste no sorteio de 6 números distintos entre 1 e 60. Quantas apostas diferentes são possíveis de serem feitas em cartões com seis dezenas cada?

64) Antonieta vai apostar na Mega-Sena. Assim sendo, escolheu 20 números e fez todos os jogos, com 6 dezenas, possíveis de serem realizados com as 20 dezenas escolhidas. Se ela acertar as 6 dezenas sorteadas, além da aposta sorteada com a sena, quantas apostas premiadas com a quina (cinco números corretos) ela conseguirá?

65) **(ENEM)** Considere que uma pessoa decida apostar na Mega-Sena e esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, pois o número de chances de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é aproximadamente,

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor.

b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor.

c) 4 vezes menor.

d) 9 vezes menor.

e) 14 vezes menor.

66) **(ENEM)** Considere o seguinte jogo de apostas:

Em uma cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele em uma mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela em R$
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

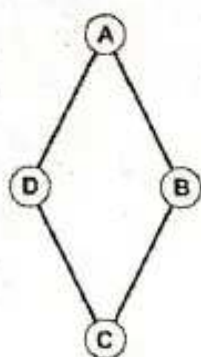
Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

- ARTHUR: 250 cartelas com 6 números escolhidos.
- BRUNO: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos.
- CAIO: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos.
- DOUGLAS: 4 cartelas com 9 números escolhidos.
- EDUARDO: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

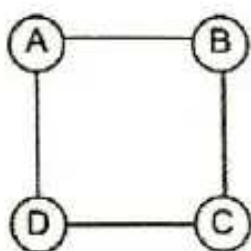
Os dois apostadores com maiores chances de serem premiados são

a) Caio e Eduardo.
b) Arthur e Eduardo.
c) Bruno e Caio.
d) Arthur e Bruno.
e) Douglas e Eduardo.

67) **(ENEM)** Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura a seguir ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.

Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 36

68) **(ENEM)** Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes. Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes.

De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?

a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 72

69) Em um programa de auditório, um espectador é chamado ao palco para participar de uma brincadeira. Sobre uma mesa estão colocadas quatro caixas, numeradas de 1 a 4. O espectador é vendado e lhe são dadas quatro bolas, numeradas de 1 a 4, que ele deve colocar uma em cada caixa. Após a colocação das bolas nas caixas, o espectador recebe um brinde caso haja ao menos uma coincidência do número de uma caixa com o número da bola nela colocada. Quantas chances possui o espectador de ganhar esse brinde?

70) Por ocasião do Natal, cinco amigos resolvem fazer a brincadeira de amigo oculto. Os nomes são escritos em papeis, colocados em uma urna e cada um dos participantes deve sortear o seu "amigo oculto". No caso de alguém tirar o seu próprio nome o sorteio deve ser repetido. Quantas são as chances de que esse sorteio seja válido na primeira tentativa?

71) Considerando a equação $x + y + z + w = 8$, determine:

a) o número de soluções inteiras positivas.
b) o número de soluções inteiras não negativas.

72) Uma pessoa quer comprar seis empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que ela vai comprar ao menos uma

73) Uma empresa resolveu distribuir sete cestas de Natal entre seus quatro funcionários. Para isto, colocou em uma urna fichas com os nomes desses funcionários. A cada sorteio de uma cesta, a ficha sorteada era reposta na urna. De quantas maneiras diferentes as cestas podem ser distribuídas?

74) **(PUC)** Em uma sorveteria há sorvetes nos sabores morango, chocolate, creme e flocos.

De quantas maneiras podemos montar uma casquinha com duas bolas nessa sorveteria?

a) 10 maneiras
b) 9 maneiras
c) 8 maneiras
d) 7 maneiras
e) 6 maneiras

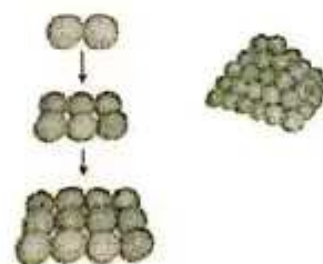
75) **(UERJ)** Uma criança possui um cofre com 45 moedas: 15 de dez centavos, 15 de cinquenta centavos e 15 de um real. Ela vai retirar do cofre um grupo de 12 moedas ao acaso. Há vários modos de ocorrer essa retirada. Admita que as retiradas são diferenciadas apenas pela quantidade de moedas de cada valor.

Determine quantas retiradas distintas, desse grupo de 12 moedas, a criança poderá realizar.

76) Um grupo de nove pessoas dentre elas os irmãos João e Pedro, foi acampar. Na hora de dormir montaram três barracas diferentes, sendo que, na primeira, dormiram duas pessoas; na segunda, três pessoas; e, na terceira, as quatro restantes. De quantos modos diferentes elas se podem organizar, sabendo que a única restrição é a de que os irmãos João e Pedro NÃO podem dormir na mesma barraca?

77) Nove pessoas serão distribuídas em três equipes para concorrer a uma gincana. Determine o número de maneiras diferentes de formar essa três equipes.

78) **(ITA)** De quantos modos diferentes se pode pintar um cubo, usando seis cores diferentes, sendo cada face de uma cor?

79) **(UERJ)** Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixada sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração a seguir.

Determine:

a) o valor da soma $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{18}^2$.

b) o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

empada de cada sabor, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?

80) Uma concessionária de automóveis possui 40 grupos de consórcio ativos, numerados de 1 a 40. Sabe-se que o grupo de número n possui n + 1 consorciados não contemplados. Devido à queda nas vendas de automóveis, a concessionária decidiu, na próxima assembleia, distribuir 80 automóveis, do mesmo modelo e cor, por sorteio, entre os participantes de seus grupos de consórcio. Serão sorteados exatamente 2 consorciados por grupo. O grupo 1, o mais antigo, tem apenas 2 consorciados não contemplados, e, portanto, há apenas 1 possível resultado no sorteio, pois $C_2^2=1$, para distribuir os dois automóveis entre eles; no grupo 2 há 3 consorciados não contemplados, logo há 3 resultados possíveis, pois $C_3^2=3$, para a escolha dos dois contemplados; no grupo 3 há 4 não contemplados e, daí, há 6 resultados possíveis, pois $C_4^2=6$, e assim, sucessivamente, podemos determinar os números de resultados possíveis até o último grupo. Qual o total de resultados diferentes que podem ter os sorteios para indicar os dois contemplados de cada grupo?

Gabarito

1) 120
2) 240
3) 672
4) 48
5) 720
6) 900
7) b
8) 495
9) b
10) a
11) a
12) 10
13) 336
14) a
15) 250 000
16) e
17) a
18) b
19) 840
20) 1 876
21) b
22) a
23) 22
24) 255
25) 120
26) 151 200
27) c
28) a) 24
    b) 576
    c) 2
    d) 288
    e) 210
    f) 840
    g) 35
29) a
30) 210
31) 36 e 49
33) c
34) 9 000 e 4 536
35) 103 680
36) 160%
37) 248
38) b
39) c
40) 120
41) 144
42) 72
43) $10!.2^{10}$ e $9!.2^{10}$
44) 60
45) a) 135
    b) 150
    c) 450
46) 37
47) 240 e 20
48) b
49) 1 440
50) 2 400 e 1 440
51) 96
52) 48
53) b
54) 792
55) 210
56) b
57) 252
58) b
59) 1 680
60) b
61) c
62) a
63) 50 063 860
64) 84
65) c
66) a
67) b
68) c
69) 15
70) 44
71) a) 35
    b) 165
72) 10
73) 120
74) a
75) 91
76) 910
77) 280
78) 30
79) a) 969
    b) 1360
80) 11 480

Anotações

Capítulo X

PROBABILIDADE

Introdução

Em todas as culturas sempre houve um fascínio especial pelos jogos. Desde os tempos da Grécia antiga, quando um osso de cabra era utilizado como uma espécie de dado, passando pela explosão do jogo de cartas na Europa, na Idade Média, até os dias de hoje com as loterias; por vício ou como lazer, certo é que os jogos sempre tiveram uma infinita legião de adeptos. A partir daí, nasceu um importante ramo da Matemática que é a teoria das probabilidades, que a princípio se destinava ao estudo das possibilidades de um jogador vencer uma partida de um certo jogo. No entanto, o cálculo probabilístico, com o passar do tempo, tem ocupado lugar de destaque, seja na Genética, na Eletricidade, nas Ciências Atuariais e em tantas outras situações do nosso cotidiano. A seguir iremos mostrar os principais elementos que compõem tal teoria e suas aplicações.

Experimento Aleatório

Um experimento no qual, a princípio, não podemos antever o resultado é dito **experimento** ou **experiência aleatória**.

Exemplos:

1) Retirada de uma carta de um baralho e posterior observação de seu naipe.
2) Lançamento de um dado não viciado e verificação da face que ficou voltada para cima.
3) Em uma caixa com uma dúzia de ovos dos quais quatro estão estragados, considere a retirada de um deles, ao acaso, e a observação se ele está estragado ou não.
4) Lançamento de três moedas equilibradas e a verificação do número de "caras" obtidas.

Devemos observar que nos experimentos acima não podemos prever os resultados, logo se tratam de **experimentos aleatórios**.

Espaço Amostral

O **espaço amostral** de um experimento aleatório é o conjunto cujos elementos são os possíveis resultados de tal experimento. Representaremos o espaço amostral de um experimento pela letra **A**.

Assim, nos reportando aos quatro exemplos do item anterior (experimento aleatório), vamos encontrar o espaço amostral de cada caso.

No experimento 1, A = {ouros, copas, paus, espadas}. Já no experimento 2, o espaço amostral será $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, enquanto no experimento 3, A = {bom, estragado} e finalmente no experimento 4 temos $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Evento

Considerando o espaço amostral **A** de um certo experimento aleatório, chamamos evento a qualquer um subconjunto de **A**.

Exemplo 1

Seja o experimento aleatório: **"Retirada de uma bola de uma urna contendo sete bolas idênticas numeradas de 1 a 7."**

Temos para espaço amostral o conjunto:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

São eventos em relação a esse espaço amostral:

Evento E_1: ocorrência de um número ímpar, ou seja

$$E_1 = \{1, 3, 5, 7\}$$

Evento E_2: ocorrência de um número múltiplo de 4;

$$E_2 = \{4\}$$

Evento E_3: ocorrência de um número positivo;

$$E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Evento E_4: ocorrência de um número irracional;

$$E_4 = \emptyset$$

Evento E_5: ocorrência de um número par:

$$E_5 = \{2, 4, 6\}$$

Considerações Importantes

1) Evento certo

É aquele que ocorre em qualquer realização de um determinado experimento aleatório. Neste caso o **evento certo** é o próprio espaço amostral.

Note que o **evento E_3**, do exemplo anterior, é um evento certo, pois qualquer resultado do experimento aleatório em questão é elemento de E_3.

2) Evento impossível

É aquele que não ocorre em qualquer realização de um determinado experimento aleatório. Assim o evento impossível é representado pelo conjunto vazio.

O **evento E_4** do exemplo anterior é um evento impossível, pois qualquer retirada nunca trará um número irracional.

3) Eventos mutuamente exclusivos

São eventos que nunca podem ocorrer simultaneamente, daí terem interseção vazia.

Os eventos E_1 e E_2 são mutuamente exclusivos pois é impossível a obtenção de um número que seja, ao mesmo tempo, ímpar e múltiplo de 4, daí $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

4) Eventos complementares

São eventos mutuamente exclusivos, cuja união é igual ao próprio espaço amostral.

Os eventos E_1 e E_5 são tais que $E_1 \cap E_5 = \emptyset$ (mutuamente exclusivos) e $E_1 \cup E_5 = A$. Então os eventos E_1 e E_5 são complementares em relação ao espaço amostral A.

Exemplo 2

Consideremos o experimento aleatório: **"Observação dos sexos dos dois primeiros filhos (não gêmeos) de um casal".**

Representando por **M** o sexo masculino e por **F** o feminino, teremos como espaço amostral:

..., e a posterior verificação do número a ela associada".

A = {(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)}

91

São exemplos de eventos relacionados a este espaço amostral:

Evento E_1: ocorrência do nascimento de um menino e, a posteriori, de uma menina:

$$E_1 = \{(M, F)\}$$

Evento E_2: ocorrência do nascimento de ao menos uma menina:

$$E_2 = \{(M, F), (F, M), (F, F)\}$$

Evento E_3: ocorrência do nascimento de um menino no segundo parto:

$$E_3 = \{(M, M), (F, M)\}$$

Probabilidade

A probabilidade baseia-se na análise de experimentos aleatórios. Se um determinado experimento aleatório for realizado uma grande quantidade de vezes, cada elemento de seu espaço amostral terá uma frequência que tende a estabilizar-se em torno de um limite. É nessa estabilidade que se baseia a teoria das probabilidades.

Em um **espaço amostral equiprobabilístico**, ou seja, em que todos os elementos têm a mesma chance de ocorrer, definimos a probabilidade da ocorrência de um evento **E** como sendo:

$$p(E) = \frac{\text{Nº DE CASOS FAVORÁVEIS A } E}{\text{Nº TOTAL DE CASOS POSSÍVEIS}}$$

Exemplo 1:

No lançamento de uma moeda equilibrada, qual a probabilidade de obtermos uma cara?

Solução:

Espaço amostral: A = {cara, coroa}
Evento: E = {cara}

$$p(E) = \frac{\text{Nº DE CASOS FAVORÁVEIS}}{\text{Nº DE CASOS POSSÍVEIS}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Exemplo 2:

Qual a probabilidade de uma criança nascer em um mês que possui 30 dias?

Solução:

Espaço amostral: A = {JAN, FEV, MAR, ABR, MAI, JUN, JUL, AGO, SET, OUT, NOV, DEZ}
E = {ABR, JUN, SET, NOV}

$$p(E) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

1) A soma das probabilidades dos elementos do espaço amostral de um experimento aleatório é sempre igual a 1. Assim, seja $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ o espaço amostral de um determinado experimento aleatório, daí temos que:

$$p(x_1) + p(x_2) + ... + p(x_n) = 1$$

2) A probabilidade da ocorrência de um certo evento E varia de 0 (zero), no caso do evento impossível, a 1 (um) em se tratando do evento certo. Logo, qualquer que seja um evento E:

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

3) É sabido da teoria dos conjuntos que:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, então:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Exercícios

1) Qual dos experimentos aleatórios a seguir possui o espaço amostral com o maior número de elementos?
   a) Lançamento de um dado honesto e a verificação da face que ficou voltada para baixo.
   b) Lançamento de uma moeda equilibrada três vezes consecutivas e a verificação da face voltada para cima.
   c) Verificação dos sexos de dois bebês nascidos em um mesmo dia em uma maternidade.
   d) Escolha, ao acaso, de um divisor positivo do número 20.
   e) Observação do naipe de uma carta retirada aleatoriamente de um baralho não viciado com 52 cartas.

2) **(PUC)** Se a = 2n + 1 com n ∈ {1, 2, 3, 4}, então a probabilidade de o número a ser par é
   a) 1
   b) 0,2
   c) 0,5
   d) 0,8
   e) 0

3) **(ENEM)** Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.
   Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?
   a) $\frac{1}{100}$
   b) $\frac{19}{100}$
   c) $\frac{20}{100}$
   d) $\frac{21}{100}$
   e) $\frac{80}{100}$

4) **(PUC)** Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {6, 7, 8, 9, 10}. Escolhendo-se ao acaso um elemento de A e um elemento de B, a probabilidade de que a soma dos dois números escolhidos seja um número par é:
   a) $\frac{1}{2}$
   b) $\frac{3}{5}$
   c) $\frac{12}{25}$
   d) $\frac{6}{25}$

5) Em uma urna há 4 bolas brancas e 8 bolas pretas.

a) Se retirarmos, ao acaso, uma bola, qual a probabilidade de que ela seja branca?

b) Se retirarmos, ao acaso, duas bolas, sem reposição, qual a probabilidade de que elas sejam de cores diferentes?

c) Se retirarmos, ao acaso, uma bola dessa urna, repusermos a bola retirada na urna, e fizermos uma segunda retirada aleatória, qual a probabilidade de que elas tenham a mesma cor?

d) Se retirarmos duas bolas, sem reposição, qual a probabilidade de que a segunda seja preta, sabendo que a primeira bola retirada foi preta?

6) Em uma turma de formandos há dez alunos, sendo seis meninas e quatro meninos. Seus nomes são escritos em papeis e colocados em uma urna para que dois deles sejam sorteados, de forma consecutiva, para participarem da comissão de formatura. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de que os alunos sorteados sejam de sexos diferentes?

b) Qual a probabilidade que o segundo estudante sorteado seja um menino, sabendo que o primeiro sorteado foi um menino?

7) **(PUC)** Considere uma urna contendo 10 bolas vermelhas e 6 bolas verdes. Retirando-se simultaneamente duas bolas da urna, qual é a probabilidade de que as duas bolas selecionadas sejam vermelhas?

a) 1/4
b) 3/8
c) 1/2
d) 2/3
e) 2

8) Em uma urna há dez bolas numeradas de 1 a 10. Retirada uma bola, ao acaso, qual a probabilidade de que nela haja um número primo?

9) Se no exercício anterior forem retiradas duas bolas, qual a probabilidade de que os números sorteados tenham

a) como soma um número ímpar?

b) como produto um número par?

10) **(PUC)** Considere um dado comum (6 faces). Jogando o dado uma vez, qual é a probabilidade de sair a face 1?

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

11) No lançamento de um dado equilibrado, qual a probabilidade de obtermos uma face com um múltiplo de 3?

12) **(PUC)** João joga dois dados comuns e soma os valores. Qual a probabilidade de a soma ser maior ou igual a 10?

a) $\frac{3}{11}$

b) $\frac{1}{6}$

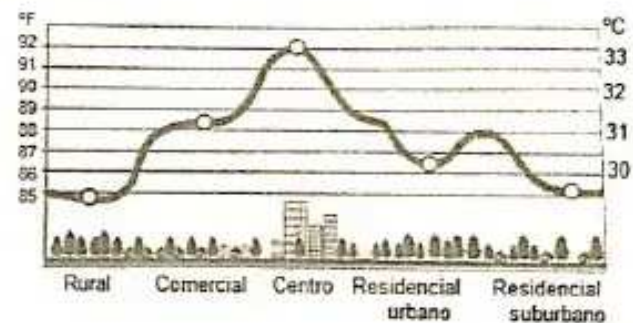
c) 3

d) $\frac{5}{36}$

e) $\frac{10}{36}$

13) **(PUC)** Jogamos uma moeda comum e um dado comum. A probabilidade de sair um número par e a face coroa é:

a) 0,1
b) 0,2
c) 0,25
d) 0,33
e) 0,5

14) **(ENEM)** Rafael mora no centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: rural, comercial, residencial urbano ou residencial suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico.

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é de

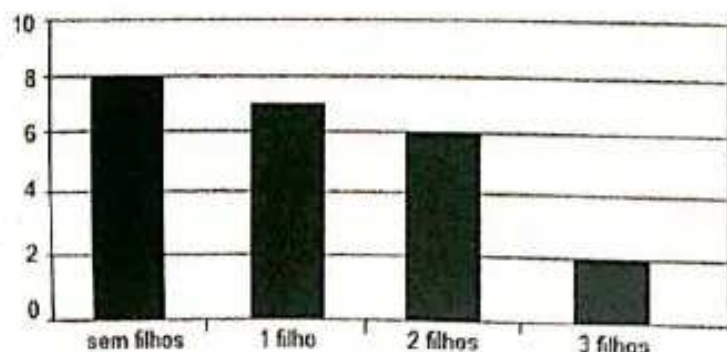
a) $\frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{2}{5}$.

d) $\frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{4}$.

15) **(ENEM)** As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo.

Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido filho(a) único(a) é

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{7}{15}$.

d) $\frac{7}{23}$.

e) $\frac{7}{25}$.

16) **(ENEM)** Até o fim do Império, as mulheres eram tolhidas em seu acesso à escola. Já na década de 1930, o número de meninas e meninos nas instituições de ensino fica igual. Hoje, as mulheres são maioria em todos os níveis de ensino do fundamental à pós-graduação. Veja a tabela a seguir:

Pessoas com 10 ano ou mais, segundo o sexo e o grupos de anos de estudos, em %					
Anos de estudo	Menos de 1	1 a 3	4 a 7	8 a 10	11 ou mais
Homens	10,3	13.5	29.1	17.4	29.6
Mulheres	10.0	11.8	27.4	17.1	33.4

Considerando os dados apresentados tem-se que, escolhida ao acaso uma brasileira com mais de 10 anos a probabilidade de que ela possua oito anos ou mais de estudos é igual a

a) 17,1%.
b) 29,6%.
c) 34,5%.
d) 50,5%.
e) 63,0%.

17) **(ENEM)** O quadro apresenta cinco cidades de um estado, com seus respectivos números de habitantes e quantidade de pessoas infectadas com o vírus da gripe. Sabe-se que o governo desse estado destinará recursos financeiros a cada cidade, em valores proporcionais à probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso na cidade, estar infectada.

Cidade	I	II	III	IV	V
Habitantes	180 000	100 000	110 000	165 000	175 000
Infectados	7 800	7 500	9 000	6 500	11 000

Qual dessas cidades receberá maior valor de recursos financeiros?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

18) Um prédio de três andares, com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. Qual a probabilidade de que cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado?

19) A probabilidade de Diana completar uma maratona é de 20% e a de Anderson é 10%. Na próxima maratona do Rio, qual a probabilidade de

a) ambos completarem a prova?
b) nenhum deles completar a prova?
c) apenas Diana completar a prova?
d) ao menos um deles completar a prova?

20) **(PUC)** As cartas de um baralho comum (13 de copas, 13 de paus, 13 de ouros e 13 de espadas) são empilhadas. Qual a probabilidade de a carta de cima ser de copas e a de baixo também?

21) Um baralho é formado por 52 cartas divididas igualmente em quatro naipes: ouros, copas, paus e espadas. Se retirarmos, ao acaso, uma carta desse baralho, qual a probabilidade de obtermos

a) um ás?
b) uma carta de copas?
c) uma dama ou uma carta de paus?
d) uma carta com um número de 7 a 10 ou uma carta de ouros?

22) **(PUC)** Maria joga três moedas e anota os resultados. Qual é a probabilidade de que nenhum dos três resultados seja cara?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

23) No lançamento de uma moeda equilibrada cinco vezes consecutivas, qual a probabilidade de obtermos

a) três caras e duas coroas?
b) quatro caras?

24) **(ENEM)** Uma caixa contém uma cédula de R$ 5,00, uma de R$ 20,00 e duas de R$ 50,00 de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior.

A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R$ 55,00 é

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{5}{9}$

25) **(ENEM)** O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \cdot (0{,}2\%)^4$
b) $4 \cdot (0{,}2\%)^2$
c) $6 \cdot (0{,}2\%)^2 \cdot (99{,}8\%)^2$
d) $4 \cdot (0{,}2\%)$
e) $6 \cdot (0{,}2\%) \cdot (99{,}8\%)$

26) **(PUC)** Qual a probabilidade de um casal com quatro filhos ter dois do sexo masculino e dois do sexo feminino?

27) Em uma bandeja há doze doces, sendo seis brigadeiros, quatro casadinhos e dois beijinhos de coco. Andrea retira, ao acaso, dois doces dessa bandeja. Qual a probabilidade de que

a) ambos sejam brigadeiros?
b) seja um casadinho e um beijinho?
c) sejam de tipos diferentes?

28) Antenor adquiriu um cofre para guardar seus pertences. Na frente desse cofre há um teclado com dez teclas: as cinco vogais e os cinco menores algarismos significativos. O segredo do cofre deve ser uma sequência de duas letras quaisquer do teclado, seguidas de três algarismos distintos desse teclado. Qual a probabilidade de que alguém abra esse cofre, ao acaso, com uma única tentativa?

29) Numa urna são colocadas 5 bolas brancas, além de certa quantidade de bolas azuis e pretas. Retirando-se, ao acaso, uma bola dessa urna, a probabilidade dela ser preta é 1/4, enquanto a probabilidade dela ser azul é 2/3. Determine a quantidade total de bolas colocadas nessa urna.

30) **(UNICAMP)** Um dado é jogado três vezes, uma após a outra. Pergunta-se:

a) Quantos são os resultados possíveis em que os três números obtidos são diferentes?
b) Qual a probabilidade de a soma dos resultados ser maior ou igual a 16?

31) Em uma urna são colocadas dez bolas numeradas de 1 a 10. O jogador A retira, ao acaso, uma bola dessa urna, verifica o número nela escrito e a repõe na urna. O jogador B retira, ao acaso, uma bola dessa urna e verifica o número escrito nela. O jogador A vence a disputa se o número escrito na bola que ele retirou for maior ou igual ao número tirado pelo jogador B. Qual a probabilidade do jogador A vencer a disputa?

32) **(ENEM)** Um experimento foi conduzido com o objetivo de avaliar o poder germinativo de duas culturas de cebola, conforme a tabela.

Germinação de sementes de duas culturas de cebola			
Cultura	Germinação		Total
	Germinaram	Não germinaram	
A	392	8	400
B	381	19	400
Total	773	27	800

Estatística para as ciências agrárias e biológicas, de Wilton de Oliveira Bussab e Pedro Alberto Morettin. (adaptado)

Desejando-se fazer uma avaliação do poder germinativo de uma das culturas de cebola, uma amostra foi retirada ao acaso. Sabendo-se que a amostra escolhida germinou, a probabilidade de essa amostra pertencer à cultura A é de

a) $\frac{8}{27}$.

b) $\frac{19}{27}$.

c) $\frac{381}{773}$.

d) $\frac{392}{773}$.

e) $\frac{392}{800}$.

33) **(ENEM)** Em uma escola com 1 200 alunos, foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa, constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola, ao acaso, e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{5}{8}$.

c) $\frac{1}{4}$.

d) $\frac{5}{6}$.

e) $\frac{5}{14}$.

34) **(ENEM)** Uma fábrica possui duas máquinas que produzem o mesmo tipo de peça. Diariamente, a máquina M produz 2 000 peças, e a máquina N produz 3 000 peças. Segundo o controle de qualidade da fábrica, sabe-se que 60 peças, das 2 000 produzidas pela máquina M, apresentam algum tipo de defeito, enquanto que 120 peças, das 3 000 produzidas pela máquina N, também apresentam defeitos. Um trabalhador da fábrica escolhe, ao acaso, uma peça, e esta é defeituosa.

Nessas condições, qual a probabilidade de que a peça defeituosa tenha sido produzida pela máquina M?

a) $\frac{3}{100}$.

b) $\frac{1}{25}$.

c) $\frac{1}{3}$.

d) $\frac{3}{7}$.

e) $\frac{2}{3}$.

35) **(ENEM)** Um bairro residencial tem cinco mil moradores, dos quais mil são classificados como vegetarianos. Entre os vegetarianos, 40% são esportistas, enquanto que, entre os não vegetarianos, essa porcentagem cai para 20%.

Uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, é esportista.

A probabilidade de ela ser vegetariana é

a) $\frac{2}{25}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{5}{6}$

36) **(UERJ)** Três modelos de aparelhos de ar-condicionado, I, II e III, de diferentes potências, são produzidos por um determinado fabricante. Uma consulta sobre intenção de troca de modelo foi realizada com 1 000 usuários desses produtos. Observe a matriz A, na qual cada elemento a_{ij} representa o número daqueles que pretendem trocar do modelo i para o modelo j.

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 150 & 200 \\ 0 & 100 & 300 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Escolhendo-se aleatoriamente um dos usuários consultados, a probabilidade de que ele não pretenda trocar seu modelo de ar-condicionado é igual a

a) 20%
b) 35%
c) 40%
d) 65%

37) **(UERJ)** Considere um cliente que escolheu aleatoriamente dois dias de uma mesma semana para comer pizzas no sistema de rodízio, pagando também um rodízio em cada dia. Sabe-se que de segunda a sexta-feira o rodízio custa R$ 17,50 e de sexta a domingo custa R$ 20,00.

Calcule a probabilidade de que o valor total gasto pelo cliente nesses dois dias seja o mínimo possível.

38) **(ENEM)** Um protocolo tem como objetivo firmar acordos e discussões internacionais para conjuntamente estabelecer metas de redução de emissão de gases de efeito estufa na atmosfera. O quadro mostra alguns dos países que assinaram o protocolo, organizados de acordo com o continente ao qual pertencem.

Países da América do Norte	Países da Ásia
Estados Unidos da América	China
Canadá	Índia
México	Japão

Em um dos acordos firmados, ao final do ano, dois dos países relacionados serão escolhidos aleatoriamente, um após o outro, para verificar se as metas de redução do protocolo estão sendo praticadas.

A probabilidade de o primeiro país escolhido pertencer à América do Norte e o segundo pertencer ao continente asiático é

a) $\frac{1}{9}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{2}{3}$

e) 1

39) **(PUC)** Em uma urna existem 10 bolinhas de cores diferentes, das quais sete têm massa de 300 g cada e as outras três têm massa de 200 g cada. Serão retiradas 3 bolinhas, sem reposição.

A probabilidade de que a massa total das 3 bolinhas retiradas seja de 900 gramas é de:

a) 3/10
b) 7/24
c) 7/10
d) 1/15
e) 9/100

40) **(UERJ)** Para a realização de uma partida de futebol são necessários três árbitros: um juiz principal, que apita o jogo, e seus dois auxiliares, que ficam nas laterais. Suponha que esse trio de arbitragem seja escolhido aleatoriamente em um grupo composto de somente dez árbitros, sendo X um deles. Após essa escolha, um segundo sorteio aleatório é feito entre os três para determinar qual deles será o juiz principal.

Calcule a probabilidade de X ser o juiz principal.

41) **(ENEM)** O número de frutos de uma determinada espécie de planta se distribui de acordo com as probabilidades apresentadas no quadro.

Número de frutos	Probabilidade
0	0,65
1	0,15
2	0,13
3	0,03
4	0,03
5 ou mais	0,01

A probabilidade de que, em tal planta, existam, pelo menos, dois frutos é igual a

a) 3%
b) 7%
c) 13%
d) 16%
e) 20%

42) **(PUC)** Ao lançar um dado 3 vezes sucessivas, qual é a probabilidade de obter ao menos um número ímpar?

a) 1/8
b) 1/4
c) 3/8
d) 5/8
e) 7/8

43) **(UERJ)** Suponha haver a probabilidade de 20% para uma caixa do anticoncepcional Microvlar ser falsificada. Em duas caixas, a probabilidade de pelo menos uma delas ser falsa é:

a) 4%
b) 16%
c) 20%
d) 36%

44) **(UERJ)** Um pesquisador possui em seu laboratório um recipiente contendo 100 exemplares de Aedes aegypti, cada um deles contaminado com apenas um dos tipos de vírus, de acordo com a seguinte tabela:

TIPO	QUANTIDADE DE MOSQUITOS
DEN 1	30
DEN 2	60
DEN 3	10

Retirando-se simultaneamente e ao acaso dois mosquitos desse recipiente, a probabilidade de que pelo menos um esteja contaminado com o tipo DEN 3 equivale a:

a) $\frac{1}{10}$.

b) $\frac{10}{99}$.

c) $\frac{11}{100}$.

d) $\frac{21}{110}$

45) **(UERJ)** Considere o conjunto de números naturais abaixo e os procedimentos subsequentes:

1- Cada número primo de A foi multiplicado por 3. Sabe-se que um número natural P é primo se $P > 1$ e tem apenas dois divisores naturais distintos.

2- A cada um dos demais elementos de A, foi somado o

3- Cada um dos números distintos obtidos foi escrito em apenas um pequeno cartão.

4- Dentre todos os cartões, foram sorteados exatamente dois cartões com números distintos ao acaso.

A probabilidade de em pelo menos um cartão sorteado estar escrito um número par é:

a) $\frac{5}{12}$

b) $\frac{7}{12}$

c) $\frac{13}{24}$

d) $\frac{17}{24}$

46) **(UERJ)** Com o intuito de separar o lixo para fins de reciclagem, uma instituição colocou em suas dependências cinco lixeiras de diferentes cores, de acordo com o tipo de resíduo a que se destinam: vidro, plástico, metal, papel e lixo orgânico.

Sem olhar para as lixeiras, João joga em uma delas uma embalagem plástica e, em outra, uma garrafa de vidro.

A probabilidade de que ele tenha usado corretamente pelo menos uma das lixeiras é igual a:

a) 25%
b) 30%
c) 35%
d) 40%

47) **(UERJ)** Em uma escola, 20% dos alunos de uma turma marcaram a opção correta de uma questão de múltipla escolha que possui quatro alternativas de resposta. Os demais marcaram uma das quatro opções ao acaso.

Verificando-se as respostas de dois alunos quaisquer dessa turma, a probabilidade de que exatamente um tenha marcado a opção correta equivale a:

a) 0,48
b) 0,40
c) 0,36
d) 0,25

48) **(ENEM)** Em um campeonato de futebol, a vitória vale 3 pontos, o empate 1 ponto e a derrota zero ponto. Ganha o campeonato o time que tiver maior número de pontos. Em caso de empate no total de pontos, os times são declarados vencedores.

Os times R e S são os únicos com chance de ganhar o campeonato, pois ambos possuem 68 pontos e estão muito à frente dos outros times. No entanto, R e S não se enfrentarão na rodada final.

Os especialistas em futebol arriscam as seguintes probabilidades para os jogos da última rodada:

- R tem 80% de chance de ganhar e 15% de empatar;
- S tem 40% de chance de ganhar e 20% de empatar.

Segundo as informações dos especialistas em futebol, qual é a probabilidade de o time R ser o único vencedor do campeonato?

a) 32%
b) 38%
c) 48%
d) 54%
e) 57%

2- A cada um dos demais elementos de A, foi ... número 1.

49) **(UERJ)** Em uma urna, foram colocadas trinta bolas, numeradas de 1 a 30. Uma dessas bolas foi sorteada aleatoriamente. Em relação a essa experiência, considerem-se os dois eventos abaixo.

Evento A: {a bola sorteada tem número menor ou igual a 20}.

Evento B: {a bola sorteada tem número maior do que k}.

Sabendo que $k < 20$, $k \in \mathbb{N}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, determine o valor de k.

50) **(UERJ)** Uma urna contém uma bola branca, quatro bolas pretas e x bolas vermelhas, sendo $x > 2$. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, é observada e recolocada na urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna.

Se $\frac{1}{2}$ é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam da mesma cor, o valor de x é:

a) 9
b) 8
c) 7
d) 6

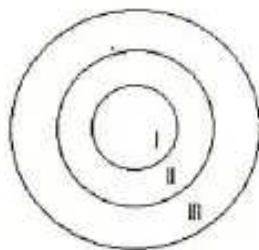
51) **(UERJ)** Os baralhos comuns são compostos de 52 cartas divididas em quatro naipes, denominados copas, espadas, paus e ouros, com treze cartas distintas de cada um deles.

Uma criança rasgou algumas cartas desse baralho, e as n cartas restantes, não rasgadas, foram guardadas em uma caixa.

A tabela abaixo apresenta as probabilidades de retirar-se dessa caixa, ao acaso, as seguintes cartas:

CARTA	PROBABILIDADE
um rei	0,075
uma carta de copas	0,25
uma carta de copas ou rei	0,3

Calcule o valor de n.

52) Um alvo é formado por três círculos concêntricos.

Uma flecha, ao ser lançada, pode atingir as regiões I, II ou III, ou não acertar o alvo. As probabilidades de um arqueiro atingir as regiões I, II e III são iguais a 1/10, 3/10 e 1/2, respectivamente.

Um arqueiro lança três flechas. Determine a probabilidade de ele acertar somente duas flechas, ambas na região III.

53) **(UERJ)** Um alvo de dardos é formado por três círculos concêntricos que definem as regiões I, II e III, conforme mostra a ilustração.

- região I
- região II
- região III

Um atirador de dardos sempre acerta alguma região do alvo, sendo suas probabilidades de acertar as regiões I, II e III denominadas, respectivamente, P_I, P_{II} e P_{III}

- $P_{II} = 3P_I$
- $P_{III} = 2P_{II}$

Calcule a probabilidade de que esse atirador acerte a região I exatamente duas vezes ao fazer dois lançamentos.

54) **(UERJ)** Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso. Inserindo-se 3 moedas, uma de cada vez, a probabilidade de que a máquina libere 3 bolas, sendo apenas duas delas brancas, é aproximadamente de:

a) 0,008
b) 0,025
c) 0,040
d) 0,072

55) **(UERJ)** Uma fábrica produz sucos com os seguintes sabores: uva, pêssego e laranja. Considere uma caixa com 12 garrafas desses sucos, sendo 4 garrafas de cada sabor.

Retirando-se, ao acaso, 2 garrafas dessa caixa, a probabilidade de que ambas contenham suco com o mesmo sabor equivale a:

a) 9,1%
b) 18,2%
c) 27,3%
d) 36,4%

56) **(ENEM)** A probabilidade de um empregado permanecer em uma dada empresa particular por 10 anos ou mais é de $\frac{1}{6}$. Um homem e uma mulher começam a trabalhar nessa companhia no mesmo dia. Suponha que não haja nenhuma relação entre o trabalho dele e o dela, de modo que seus tempos de permanência na firma são independentes entre si.

A probabilidade de ambos, homem e mulher, permanecerem nessa empresa por menos de 10 anos é de

a) $\frac{60}{36}$

b) $\frac{25}{36}$

c) $\frac{24}{36}$

d) $\frac{12}{36}$

e) $\frac{1}{36}$

57) **(ENEM)** No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%.

A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de

a) 5,0%
b) 7,5%
c) 22,5%
d) 30,0%
e) 75,0%

e III denominadas, respectivamente, P_I, P_{II} e P_{III}.

Para esse atirador, valem as seguintes relações:

e) 75,0%

58) **(ENEM)** Um casal, ambos com 30 anos de idade, pretende fazer um plano de previdência privada. A seguradora pesquisada, para definir o valor do reconhecimento mensal, estima a probabilidade de que pelo menos um deles esteja vivo daqui a 50 anos, tomando por base dados da população, que indicam que 20% dos homens e 30% das mulheres de hoje alcançarão a idade de 80 anos.

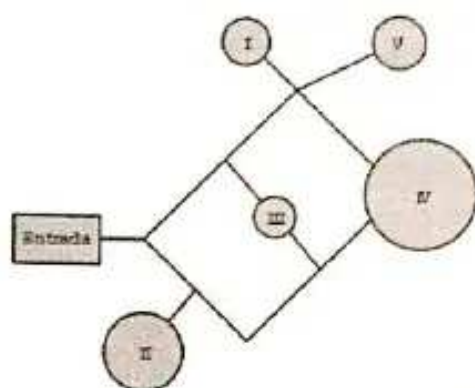
Qual é essa probabilidade?

a) 50%
b) 44%
c) 38%
d) 25%
e) 6%

59) **(ENEM)** Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

a) 23,7%
b) 30,0%
c) 44,1%
d) 65,7%
e) 90,0%

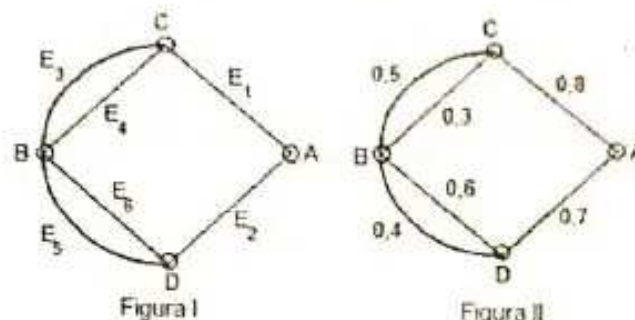
60) **(ENEM)** Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.

Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna. Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

a) $\frac{1}{96}$

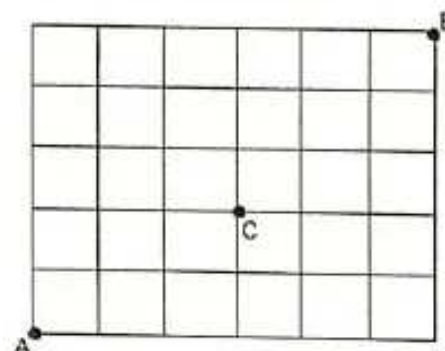
b) $\frac{1}{64}$

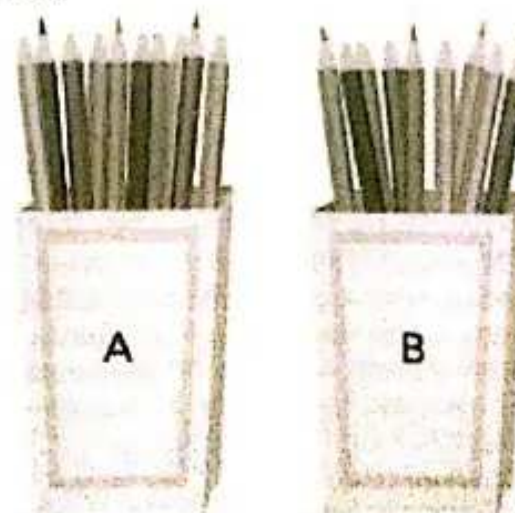
c) $\frac{5}{24}$

d) $\frac{1}{4}$

61) **(ENEM)** A figura I, a seguir, mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao ponto B, passando pela estrada E_4, e de 50%, quando se passa por E_3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é

a) E_1E_3.
b) E_1E_4.
c) E_2E_4.
d) E_2E_5.
e) E_2E_6.

62) Uma formiga desloca-se do ponto A para o ponto B, caminhando sobre o reticulado abaixo.

Os deslocamentos são feitos exclusivamente para a direita ou para cima. Qual a probabilidade de que ela passe pelo ponto C no seu trajeto?

63) **(UERJ)** Em um escritório, há dois porta-lápis: o porta-lápis A com 10 lápis, dentre os quais 3 estão apontados, e o porta-lápis B com 9 lápis, dentre os quais 4 estão apontados.

Um funcionário retira um lápis qualquer ao acaso do porta-lápis A e o coloca no porta-lápis B. Novamente ao acaso,

e) $\frac{5}{12}$

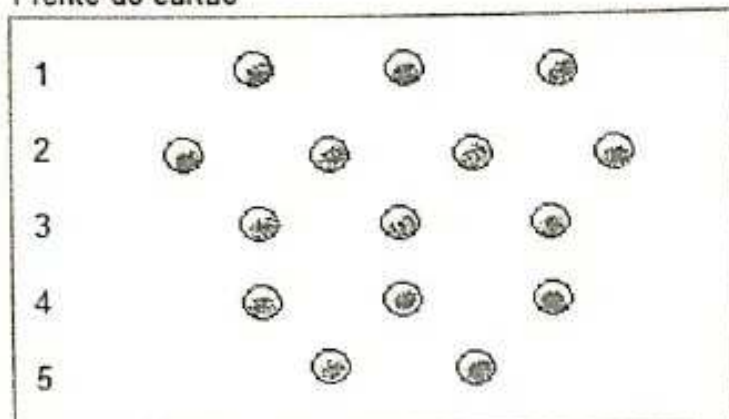
ele retira um lápis qualquer do porta-lápis B.

A probabilidade de que este último lápis retirado não tenha ponta é igual a:

a) 0,64
b) 0,57
c) 0,52
d) 0,42

64) **(ENEM)** Uma empresa de alimentos imprimiu, em suas embalagens, um cartão de apostas do seguinte tipo:

Frente do cartão

1
2
3
4
5

Verso do cartão

Como jogar:
- Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).
- Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas. Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.
- Se encontrar um X em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.
- Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas, terá direito ao prêmio.

Cada cartão possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de X distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão, existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é

a) $\frac{1}{27}$

b) $\frac{1}{36}$

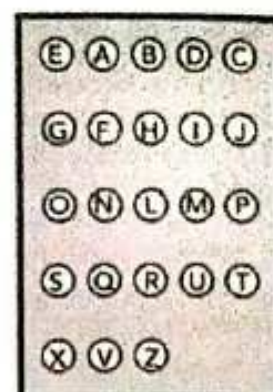
c) $\frac{1}{54}$.

d) $\frac{1}{72}$.

e) $\frac{1}{108}$.

65) **(UERJ)** Os consumidores de uma loja podem concorrer a brindes ao fazerem compras acima de R$ 100,00. Para isso, recebem um cartão de raspar no qual estão registradas 23 letras do alfabeto em cinco linhas. Ao consumidor é informado que cada linha dispõe as seguintes letras, em qualquer ordem:

- linha 1 – {A, B, C, D, E};
- linha 2 – {F, G, H, I, J};
- linha 3 – {L, M, N, O, P};
- linha 4 – {Q, R, S, T, U};

Observe um exemplo desses cartões, com as letras ainda visíveis:

Para que um consumidor ganhasse um secador, teria de raspar o cartão exatamente nas letras dessa palavra, como indicado abaixo:

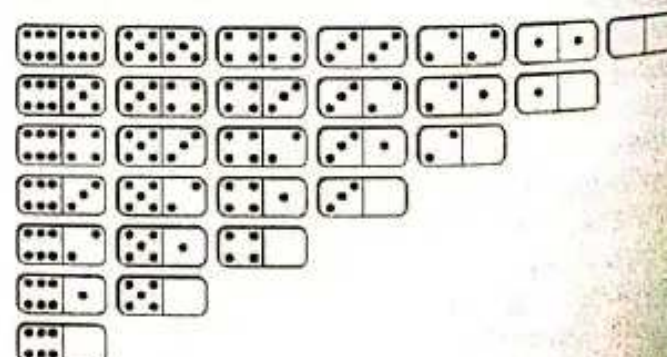
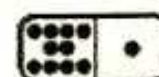
Considere um consumidor que receba um cartão para concorrer a um ventilador. Se ele raspar as letras corretas em cada linha para formar a palavra VENTILADOR, a probabilidade de que ele seja premiado corresponde a:

a) $\frac{1}{15000}$

b) $\frac{1}{18000}$

c) $\frac{1}{20000}$

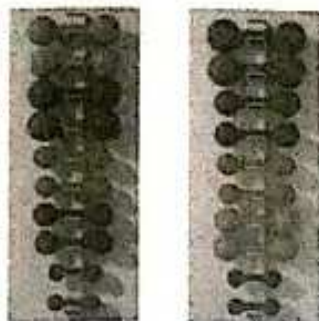
d) $\frac{1}{25000}$

66) **(UERJ)** Cada uma das 28 peças do jogo de dominó convencional, ilustradas abaixo, contêm dois números, de zero a seis, indicados por pequenos círculos ou, no caso do zero, por sua ausência.

Admita um novo tipo de dominó, semelhante ao convencional, no qual os dois números de cada peça variem de zero a dez. Observe o desenho de uma dessas peças:

Considere que uma peça seja retirada ao acaso do novo

• linha 5 – {V, X, Z}.

dominó. Calcule a probabilidade de essa peça apr... um número seis ou um número nove.

67) **(UERJ)** Em uma sala, encontram-se dez halteres, distribuídos em cinco pares de cores diferentes. Os halteres de mesma massa são da mesma cor. Seu armazenamento é denominado "perfeito" quando os halteres de mesma cor são colocados juntos.

Nas figuras abaixo, podem-se observar dois exemplos de armazenamento perfeito.

Arrumando-se ao acaso os dez halteres, a probabilidade de que eles formem um armazenamento perfeito equivale a:

a) $\frac{1}{5040}$

b) $\frac{1}{945}$

c) $\frac{1}{252}$

d) $\frac{1}{120}$

68) João criou uma senha de 4 algarismos distintos para o segredo de seu cofre. Mais tarde, quando foi abrir o cofre, João percebeu que não lembrava mais qual era a senha, mas sabia que os algarismos eram 1, 3, 8 e 9. Ele, então, resolveu escrever todos os números possíveis formados pelos quatro algarismos e, em seguida, tentar abrir o cofre sorteando, ao acaso, um a um, os números de sua lista, sem repetir números já testados.

Calcule a probabilidade de que ele abra o cofre na 12ª tentativa.

69) **(FUVEST)** Em um jogo entre Pedro e José, cada um deles lança, em cada rodada, um mesmo dado honesto uma única vez. O dado é cúbico, e cada uma das 6 faces estampa um único algarismo de maneira que todos os algarismos de 1 a 6 estejam representados nas faces do cubo. Um participante vence, em certa rodada, se a diferença entre seus pontos e os de seu adversário for, no mínimo, duas unidades. Se nenhum dos participantes vencer, passa-se a uma nova rodada. Dessa forma, determine a probabilidade de

a) Pedro vencer na primeira rodada.
b) Nenhum dos dois participantes vencer na primeira rodada.
c) Um dos participantes vencer até a quarta rodada.

70) Em um jogo, cada partida consiste no lançamento de uma moeda honesta até dez vezes. Se o número de caras atingir o valor cinco, você perde; caso contrário, você ganha.

Calcule a probabilidade de você ganhar uma partida desse jogo.

71) **(PUC)** Foram enviadas quatro cartas para endereços dife...

Qual a probabilidade de que nenhuma carta tenha afinal sido enviada para o endereço certo?

72) **(ENEM)** Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem, ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50, que era o valor, em reais, do trio promoção.

Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R$ 1,00 de desconto. Por exemplo, se a primeira carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 0, a segunda fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganhava R$ 2,00 de desconto.

Qual a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto?

a) 1/24
b) 3/24
c) 1/3
d) 3/8
e) 1/2

73) Em um programa de variedades, um espectador sobe ao palco, é vendado e a ele são dadas 5 bolas diferentes nas cores verde, amarela, azul, preta e branca. Ele é posicionado à frente de uma mesa sobre a qual há 5 caixas nas cores verde, amarela, azul, preta e branca. Ele deve colocar, ao acaso, exatamente uma bola em cada urna. A cada coincidência da cor da bola com a da urna escolhida, o espectador recebe um prêmio de R$ 100,00. Qual a probabilidade de que ele ganhe, nesse programa, ao menos R$ 100,00?

74) **(UERJ)** Uma loja identifica seus produtos com um código que utiliza 16 barras, finas ou grossas. Nesse sistema de codificação, a barra fina representa o zero e a grossa o 1. A conversão do código em algarismos do número correspondente a cada produto deve ser feita de acordo com esta tabela:

Código	Algarismo
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4

Código	Algarismo
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9

Observe um exemplo de código e de seu número correspondente:

Existe um conjunto de todas as sequências de 16 barras finas ou grossas que podem ser representadas.

Escolhendo-se ao acaso uma dessas sequências, a probabilidade de ela configurar um código do sistema descrito é:

a) $\frac{5}{2^{15}}$ b) $\frac{25}{2^{14}}$

c) $\frac{125}{2^{13}}$ d) $\frac{625}{2^{12}}$

diferentes e, na hora de colocar cada carta no respectivo envelope, trocaram-se inadvertidamente as cartas.

101

75) **(ENEM)** O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

a) 0,02048.
b) 0,08192.
c) 0,24000.
d) 0,40960.
e) 0,49152.

76) **(ENEM)** Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame antidoping. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

a) P(I) < P(III) < P(II)
b) P(II) < P(I) < P(III)
c) P(I) < P(II) = P(III)
d) P(I) = P(II) < P(III)
e) P(I) = P(II) = P(III)

Gabarito

1) b
2) e
3) c
4) c
5) a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{16}{33}$
c) $\frac{5}{9}$
d) $\frac{7}{11}$
6) a) $\frac{8}{15}$
b) $\frac{1}{3}$
7) b
8) $\frac{5}{11}$
9) a) $\frac{6}{11}$
b) $\frac{8}{11}$
10) e
12) b
13) c
14) e
15) e
16) d
17) c
18) $\frac{2}{5}$
19) a) 2%
b) 72%
c)18%
d) 28%
20) $\frac{1}{17}$
21) a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{4}{13}$
d) $\frac{25}{52}$
22) d
23) a) $\frac{5}{1}$[illegible]
24) c
25) c
26) $\frac{3}{8}$
27) a) $\frac{5}{22}$
b) $\frac{4}{33}$
c) 43
28) $\frac{1}{1500}$
29) 60
30) a) 120
b) $\frac{5}{108}$
31) 55%
32) d
33) a
34) c
35) d
36) b
37) $\frac{2}{7}$
38) c
39) b
40) $\frac{1}{10}$
41) e
42) e
43) d
44) d
45) b
46) c
47) a
48) d
49) 15
50) a
51) 40
52) $\frac{3}{40}$
53) 1%
54) b
55) c
56) b
57) c
58) b
59) d
60) c
61) d
62) $\frac{100}{231}$
63) b
64) c
65) a
66) $\frac{7}{22}$
67) b
68) $\frac{1}{24}$
69) a) $\frac{5}{18}$
b) $\frac{4}{9}$
c) $\frac{6305}{6561}$
70) $\frac{193}{512}$
71) $\frac{3}{8}$
72) d
73) $\frac{19}{30}$
74) d
75) b
76) e

Anotações

11) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{16}$

Capítulo XI

NÚMEROS COMPLEXOS

Introdução

Resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + 9 = 0$, pelas técnicas normais, temos que:

$$x^2 + 9 = 0$$
$$x^2 = -9$$

Daí, chegamos à conclusão:

$$x = \pm\sqrt{-9}$$

Até então, no campo dos números reais, tais resultados não eram definidos.

Consideremos, agora, um número *i*, chamado **unidade imaginária**, tal que:

$$i = \sqrt{-1}\ ;\ \text{ou seja, } i^2 = -1$$

A partir deste conceito, a equação tem solução dada por:

$$x = \pm\sqrt{-9}$$
$$x = \pm\sqrt{9}\ .\ \sqrt{-1}$$
$$x = \pm 3\ .\ i$$

Forma Algébrica de Um Número Complexo

Todo número complexo, geralmente representado pela letra **z**, pode ser escrito na forma algébrica dada por:

$$\mathbf{z = a + b\ .\ i},\ \text{sendo a, b } \varepsilon \text{ IR}$$

Na forma algébrica acima mostrada, o número real **a** é a **parte real** do complexo **z**, representada por **Re(z)**, enquanto o real **b** é a parte imaginária de **z**, notada por **Im(z)**.

Assim, o conjunto dos números complexo é dado por:

$$C = \{z = a + bi \mid a\ \varepsilon\ IR \wedge b\ \varepsilon\ IR\}$$

Exemplos:

Determinemos as partes real e imaginária dos números complexos que se seguem:

1) $Z_1 = 3 - 2i$ → $Re(Z_1) = 3$; $Im(Z_1) = -2$

2) $Z_2 = 7i$ → $Re(Z_2) = 0$; $Im(Z_2) = 7$

NOTA: Neste caso, o complexo Z_2 é chamado número imaginário puro, pois $Re(Z_2) = 0$ e $Im(Z_2) \neq 0$. Assim, de um modo formal:

$$Z = a + b\,i \text{ é um número imaginário puro} \leftrightarrow a = 0 \text{ e } b \neq 0$$

NOTA: Quando um número complexo tem a parte imaginária nula, ele é um **número real**. Então:

$$Z = a + b\,i \text{ é um número real} \leftrightarrow b = 0$$

Podemos observar que todo número real é um número complexo. Daí, que o conjunto **IR** dos números reais está contido no conjunto **C** dos números complexos.

$$IR \subset C$$

Potências de *i*

Enumeramos abaixo algumas potências de *i*:

$i^0 = 1$ $i^4 = (i^2)^2 = 1$

$i^1 = i$ $i^5 = i^4\ .\ i^1 = i$

$i^2 = -1$ $i^6 = (i^3)^2 = -1$

$i^3 = i^2\ .\ i^1 = -i$ $i^7 = i^6\ .\ i^1 = -i$

Observamos que existe uma repetição das potências de quatro em quatro. Assim, um processo prático para a determinação de uma potência de i é dividirmos o expoente por quatro, aproveitando-se o resto como novo expoente. Ou seja:

Exemplos:

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Pelo exposto no exemplo anterior, podemos verificar que a soma de quatro potências de expoentes inteiros e consecutivos de i vale sempre zero.

Conjugado de Um Número Complexo

Dado um número complexo **z**, seu conjugado, representado por $\overline{z}$, é tal que:

$$z = a + b.i \leftrightarrow \overline{z} = a - b.i$$

Exemplos:

1) $z_1 = 2 + 3i \rightarrow \overline{z}_1 = 2 - 3i$

2) $z_2 = 2i \rightarrow \overline{z}_2 = -2i$

Operações na Forma Algébrica

1) Igualdade

Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

$$z_1 = z_2 \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Em síntese, dois números complexo são iguais, quando as partes reais e as partes imaginárias

3) $Z_3 = -3$ — $Re(Z_3) = -3$; $Im(Z_3) = 0$

quando possuem as partes reais e as ... respectivamente iguais.

Exemplo:

Sejam $z = x + 7 + 8i$ e $w = -1 + (y - 3)i$ dois números complexos tais que $z = w$.

Então: $\begin{cases} x + 7 = -1 \\ 8 = y - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 11 \end{cases}$

2) *Adição*

A adição de dois números complexos dá como resultado um outro número complexo cuja parte real é a soma das partes reais dos números complexos dados e a parte imaginária é igual à soma das partes imaginárias de tais complexos. Ou seja:

$$z_1 = a + bi \wedge z_2 = c + di \rightarrow z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

Exemplo:

Considerando-se os números complexos $z = 2 + 7i$ e $w = -4 + 3i$, a adição desses complexos é dada por:

$$z + w = 2 + (-4) + (7 + 3) . i = -2 + 10i$$

3) *Multiplicação*

A multiplicação de números complexos é feita de forma análoga à multiplicação de polinômios, aplicando-se a distributividade e a posterior adição algébrica de termos semelhantes. Assim:

$z_1 . z_2 = (a + bi) . (c + di) = a . c + b . c . i + a . d . i + b . d\, i^2 =$

(LEMBRANDO QUE $i^2 = -1$ ...) $= ac - bd + (bc + ad) . i$

Então:

$$z_1 = a + bi \wedge z_2 = c + di \rightarrow z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)\ i$$

Exemplo:

Multipliquemos os números complexos $z = 2 + 4i$ e $w = 3 - i$.

$$z . w = (2 + 4i) . (3 - i) = 6 - 2i + 12i - 4i^2 = 10 + 10i$$

4) *Divisão*

Obtém-se a divisão de dois números complexos, multiplicando-se dividendo e divisor pelo conjugado do divisor: Logo:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 . \bar{Z}_2}{Z_2 . \bar{Z}_2}$$

Exemplo:

O resultado da divisão de $z = 4 + 3i$ por $w = 2 + i$ é dado por:

$$\frac{z}{w} = \frac{4+3i}{2+i} = \frac{(4+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

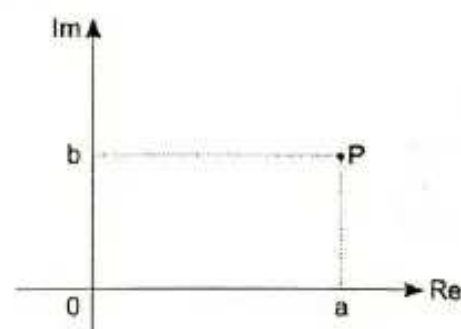
$$= \frac{8-4i+6i-3i^2}{4-2i+2i-i^2} = \frac{11+2i}{5} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5} . i$$

O Plano de ARGAND-GAUSS

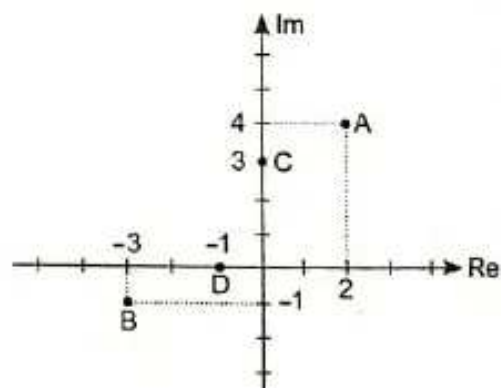
Todo número complexo, como podemos observar na forma

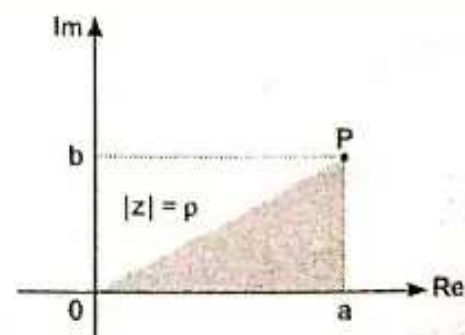
tal que a primeira componente é a parte real e a segunda, a parte imaginária. Assim:

$$z = a + bi = (a, b)$$

Para a representação geométrica de um par ordenado, são necessários dois eixos. No caso do estudo dos números complexos, este é desenvolvido no plano de **Argand-Gauss**, que é determinado por dois eixos perpendiculares, sendo o eixo horizontal chamado **eixo real** e o vertical chamado **eixo imaginário**. Assim, através de uma correspondência biunívoca, a cada número complexo está associado um ponto do plano de **Argand-Gauss** e a cada ponto do plano está associado um número complexo. O ponto imagem de um complexo z é chamado **afixo de z**.

Na figura acima o ponto **P(a, b)** é o afixo do complexo $z = a + b.i$.

Exemplos:

Os afixos dos complexos $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -3 - i$, $z_3 = 3i$ e $z_4 = -1$ são, respectivamente, os pontos A(2, 4), B(-3, -1), C(0, 3) e D(-1, 0), os quais representamos na figura abaixo:

Módulo de Um Número Complexo

Dado um número complexo **z**, chamamos **módulo de z** à distância de seu afixo à origem do plano de Argand-Gauss. O módulo de **z** é representado por **| z |** ou pela ler grega ρ (rô).

Como foi analisado anteriormente, o ponto **P** da figura acima é o afixo do complexo $z = a + b.i$, e então $\rho = |z| = OP$. Aplicando-se o teorema de **Pitágoras** no triângulo em destaque, temos:

algébrica, tem duas partes, a real e a imaginária. Assim, podemos associar todo número complexo a um par ordenado

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Desta forma, o módulo de um número complexo é obtido através da raiz quadrada da soma dos quadrados das suas partes real e imaginária.

Propriedades do Módulo de Um Complexo

1. *Multiplicação*

"O módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto de seus módulos."

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$$

2. *Divisão*

"O módulo da divisão de dois números complexos é igual à divisão de seus módulos."

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$$

3. *Potência*

"O módulo da potência de um número complexo é igual à potência de seu módulo."

$$\boxed{|z^n| = |z|^n}$$

Exemplos:

1. Calculemos o módulo do número complexo $w = -5 + 3i$

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

2. Dados os complexos $z_1 = 4 - 3i$ e $z_2 = 1 + i$, determinar:

a) $|z_1 \cdot z_2|$

b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

c) z_2^6

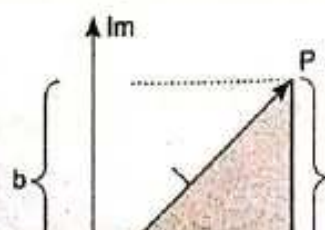
Então, temos:

a) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} . \sqrt{1^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$

b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

c) $|z_2^5| = |z_2|^6 = \left(\sqrt{1^2 + 1^2}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$

Forma Trigonométrica de Um Número Complexo

Chamamos **argumento** de um complexo z, que é representado por **arg(z)**, ao ângulo formado por $\overline{OX}$ com $\overline{OP}$, tomado no sentido anti-horário. Observamos que $0 \leq \arg(z) < 2\pi$ para todo complexo **z não-nulo**, já que, neste caso, o conceito de argumento não é definido.

Na figura anterior, onde **P** é o afixo de $z = a + bi$ e $\theta = \arg(z)$, temos, da trigonometria:

$$tg\theta = \frac{b}{a}$$

$$sen\theta = \frac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho . sen\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho . \cos\theta$$

Substituindo-se tais relações em

$$z = a + b . i$$

Chegamos a:

$$z = \rho . \cos\theta + \rho . sen\,\theta . i$$

$$z = \rho(\cos\theta + i . sen\,\theta)$$

que é a **forma trigonométrica** do complexo z.

Para sintetizar um pouco mais a forma acima descrita, utilizamos as letras **c** de co-seno, **i e s** de seno e formamos a palavra **cis**. Daí, a forma trigonométrica também pode ser dada por:

$$z = \rho . cis\,\theta$$

Exemplos:

1. O complexo $z = 4$ cis 60º é escrito na forma algébrica, como mostrado a seguir:

$$z = 4\,cis\,60^\circ = 4 . (\cos 60^\circ + i . sen\,60^\circ) = 4 . \left(\frac{1}{2} + i . \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 2 + 2\sqrt{3} . i$$

2. Para escrevermos o complexo $z = 3 + 3i$ na forma trigonométrica, necessitamos de seu módulo e de seu argumento. Assim, como $a = 3$ e $b = 3$:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$tg\theta = \frac{b}{a} = \frac{3}{3} = 1$$

Como $a > 0$ e $b > 0$, o complexo z é do 1º quadrante, logo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Daí $z = \rho\,cis\theta = 3\sqrt{2}\,cis\dfrac{\pi}{4}$

Forma Exponencial de Um Número Complexo

Utilizando-se conceitos de que não dispomos até aqui, demonstra-se que $\cos\theta + i . sen\,\theta = e^{i\theta}$, onde e é a base de Neper e θ é dado em radianos. Assim, se:

$$z = \rho\,cis\,\theta = \rho . (\cos\theta + i . sen\,\theta)$$

Então:

$$\boxed{z = \rho . e^{i\theta}}$$

Está é a **forma exponencial** do complexo z.

Exemplos:

... $= 4\,cis\frac{\pi}{...}$, sua forma exponencial é dada por

Re

0 Q

a

1) Sendo $z = 4 \text{ cis} \frac{\pi}{3}$, ...

$z = 4 \,.\, e^{i\pi/3}$.

2) O complexo $z = \sqrt{7} \,.\, e^{5i}$ tem forma trigonométrica igual a $z = \sqrt{7} \,.\, \text{cis} 5$.

Operações nas Formas Exponencial e Trigonométrica

1. *Multiplicação*

Para multiplicarmos dois complexos nas formas exponencial ou trigonométrica, devemos multiplicar seus módulos e somar seus argumentos.

A demonstração é bastante simples.

Tomemos dois complexos $z_1 = \rho_1 . e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 . e^{i\theta_2}$.

Daí, então: $z_1 . z_2 = (\rho_1 . e^{i\theta_1}).(\rho_2 . e^{i\theta_2}) = \rho_1 . \rho_2 . e^{i\theta_1 + i\theta_2}$

E, finalmente: $\boxed{z_1 . z_2 = \rho_1 . \rho_2 . e^{i.(\theta_1 + \theta_2)}}$

Se tais complexos fossem escritos nas formas trigonométricas, teríamos $z_1 = \rho_1 \text{ cis } \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \text{ cis } \theta_2$ e, consequentemente:

$$\boxed{z_1 \,.\, z_2 = \rho_1 \,.\, \rho_2 \,.\, \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)}$$

Exemplos:

1) Dados os complexos $z = 4 \text{ cis } 32°$ e $w = 5 \text{ cis } 57°$, seu produto será dado por:

$z \,.\, w = (4 \text{ cis } 32°) \,.\, (5 \text{ cis } 57°) = 4 \,.\, 5 \text{ cis } (32° + 57°) = 20 \text{ cis } 89°$

2) Os complexos $z = 3 \,.\, e^{i.\pi/3}$ e $w = 2 \,.\, e^{i.\pi/2}$ terão produtos iguais a:

$z \,.\, w = (3 \,.\, e^{i.\frac{\pi}{3}}) \,.\, (2 \,.\, e^{i.\frac{\pi}{2}}) = 6 \,.\, e^{i.\pi/3 + i.\pi/2} = 6 \,.\, e^{i.5\pi/6}$

2. *Divisão*

Neste caso, para dividirmos dois complexos, devemos dividir seus módulos e subtrair seus argumentos.

Consideremos os complexos

$z_1 = \rho_1 \, e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 \, e^{i\theta_2}$; portanto:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 . e^{i\theta_1}}{\rho_2 . e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} . \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} . e^{i\theta_1 - i\theta_2}$$

Ou seja: $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} . e^{i.(\theta_1 - \theta_2)}}$

Para $z_1 = \rho_1 \text{ cis } \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \text{ cis } \theta_2$, teremos: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{ cis } (\theta_1 - \theta_2)$

Exemplos:

Calcularemos o quociente z/w, nos casos abaixo:

a) $z = 8 \text{ cis } 44°$ e $w = 4 \text{ cis } 19°$

$$\frac{z}{w} = \frac{8 \text{ cis } 44°}{4 \text{ cis } 19°} = \frac{8}{4} \,.\, \text{cis}(44° - 19) = 2 \text{ cis } 25°$$

b) $z = 16 \,.\, e^{i.\pi/3}$ e $w = 1/2 \, e^{i.\pi/5}$

$$\frac{z}{w} = \frac{16 \,.\, e^{i.\pi/3}}{...} = \frac{16}{...} \, e^{i.\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\right)} = 32 \, e^{i.\frac{2\pi}{15}}$$

III. Potenciação (1ª Lei de Moivre)

Para elevarmos um número complexo a um expoente devemos elevar seu módulo e multiplicar seu argumento por este mesmo expoente.

Assim, sendo $z = \rho \,.\, e^{i\theta}$, temos que:

$$z^n = (\rho \,.\, e^{i\theta})^n = \rho^n \,.\, (e^{i\theta})^n$$

Então: $\boxed{z^n = \rho^n \,.\, e^{i.(n\theta)}}$

Na forma trigonométrica, se $z = \rho \text{cis} \theta$, então:

$$\boxed{z^n = \rho^n \,.\, \text{cis}(n\theta)}$$

Exemplos:

1) O resultado de z^4, para $z = \sqrt{2} \,.\, e^{i.\frac{\pi}{5}}$ é dado por:

$$z^4 = \left(\sqrt{2} \,.\, e^{i.\frac{\pi}{5}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \,.\, e^{i\left(4.\frac{\pi}{5}\right)} = 4 \; e^{i.4\frac{\pi}{5}}$$

2) Se $w = 5 \text{ cis } 50°$, então o resultado de w^3 é:

$w^3 = (5 \text{ cis } 50°)^3 = 5^3 \,.\, \text{cis } (50° \,.\, 3) = 125 \text{ cis } 150°$

IV. Radiciação (2ª Lei de Moivre)

Dado um número complexo $z = r \,.\, \text{cis } \theta$, as raízes n-ésimas de z, representada $\sqrt[n]{z}$ por são números complexos $w = p \,.\, \text{cis } \alpha$, tais que:

$$\boxed{w = \sqrt[n]{z}, \; n \in Z \wedge n > 2}$$

Daí:

$w^n = z$

$(p \,.\, \text{cis } \alpha)^n = \rho \,.\, \text{cis } \theta$

Aplicando-se a 1ª Lei de Moivre no 1º membro de igualdade.

$p^n \,.\, \text{cis } (n\,\alpha) = \rho \,.\, \text{cis } \theta$

$p^n \,.\, [\cos (n\,\alpha) + i \,.\, \text{sen } (n\,\alpha)] = \rho \,.\, (\cos \theta + i \,.\, \text{sen } \theta)$

É sabido que dois complexos são iguais se têm as mesmas partes real e imaginária e, por conseguinte, módulos iguais. Daí, tem que:

$$p^n = \rho \rightarrow \; \mathbf{p = \sqrt[n]{\rho}}$$

$\cos (n\,\alpha) = \cos \theta$ e $\text{sen } (n\,\alpha) = \text{sen } \theta \rightarrow$ Se dois ângulos têm os números seno e co-seno, são **CÔNGRUOS**, então:

$$n \,.\, \alpha = 2k\pi + \theta, \; k \in Z$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2k\pi + \theta}{n}}$$

Atribuindo-se valores inteiros não negativos para k:

$$k = 0 \rightarrow \alpha_1 = \frac{\theta}{n}$$

$$k = 1 \rightarrow \alpha_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2 \rightarrow \alpha_3 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\theta}{...} \quad \frac{2\pi(n-1)}{...}$$

Notamos que a partir de $k = n$ os valores de α serão côngruos aos já obtidos. Então, concluímos que os valores não côngruos de θ são obtidos variando-se k de zero até $n-1$, ou seja, k assumirá n valores distintos e, então, existirão n raízes n-ésimas de z.

Podemos observar também que os argumentos dessas n raízes estão formando uma P.A., cujo primeiro termo é $\frac{\theta}{n}$ e cuja razão é $\frac{2\pi}{n}$.

Pelo exposto anteriormente que:

$$z = \rho \,.\, \text{cis}\, \theta \rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \,.\, \text{cis}\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right); k \in Z \text{ e } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Exemplos:

1. Seja obter as raízes cúbicas da unidade. Calculemos, portanto $\sqrt[3]{z}$, onde $z = 1$ e daí:

$a = 1$ e $b = 0$, então o complexo z está no semi-eixo real positivo.

Logo $\theta = 0$.

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

Logo:

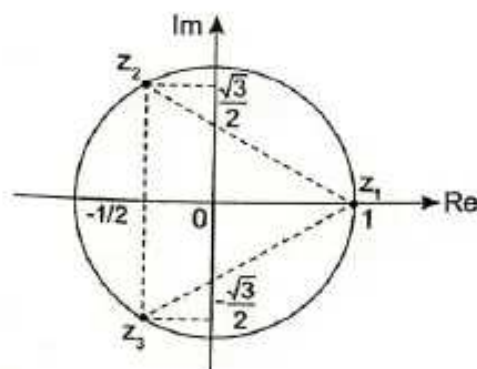
$z = 1 \text{ cis } 0$

Chamemos de z_1, z_2 e z_3 as raízes cúbicas de z, cujos argumentos, devemos lembrar, estão em P.A., no qual o primeiro termo é $\frac{\theta}{n} = \frac{0}{3} = 0$ e a razão é $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$. Assim:

$z_1 = \sqrt[3]{1} \,.\, \text{cis } 0 = \cos 0 + i \,.\, \text{sen } 0 = 1$

$z_2 = \sqrt[3]{1} \,.\, \text{cis}\frac{2\pi}{3} = \text{cis}\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \,.\, \text{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, i$

$z_3 = \sqrt[3]{1} \,.\, \text{cis}\frac{4\pi}{3} = \text{cis}\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i \,.\, \text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, i$

Marquemos agora os afixos destas raízes no plano de Argand-Gauss.

Os afixos de z_1, z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero inscrito em um círculo centrado na origem e de raio igual a 1.

2. Obtenhamos, agora, as raízes quartas do complexo $z = -8 - \sqrt{3}\, i$

$a = -8 \qquad b = -8\sqrt{3}$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16$

$\text{tg}\theta = \frac{b}{a} = \frac{-8\sqrt{3}}{-8} = \sqrt{3}$

Como $a < 0$ e $b < 0$, o complexo z é do terceiro quadrante, logo $\theta = 4\pi/3$.

Assim:

$z = 16 \text{ cis } 4\pi/3$.

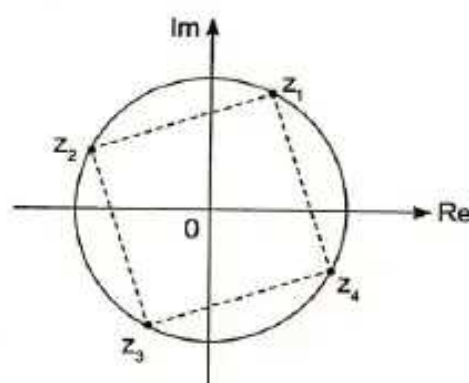
As raízes quartas z_1, z_2, z_3 e z_4 terão argumentos em P.A. de razão $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ e primeiro termo igual a $\frac{\theta}{n} = \frac{4\pi/3}{4} = \frac{\pi}{3}$.

$z_1 = \sqrt[4]{16}\, \text{cis}\frac{\pi}{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \,.\, \text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3} \,.\, i$

$z_2 = \sqrt[4]{16}\, \text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\, \text{cis}\frac{5\pi}{6} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \,.\, \text{sen}\frac{5\pi}{6}\right) =$
$= -\sqrt{3} + i$

$z_3 = \sqrt[4]{16}\, \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\, \text{cis}\frac{4\pi}{3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \,.\, \text{sen}\frac{4\pi}{3}\right) =$
$= -1 - \sqrt{3} \,.\, i$

$z_4 = \sqrt[4]{16}\, \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\, \text{cis}\frac{11\pi}{6} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \,.\, \text{sen}\frac{11\pi}{6}\right) =$
$= \sqrt{3} - i$

No plano de Argand-Gauss:

Neste caso, os afixos das raízes quartas de z são vértices de um quadrado centrado na origem com raio igual a 2.

NOTA: Pelo exposto anteriormente, os afixos das raízes n-ésimas de um número complexo $z = \rho \text{ cis } \theta$, são vértices de um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo centrado na origem do sistema de eixos do plano de ARGAND-GAUSS, de raio igual a $\sqrt[n]{\rho}$.

Exercícios

1) Determine a parte real, a imaginária e o conjugado dos números complexos:

a) $z = 3 + 2i$
b) $z = 1 - 4i$
c) $z = 5i - 2$
d) $z = 6i$
e) $z = -7$

2) Determine os valores das expressões:

a) i^{45}
b) $i^{278\,967\,412}$
c) $i^{33} + i^{34} + i^{35} + i^{36}$

3) **(PUC)** Determine o valor da expressão $i^0 + i^1 + i^2 + ... + i^{200}$.

4) **(UNICAMP)** Chamamos de unidade imaginária e denotamos por i o número complexo tal que $i^2 = -1$. Então, qual o valor da expressão $i^0 + i^1 + i^2 + ... + i^{2013}$.

5) Determine as raízes complexas das equações:

a) $x^2 - 6x + 10 = 0$
b) $4x^2 - 16x + 25 = 0$

6) Determine os valores reais de x e y nas equações:

a) $(4 - xi).i + yi - 2 = 2x - 6i + (2y - 3i).i$
b) $(xi - 2).(4 + i) - y.(2i - 3) = (x - yi).(3 - i)$

7) Determine o valor da variável complexa z, nas equações abaixo, considerando que w é o conjugado de z.

a) $3z - 2w = 3 - 10i$
b) $z.w - 3.(z - w) = 26 - 6i$

8) Determine o valor real de x de modo que o número $z = x^2 + (9i - x).i + 3i$ seja:

a) real
b) imaginário puro

9) Determine o valor real de x de modo que o número $z = \dfrac{x - 4i}{2 - i}$ seja:

a) real
b) imaginário puro

10) Determine os resultados das operações a seguir, considerando que $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 - 2i$ e $z_3 = 2 + i$.

a) $z_1 + z_2 + z_3$
b) $2z_1 - 3z_2 + 4z_3$
c) $z_1 . z_2$
d) $z_1 . z_2 . z_3$
e) z_1 / z_3
f) z_2 / z_1

11) **(UNICAMP)** Considere o número complexo $z = \dfrac{1 + ai}{a - i}$, onde a é um número real e i é a unidade imaginária. Determine o valor de z^{2016}.

12) **(UNICAMP)** Sejam x e y números reais tais que , $x + yi = \sqrt{3 + 4i}$ onde i é a unidade imaginária. Determine o valor de x.y.

13) Represente no plano de Argand-Gauss os afixos nos números complexos abaixo indicados, considerando que $z = 3 + 2i$ e $w = -4 + 3i$.

a) $z_1 = z$
b) $z_2 = w$
c) $z_3 = \bar{z}$
d) $z_4 = -w$
e) $z_5 = w - z$

14) Escreva, na forma algébrica, os números complexos:

a) $4cis30°$
b) $5cis90°$
c) $6cis120°$
d) $cis(5\pi/4)$

15) Escreva, na forma trigonométrica, os números complexos.

a) $3 + 3i$
b) $1 - \sqrt{3}\,i$
c) $-2 -2i$
d) $-2\sqrt{3} + 2i$
e) $5i$
f) -7
g) $-3i$
h) 6

16) Escreva, na forma trigonométrica, os resultados das operações abaixo, considerando que $x = 4(\cos40° + i.\text{sen}40°)$, $y = 6(\cos110° + i.\text{sen}110°)$ e $z = 2(\cos20° + i.\text{sen}20°)$.

a) $x \cdot y$
b) $x \cdot y \cdot z$
c) $\dfrac{y}{x}$
d) $\dfrac{z}{y}$
e) x^3
f) z^5

17) As raízes da equação $x^2 - 4x + 8 = 0$ são números complexos que, representados no plano, têm afixos A e B.

a) Mostre que $2 + 2i$ é uma das raízes dessa equação.
b) Determine a medida do ângulo $A\hat{O}B$, onde O representa a origem.

18) Sendo z um número complexo tal que $z^7 = 1$ e $z \neq 1$, determine o valor da expressão $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$.

19) **(PUC)** Considerando o número complexo $w = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$, determine o valor da soma $1 + w + w^2 + w^3 + ... + w^{11}$.

20) Determine os valores do número real x e do menor ângulo positivo y, expresso em graus, que satisfazem a equação $\dfrac{(x cis y) \cdot (25 cis 20°)}{(5 cis 60°)^3} = 2\sqrt{3} + 2i$.

21) Dados os números complexos $a = 2(\cos30° + i.\text{sen}30°)$ e $b = 3(\cos\alpha + i.\text{sen}\,\alpha)$, determine o menor valor positivo de α, de modo que o produto a.b seja um número real.

22) **(UERJ)** Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são α e β. Se i é a unidade imaginária dos números complexos, determine o valor de $(\cos\alpha + i.\text{sen}\,\alpha) \cdot (\cos\beta + i.\text{sen}\beta)$.

23) Determine o menor inteiro $n \geq 1$ para o qual $(\sqrt{3} + i)^n$ é um número real positivo.

24) Um jantar secreto é marcado para a hora em que as extremidades dos ponteiros do relógio forem representadas pelos números complexos $z = \alpha\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ e $w = z^2$, sendo a um número fixo, $0 < \alpha < 1$.
Determine a hora do jantar.

25) **(UERJ)** Determine os valores do módulo e do argumento do número complexo $z = \dfrac{1 - i}{1 + \sqrt{3}i}$, quando escrito na forma trigonométrica.

e) $8\,cis(5\pi/3)$

f) $7e$[illegible]

26) Escreva, na forma algébrica, os resultados das potências:

a) $(2 + 2i)^6$
b) $(1 - i)^9$
c) $(-1 + i)^{10}$

27) Determine todas as raízes cúbicas do número 64i.

28) Determine as raízes quartas do número -81.

29) Uma das raízes sextas de um número complexo z é o número $z_1 = 2cis130°$. Determine o valor de z e as suas outras raízes sextas.

30) **(PUC)** Ache todas as soluções complexas da equação $z^8 + 1 = 0$.

31) **(UERJ)** Um matemático, observando um vitral com o desenho de um polígono inscrito em um círculo, verificou que os vértices desse polígono poderiam ser representados pelas raízes cúbicas complexas do número 8. Determine a área do polígono observado pelo matemático.

32) **(UNICAMP)** Um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo $\sqrt{3} + i$.

a) Que números complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo?
b) Qual a medida do lado desse triângulo?

33) Determine os módulos dos números complexos:

a) $z = 4 - 5i$
b) $z = -3 + 4i$
c) $z = -5i$
d) $z = 7$
e) $z = \cos 37° + i.\cos 53°$.
f) $z = (1 + i).(3 - 3i).(-4 + 3i)$
g) $z = \dfrac{4 - 3i}{-6 + 8i}$
h) $z = \dfrac{15 - 8i}{-5 + 12i}$
i) $z = (1 - i)^{10}$

34) **(UNICAMP)** Determine o valor do módulo do número complexo $z = i^{2014} - i^{1987}$.

35) O módulo do número complexo $\dfrac{(4 - 3i)\cdot(6 - 8i)}{x + i}$ vale 25. Determine o(s) valor(es) de x.

36) Determine os lugares geométricos, no plano de Argand-Gaus, dos afixos dos números complexos z, tais que:

a) $|z| = 3$
b) $|z| = 7$
c) $|z - 3 - 2i| = 4$
d) $|z - 2 + 6i| = 2$
e) $|z + 4| = 5$
f) $|z| \leq 6$
g) $|z| \geq 2$
h) $|z + 1 - i| < 3$
i) $|z - 6i| > 1$

37) O lugar geométrico das imagens dos números complexos z, tais que z^2 é um número real, é

a) um par de retas paralelas.
b) um par de retas concorrentes.
c) uma reta.
d) uma circunferência.
e) uma parábola.

38) O lugar geométrico, no plano de Argand-Gauss, dos afixos dos números complexos z, tais que $|z + 1| = |z - 1|$ é uma:

a) Reta
b) Circunferência
c) Elipse
d) Hipérbole
e) Parábola

39) Qual o valor obtido ao multiplicarmos o número complexo $z = 5cis47°$ pelo seu conjugado?

40) **(UERJ)** Considere os números complexos da forma $z(t) = 3^t + t \cdot i$, na qual $t \in R$ e i é a unidade imaginária. Os pares ordenados (x, y), em que x e y são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do número complexo z, definem o gráfico de uma função da forma $y = f(x)$. A função representada pelo gráfico assim definido é classificada como:

a) Linear
b) Quadrática
c) Exponencial
d) Logarítmica

41) **(AFA)** Considere no plano de Argand-Gauss os números complexos $z = x + yi$ cujos afixos são pontos $P(x,y) \in R^2$. Dada a equação $(z - 1 + i)^4 = 1$, sobre os elementos que compõem o seu conjunto solução, é INCORRETO afirmar que

a) apenas um deles é imaginário puro.
b) todos podem ser escritos na forma trigonométrica.
c) o conjugado do que possui maior argumento é $1 + 2i$.
d) nem todos são números imaginários.

42) A representação trigonométrica de um número complexo z é dada por $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$.

Se z é um número complexo e w seu conjugado, resolva a equação $z^3 = w$.

43) **(FUVEST)** Dentre todos os números complexos $z = |z|(\cos\theta + i.\text{sen}\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que satisfazem a inequação $|z - 25i| \leq 15$, determinar aquele que tem o menor argumento θ.

44) **(ITA)** Seja S o conjunto dos números complexos que satisfazem,simultaneamente, às equações $|z - 3i| = 3$ e $|z + i| = |z - 2 - i|$. Determine o produto de todos os elementos de S.

45) **(ITA)** Sendo $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right|$.

Gabarito

1)
a) $Re(z) = 3$; $Im(z) = 2$; $\bar{z} = 3 - 2i$
b) $Re(z) = 1$; $Im(z) = -4$; $\bar{z} = 1 + 4i$
c) $Re(z) = -2$; $Im(z) = 5$; $\bar{z} = 2 + 5i$
d) $Re(z) = 0$; $Im(z) = 6$; $\bar{z} = -6i$
e) $Re(z) = -7$; $Im(z) = 0$; $\bar{z} = -7$

2)
a) i
b) 1
c) 0

3) 1

4) 1 + i

5)
a) 3 – i e 3 + i
b) $2+\frac{3i}{2}$ e $2-\frac{3i}{2}$

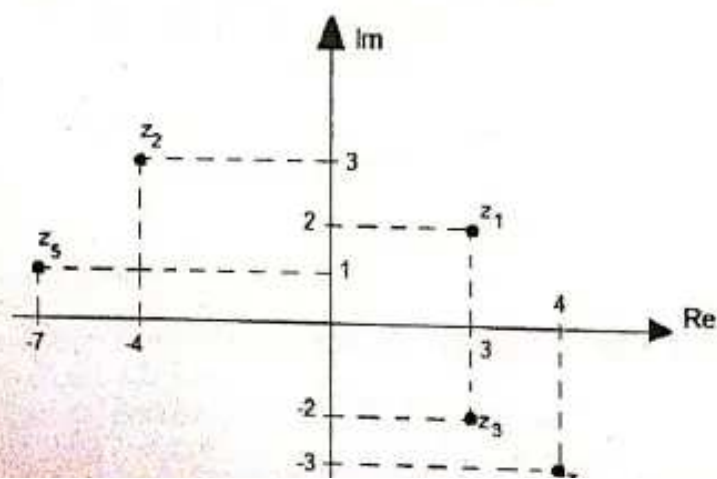
6)
a) x = -5 e y = 10
b) x = 0 e y = 2

7)
a) 3 – 2i
b) -5 + i ou 5 + i

8)
a) 3
b) -3

9)
a) 8
b) -2

10)
a) 9 + i
b) 2 + 14i
c) 16 + 2i
d) 30 + 20i
e) $\frac{8}{5}+\frac{1}{5}i$
f) $\frac{8}{13}-\frac{14}{13}i$

11) 1
12) 2
13)

14)
a) $2\sqrt{3} + 2i$
b) 5i
c) $-3 + 3\sqrt{3}\,i$
d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
e) $4 - 4\sqrt{3}\,i$
f) -7

15)
a) $3\sqrt{2}$ cis45°
b) 2cis300°
c) $2\sqrt{2}$ cis225°
d) 4cis150°
e) 5cis90°
f) 7cis180°
g) 3cis270°
h) 6cis0°

16)
a) 24cis150°
b) 48cis170°
c) $\frac{3}{2}$cis70°
d) $\frac{1}{3}$cis270°
e) 64cis120°
f) 32cis100°

17)
a) Resolva a equação usando a fórmula de Baskara.
b) 90°

18) 0
19) 0
20) x = 20 e y = 190°
21) $\frac{5\pi}{6}$
22) i
23) 12
24) 21h
25) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 255°

26)
a) -512i
b) 16 – 16i
c) -32i

27) $2\sqrt{3} + 2i$, $-2\sqrt{3} + 2i$ e $-4i$

28) $\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{-3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ e $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

29) z_1=64cis60°; z_2=2cis190°, z_3=2cis250°, z_4=2cis310°, z_5=2cis10° e z_6 =2 cis 70°

30) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, i, $\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, – i e $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

31) $3\sqrt{3}$

32)
a) $-\sqrt{3} + i$ e $-2i$

b) $2\sqrt{3}$

33)
a) $\sqrt{41}$
b) 5
c) 5
d) 7
e) 1
f) 30
g) $\frac{1}{2}$
h) $\frac{17}{13}$
(I) 32

34) $\sqrt{2}$

35) $-\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}$

36)
a) circunferência centrada na origem com raio 3
b) circunferência centrada na origem com raio 7
c) circunferência centrada no ponto (3, 2) com raio 4
d) circunferência centrada no ponto (2, -6) com raio 2
e) circunferência centrada no ponto (-4, 0) com raio 5
f) círculo centrado na origem com raio 6
g) circunferência centrada na origem com raio 2 e mais o seu exterior
h) interior de um círculo centrado no preto (-1, 1) com raio 3
(I) exterior de um círculo centrado no ponto (0, 6) com raio 1

37) b
38) a
39) 25
40) d
41) c
42) S = {1, i, -1, -i, 0}
43) 12 + 16i
44) -3 + 3i
45) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

Anotações

Capítulo XII

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES

Definição

Chamamos **função polinomial** ou **polinômio complexo** a uma variável completa, à função

$$P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$$

no qual $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são números complexos chamados coeficientes e $n \in N$. Os termos de um polinômio são as parcelas que o compõem. No polinômio genérico anterior são termos:

$$a_0 \cdot x^n, a_1 \cdot x^{n-1}, \ldots, a_{n-1} \cdot x \text{ e } a_n$$

Exemplos:

A seguir, temos exemplos de polinômios complexos:

1) $A(x) = 4x^7 + 5x^6 - 4x^3 - 2$
2) $B(x) = 7x^2 - 5x - 1$
3) $C(x) = 12x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + (i - 1) \cdot x + \sqrt{3}$
4) $D(x) = 8$

Grau de Um Polinômio

O grau de um polinômio é o maior expoente que a variável, de coeficiente não nulo, apresenta.

O grau de um polinômio P(x) é representado por gr(P).

No caso de um polinômio que possua todos os coeficientes nulos, seu grau não está definido.

Exemplos:

1) $A(x) = 7x^3 - 5x^2 + 8x \rightarrow gr(A) = 3$
2) $B(x) = 0x^9 + 7x^2 - 11x^7 + 4 \rightarrow gr(B) = 7$
3) $C(x) = 8 \rightarrow gr(C) = 0$

Valor Numérico e Raiz

Dado um polinômio $P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$, o valor numérico de P(x) para $x = \alpha$, representado por $P(\alpha)$, é obtido substituindo-se a variável x, de P(x), por α. Ou seja:

$$P(\alpha) = a_0 \cdot \alpha^n + a_1 \cdot \alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \alpha + a_n$$

Quando $P(\alpha) = 0$, diremos que α é raiz ou zero de P(x).

Exemplos:

1) Dado o polinômio $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 1$, determinemos o valor de P(2).

$$P(2) = 3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 - 1 = 45$$

2) Seria o número 1 raiz do polinômio $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 2x - 6$?

Para que isto ocorra, é necessário que P(1) seja igual a zero. Calculemos, portanto P(1):

valem 7, –3, 2 e –6; portanto, sua soma 7 + (–3) + 2 + (–6) = 0, então, 1 é raiz de P(x). Isto sempre ocorre, quando a soma dos coeficientes de um polinômio é zero. Ou seja:

> **NOTA:** Todo polinômio cuja soma dos coeficientes vale zero tem uma raiz igual a 1(um).

Polinômios Idênticos

Dois polinômios são idênticos quando assumem valores numéricos respectivamente iguais, qualquer que seja o valor atribuído à variável. Noutras palavras, se dois polinômios são idênticos, têm o mesmo grau, e os coeficientes dos termos do mesmo grau são ordenadamente iguais. Simbolicamente, se P(x) e Q(x) são polinômios, temos que:

$$P(x) \equiv Q(x) \leftrightarrow P(\alpha) = Q(\alpha), \quad \forall \alpha \in C$$

Ou ainda:

$$P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n \equiv Q(x) = b_0 \cdot x^n + b_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} \cdot x + b_n \leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1} \text{ e } a_n = b_n$$

Exemplos:

Os polinômios $P(x) = (a - 2) \cdot x^4 + 7x^3 + (11 - d) \cdot x + e + 4$ e $Q(x) = (4 - b) \cdot x^3 + (1 - c) \cdot x^2 + 3x + 8$ são idênticos se

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \rightarrow a = 2 \\ 4 - b = 7 \rightarrow b = -3 \\ 1 - c = 0 \rightarrow c = 1 \\ 11 - d = 3 \rightarrow d = 8 \\ e + 4 = 8 \rightarrow e = 4 \end{cases}$$

Polinômio identicamente nulo

Um polinômio P(x) é identicamente nulo se tem valor numérico **ZERO** para todo valor de $x \in C$. Assim, todos os seus coeficientes são iguais a **ZERO**. O polinômio $P(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \ldots + 0 \cdot x + 0$ é identicamente nulo.

Exemplos:

1) São identicamente nulos os polinômios:
   a) $P(x) = 0x^4 + 0x^2 + 0x$
   b) $Q(x) = 0$

2) O polinômio $P(x) = (a - 3) \cdot x^3 + (1 - b) \cdot x^2 + (3.c + 1) \cdot x$ é identicamente nulo se

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \rightarrow a = 3 \\ 1 - b = 0 \rightarrow b = 1 \\ 3c + 1 = 0 \rightarrow c = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Operações com Polinômios

Adição

Dados dois polinômios A(x) e B(x), o polinômio soma S(x) = A(x) + B(x) é obtido através da soma algébrica dos

$P(1) = 7 . 1^4 - 3 . 1^2 + 2 . 1 - 6 = 0$

Como $P(1) = 0$, temos que 1 é a raiz de $P(x)$. É importante observarmos que os coeficientes não nulos de $P(x)$, neste caso,

termos semelhantes (com a mesma parte literal) de A(x)...

Importante: Supondo-se que $gr(A) \geq gr(B)$, então $gr(S) \leq gr(A)$ ou $S(x) = 0$.

Exemplos:

Dados os polinômios $P(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, $Q(x) = 4x^4 - 1$ e $R(x) = -x^3 + 8x^2 + 6x - 8$, temos que

a) $P(x) + Q(x) = (x^3 + 4x^2 - 2x + 3) + (4x^4 - 1) = 4x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x + 2$

b) $P(x) + R(x) = (x^3 + 4x^2 - 2x + 3) + (-x^3 + 8x^2 + 6x - 8) = 12x^2 + 4x - 5$

Multiplicação

Para multiplicarmos dois polinômios, devemos multiplicar todos os termos de um deles por todos os termos do outro, tal como aprendido na 7ª série. O grau do polinômio produto de dois polinômios é a soma dos graus desses polinômios. Ou seja, se $A(x)$ e $B(x)$ são dois polinômios e $P(x) = A(x) . B(x)$, então:

$$gr(P) = gr(A) + gr(B)$$

Exemplo:

Calculemos o produto dos polinômios $A(x) = 3x^2 + 2x + 3$ e $B(x) = 3x^4 - 2$:

$A(x) . B(x) = (3x^2 + 2x + 3) . (3x^4 - 2) = 3x^2 . 3x^4 + 2x . 3x^4 + 3 . 3x^4 + 3x^2 . (-2) + 2x . (-2) + 3 . (-2) = 9x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 6x^2 - 4x - 6.$

Verifiquemos que, neste exemplo, temos que

$$gr(A) = 2,\ gr(B) = 4 \text{ e } gr(A.B) = 2 + 4 = 6$$

Divisão

Dividir o polinômio $D(x)$, chamado **dividendo**, pelo polinômio não nulo $d(x)$, chamado **divisor**, é encontrar os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, respectivamente **quociente** e **resto**, tais que

$$D(x) \equiv d(x) . Q(x) + R(x)$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) Quando $gr(D) < gr(d)$, tem-se $Q(x) \equiv 0$ e $R(x) \equiv D(x)$.

b) Quando $gr(D) \geq gr(d)$, tem-se $gr(Q) = gr(D) - gr(d)$ e $gr(R) < gr(d)$ ou $R(x) \equiv 0$.

Métodos de Determinação da Divisão

1. *Método da Chave*

Neste caso, devemos armar a operação utilizando um algoritmo análogo àquele utilizado na divisão de números racionais estudada no Ensino Fundamental.

Exemplo:

Seja dividir o polinômio

$D(x) = 12x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 5$ pelo polinômio $d(x) = x^3 + 1$.

Em primeiro lugar, devemos escrever dividendo e divisor em ordem decrescente de potências da variável, completando com 0 (zero) os termos que por acaso estejam faltando no dividendo.

trocados, abaixo dos seus termos semelhantes no dividendo, procedendo-se, então, à soma algébrica dos termos do dividendo com esses termos colocados abaixo deles, o que nos dá o primeiro resto parcial.

Feito isto, o segundo termo do quociente será obtido de forma semelhante àquela utilizada para o cálculo do primeiro, considerando-se como novo dividendo o primeiro resto parcial.

Tal procedimento deverá ser repetido tantas vezes quantas forem possíveis até obtermos um resto de grau menor que o do divisor. Aí, a operação está encerrada.

Observe no algoritmo abaixo, passo a passo, o desenvolvimento desta operação.

Devemos notar que $gr(D) = 4$, $gr(d) = 3$, $gr(Q) = g(D) - g(d) = 1$ e $gr(R) < gr(d)$, ou seja, $gr(R) = 2 < 3$.

2. *Método de descartes ou método dos coeficientes a determinar*

Embora tal método não seja recomendado na maioria dos casos de divisão polinomial, cabe-nos mostrá-lo, para que saibamos de sua existência e, em determinados momentos, possamos utilizá-lo na resolução de certos exercícios. O exemplo abaixo nos mostra o procedimento neste caso.

Exemplo:

Seja obter o quociente e o resto da divisão de $D(x) = 12x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 5$ por $d(x) = x^3 + 1$, pelo método de Descartes.

Como $gr(D) = 4$ e $gr(d) = 3$, têm que $gr(Q) = 1$, ou seja, $Q(x)$ é do 1° grau, logo será da forma $Q(x) = ax + b$.

Já no caso de $R(x)$, temos que $gr(R) < gr(d)$, então $gr(R) < 3$, daí $R(x)$ será no máximo do 2° grau e então $R(x) = cx^2 + dx + e$. O próximo passo será determinar os valores de a, b, c, d e e que satisfazem à relação:

$D(x) \equiv d(x) . Q(x) + R(x)$

$12x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 5 \equiv (x^3 + 1) . (ax + b) + cx^2 + dx + e$

$12x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 5 \equiv ax^4 + bx^3 + ax + b + cx^2 + dx + e$

$12x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 5 \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + (a + d)x + b + e$

Pela identidade de polinômios, temos que:

$$\begin{cases} a = 12 \\ b = 6 \\ c = 4 \\ a + d = 0 \mapsto d = -12 \\ b + e = -5 \mapsto e = -11 \end{cases}$$

$\{Q(x) = ax + b = 12x + 6$

O primeiro termo do quociente será obtido dividindo-se o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor. Em seguida, tal termo é multiplicado por todos os termos do divisor, posicionando-se os termos obtidos, com os sinais

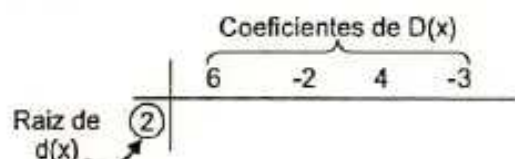
Logo: $R(x) = cx^2 + dx + e = 4x^2 - 12x - 11$

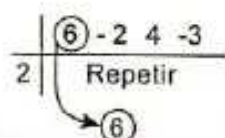
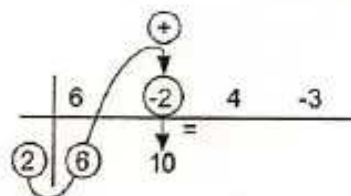
3. *Dispositivo de Briot-Ruffini*

Por intermédio desse processo podemos obter, com certa facilidade, o quociente e o resto da divisão de um polinômio P(x), de grau $n \geq 1$, por um binômio na forma $x - a$.

Exemplos:

1) Seja efetuar a divisão de $D(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ por $d(x) = x - 2$ utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

Em primeiro lugar, devemos observar a colocação dos termos de D(x) em ordem decrescente de potências da variável, completando com 0(zero) os termos de potências inexistentes, se houverem. Aproveitamos, então os coeficientes, tomados ordenadamente, e a raiz do divisor d(x), como mostrado no esquema abaixo:

Em seguida, devemos repetir o coeficiente de maior grau de D(x), pois ele será o coeficiente do termo de maior grau do quociente Q(x).

	6	-2	4	-3
2	Repetir			
	6			

O próximo coeficiente de Q(x) é obtido multiplicando a raiz de d(x) pelo coeficiente anterior, somando algebricamente tal resultado com o próximo coeficiente de D(x).

Este procedimento deve ser repetido até que o último coeficiente de D(x) seja utilizado.

O último valor obtido é o resto R(x) e os anteriores são os coeficientes dos termos de potências ordenadamente decrescentes de Q(x). É sabido que gr(Q) = gr(D) – gr(d), logo, neste caso, gr(Q) = 3 – 1 = 2. Assim:

$$Q(x) = 6x^2 + 10x + 24 \text{ e } R(x) = 45.$$

2) Dividir o polinômio $4x^4 - 2x^2 + 3$ por $x + 3$, utilizando o método de Briot-Ruffini.

| 4 0 -2 0 3

gr(Q) = gr(D) – gr(d) = 4 – 1 = 3

$Q(x) = 4x^3 - 12x^2 + 34x - 102$ e $R(x) = 309$

Teorema do Resto

"O resto da divisão de um polinômio P(x) por ax + b é dado por P(–b/a)".

Exemplos:

1) Vamos determinar o resto da divisão de $P(x) = 4x^4 - 2x^2 + 3$ por $d(x) = x + 3$. Para isto, basta calcularmos a raiz do divisor e obter o valor numérico do dividendo para tal valor de x.

Raiz do divisor: $x + 3 = 0 \longrightarrow x = -3$

$r = P(-3) = 4 \cdot (-3)^4 - 2 \cdot (-3)^2 + 3 = 309$

2) Seja obter o valor de K, de modo que o resto da divisão de $P(x) = x^3 - Kx + 4$ por $d(x) = x + 2$ seja igual a –6.

$x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2$

$r = P(-2) = -6$

$\downarrow$

$(-2)^3 - K \cdot (-2) + 4 = -6$

$2K = -2 \therefore K = -1$

Teorema D'Alembert

"Um polinômio P(x) é divisível por ax + b, se, e somente se, P(–b/a) = 0".

Este teorema é um corolário do teorema do resto, pois é sabido que um polinômio é divisível por outro, quando a divisão é exata, ou seja, quando o resto vale zero. Como, pelo aludido teorema, o resto da divisão de P(x) por ax + b é dado por P(–b/a), então temos que:

P(x) é divisível por ax + b $\longleftrightarrow$ P(–b/a) = 0

Exemplo:

Determinemos o valor de K, de tal modo que o polinômio $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + K$ seja divisível por $3x + 6$.

Neste caso, devemos, em primeiro lugar, obter a raiz do divisor.

$$3x + 6 = 0$$
$$x = -2$$

Para que ocorra a divisibilidade, é necessário que P(–2) = 0, então:

$$3 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2) + K = 0$$
$$K = -50$$

Teoria das Equações

Dado um polinômio de variável complexa $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in C$ e $n \in IN$, uma **equação polinomial ou algébrica** é do tipo P(x) = 0, ou seja:

$-3 \mid 4 \quad -12 \quad 34 \quad -102 \quad 309$

Coeficientes de Q(x) → R(x)

$P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot x + a_n$

Para resolvermos uma equação polinomial, devemos obter os valores de $x \in C$, que anulam o polinômio P(x). Isto é, as

raízes ou **soluções** da equação polinomial são as mesmas do polinômio **P(x)**.

Considerando um determinado conjunto universo U, chamamos **conjunto-solução** ou **conjunto-verdade** de uma equação, representados por **S** ou **V**, o conjunto cujos elementos são as raízes dessa equação, que sejam pertinentes a **U**.

Exemplos:

São equações polinomiais:

1) $x^3 - 8x^2 + 7x = 90$

2) $4x^9 - ix^7 + 3x^6 + 4 = 0$

3) $i\,x^4 + (i + 2)\,x^3 + 3x^2 - 7 = 0$

Grau de Uma Equação

O grau da equação $P(x) = 0$ é o mesmo do polinômio P(x).

Exemplo:

1) $7x^4 - 12x + 8 = 0$ grau = 4

2) $8x^3 - 7i\,x^8 + 6 = 0$ grau = 8

Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Enunciado, no século XVII, por **Girard** e, finalmente, demonstrado por **Gauss**, já no século XVIII, o **Teorema Fundamental da Álgebra** é de primordial importância no estudo da Teoria das Equações. Assim, temos o seguinte:

"Toda equação algébrica de grau n ($n \geq 1$) admite ao menos uma raiz complexa."

E, como consequência do **TFA**, temos que:

"Toda equação algébrica do n-ésimo grau ($n \geq 1$) admite n raízes complexas".

Exemplos:

1) Escrevamos um polinômio P(x) do 3° grau de raízes 1, 2 e –3, de tal modo que $P(0) = 12$.

Consideremos as raízes $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = -3$. Daí, representamos P(x) em sua **forma fatorada ou canônica:**

$$P(x) = a_0 \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)$$

$$P(x) = a_0 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$

Como $P(0) = 12$:

$$P(0) = a_0 \cdot (0 - 1) \cdot (0 - 2) \cdot (0 + 3)$$
$$12 = a_0 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 3$$
$$12 = 6 \cdot a_0$$
$$a_0 = 2$$

Logo:

$$P(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$

Ou ainda, aplicando-se a distributividade:

$$P(x) = 2x^3 - 14x + 12$$

2) A equação $x^4 - 16 = 0$ é do 4° grau, logo admite quatro raízes. Vamos determiná-las a seguir:

$$x^4 - 16 = 0$$

ou

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$S = \{-2, 2, -2i, 2i\}$$

Raízes Múltiplas

Uma raiz a de uma equação algébrica $P(x) = 0$, de grau n, é dita de multiplicidade **K** (K e IN* e $K \leq n$) se, na forma fatorada de P(x), o fator $x - a$ aparece exatamente **K** vezes. De uma forma simbólica, podemos escrever que:

α é raiz de multiplicidade K de P(x) 0 $\leftrightarrow$ $P(x) = (x - \alpha)^k \cdot Q(x) = 0$ e $Q(\alpha) \neq 0$.

Numa equação algébrica, uma raiz de multiplicidade 1 é chamada raiz simples; se a multiplicidade é 2, a raiz é dupla, será uma raiz tripla, se a multiplicidade for 3, e, assim, sucessivamente.

Exemplo:

Na equação $(x + 1)^3 \cdot (x - 2) \cdot (x + i)^2 = 0$ do grau 6, as raízes são:

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ (raiz tripla)

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ (raiz simples)

$x + i = 0 \rightarrow x = -i$ (raiz dupla)

Raízes Nulas

Uma equação algébrica cujo termo independente seja igual a zero admite, ao menos, uma raiz nula. A multiplicidade de tal raiz é igual ao menor expoente que a variável de coeficiente não nulo apresenta nesta equação.

Exemplo:

A equação $x^6 - 4x^4 + 3x^3 = 0$ não tem termo independente de variável, logo admite raiz nula. Como o menor expoente da variável é 3, esta é a multiplicidade da raiz 0 (zero), que obviamente será uma raiz tripla.

Raízes Irracionais

"Se uma equação algébrica de coeficientes racionais admite a raiz $a + \sqrt{b}$, onde a ε Q e b ε Q, então admitirá a sua conjugada $a - \sqrt{b}$ como raiz".

Exemplo:

Determinemos uma equação do 4° grau de raízes $2 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{2}$, com coeficientes racionais e $a_0 = 1$.

Se a equação é do 4° grau, terá quatro raízes. Pelo mostrado no item anterior, as raízes serão

$$2 + \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3},\ 1 - \sqrt{2} \text{ e } 1 + \sqrt{2}$$

E a equação será do tipo:

$$a_0 \cdot \left[x - \left(2 + \sqrt{3}\right)\right]\left[x - \left(2 - \sqrt{3}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right] \cdot \left[x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right] = 0$$

$$1.\left(x^2 - 2x + \sqrt{3}x - 2x + 4 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 3\right).$$

$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$.(x^2 - x - \sqrt{2}x - x + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}x - \sqrt{2} - 2) = 0$

$$(x^2 - 4x + 1) . (x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$$

Raízes Complexas

"Se uma equação algébrica de coeficientes reais admite a raiz complexa a + bi, sendo a, b e IR e b ≠ 0, admitirá também sua conjugada a – bi como raiz".

Daí, podemos concluir que, numa equação de coeficientes reais o número de raízes complexas não reais é sempre par.

Exemplos:

1) Seja obtermos uma equação do 4° grau de coeficientes reais, onde duas raízes são 3 + i e 2 – i.

Pelo visto neste item, tal equação terá raízes: 3 + i, 3 – i, 2 – i e 2 + i. Logo, na forma fatorada, teremos:

$a_0 . (x - \alpha_1) . (x - \alpha_2) . (x - \alpha_3) . (x - \alpha_4) = 0$

$a_0 . [x - (3 + i)] . [x - (3 - i)] . [x - (2 - i)] . [x - (2 + i)] = 0$

Fazendo, por exemplo, $a_0 = 1$:

$(x - 3 - i) . 1 . (x - 3 + i) . (x - 2 + i) . (x - 2 - i) = 0$

$(x^2\text{-}3x\text{+}xi\text{-}3x\text{+}9\text{-}3i\text{-}xi\text{+}3i\text{-}i^2) . (x^2\text{-}2x\text{-}xi\text{-}2x\text{+}4\text{+}2i\text{+}xi\text{-}2i\text{-}i^2) = 0$

$(x^2 - 6x + 10) . (x^2 - 4x + 5) = 0$

$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x^3 + 24x^2 - 30x + 10x^2 - 40x + 50 = 0$

$x^4 - 10x^3 + 39x^2 - 70x + 50 = 0$

2) A equação $ax^7 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex + f = 0$, de coeficientes reais, com a ≠ 0, é do 7°, logo admite sete raízes, as quais, quanto à natureza, poderão ser

a) 0 (zero) complexas e 7 reais

b) 2 complexas e 5 reais

c) 4 complexas e 3 reais

d) 6 complexas e 1 real

Raízes Racionais

Em seguida vamos abordar um processo que muito nos auxiliará na pesquisa das raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Assim, dada a equação $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$ de coeficientes inteiros, se o número irredutível $\alpha = \frac{p}{q}$ (p e q inteiros e q ≠ 0) é uma de suas raízes então p é divisor de a_n e q é divisor de a_0.

Exemplos:

1) Determinemos as possíveis raízes racionais da equação $2x^4 - 7x^3 - x^2 - 10x - 6 = 0$.

Como mostrado acima, se $\alpha = \frac{p}{q}$ é uma raiz racional desta equação, então p é divisor de $a_n = -6$ e q é divisor de $a_0 = 2$. Para minimizar o nosso trabalho, consideremos apenas os divisores positivos de a_0. Então,

$p \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$ e $q \in \{1, 2\}$

NOTA: Devemos observar as possíveis raízes inteiras dessa equação que são –6, –3, –2, –1, 1, 2, 3 e 6, as quais são os divisores de a_n. Assim podemos concluir que:

"Em uma equação de coeficientes inteiros, se a é uma raiz inteira então a é divisor de a_n".

Exemplo:

Seja obter as raízes da equação $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Assim, se o número racional $\alpha = \frac{p}{q}$ for raiz desta equação p será divisor de 1 e q será divisor de 2. Então:

$p \in \{-1, 1\}$ e $q \in \{1, 2\}$

$\alpha = \frac{p}{q} \varepsilon \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

Devemos verificar qual(is) deste(s) valor(s) é(são) raiz(es) de P(x). A sugestão é que iniciemos pelos valores inteiros, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini.

	2	-1	-2	1
-1	2	-3	1	0

Q(x)

	2	-3	1
-1	2	-5	6

Então –1 é raiz. Verifiquemos se é uma raiz múltipla.

Não. O número –1 é raiz simples.

Então:

$P(x) = (x + 1) . Q(x)$

$P(x) = (x + 1) . (2x^2 - 3x + 1)$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

1) **"Se a soma de todos os coeficientes de uma equação algébrica vale zero, então o número 1 é uma de suas raízes."**

Exemplo:

Determine as raízes da equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Solução:

Observe que a soma dos coeficientes 1, –2, –5 e 6 é igual a zero. Portanto uma das raízes vale 1. Então o primeiro membro da equação é divisível por x – 1. Vamos dividir

	1	-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Obtemos quociente $x^2 - x - 6$. Calculando suas raízes

$\alpha = \frac{p}{q} \varepsilon \{-6, -3, -2, -3/2, -1, -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 3, 6\}$

obtemos −2 e 3. Logo as raízes da equação daua 1, −2 e 3.

2) **"Se, em uma equação, a soma dos coeficientes dos termos em que a variável está elevada a expoente par é igual à soma dos coeficientes dos termos em que a variável está elevada a expoente ímpar então o número −1 é uma de suas raízes."**

Exemplos:

Na equação $7x^5 + 8x^4 - 6x^3 - 7 = 0$, como a soma dos coeficientes dos termos com variável elevada a expoente par $8 + (-7) = 1$ é igual à soma dos coeficientes dos termos com variável elevada a expoente ímpar $7 + (-6) = 1$, o número −1 é uma de suas raízes. Com efeito, se substituirmos x por −1:

$$7 \cdot (-1)^5 + 8 \cdot (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^3 - 7 = 0$$

temos a equação satisfeita.

Relações de Girard

Em meados do século XVII, o matemático **Albert Girard** verificou a existência de importantes relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica. Tais relações passamos a analisar a seguir.

Considerando-se uma equação algébrica $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, de raízes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, chamaremos de S_k à soma dos produtos dessas n raízes tomadas k a k. Assim, segundo as relações de Girard, temos que

$$S_k = (-1)^k \cdot \frac{a_k}{a_0}$$

Então:

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$S_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + ... + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$S_3 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_4 + ... + \alpha_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}$$

Cabe lembrar que S_1 e S_n são, respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação.

Exemplos:

1) Apliquemos as relações de Girard para a equação $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b, c e IR e $a \neq 0$.

Trata-se de uma equação do 2º grau. Temos que $a_0 = a$, $a_1 = b$ e $a_2 = c$. Daí, se as raízes desta equação são α_1 e α_2:

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{b}{a}$$

$$S_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{c}{a}$$

Tais fórmulas já são nossas velhas conhecidas do 1º grau e nos permitem determinar respectivamente a soma e o produto

2) Escrevamos agora as relações de Girard para a equação $3x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 5 = 0$

Desta equação temos $a_0 = 3$, $a_1 = -12$, $a_2 = 7$, $a_3 = 0$ e $a_4 = -5$

Então, se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 são as raízes:

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{-12}{3} = 4$$

$$S_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_4 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \alpha_3 \cdot \alpha_4 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{7}{3}$$

$$S_3 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 = -\frac{a_3}{a_0} = 0$$

$$S_4 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 = \frac{a_4}{a_0} = -\frac{5}{3}$$

Exercícios

1) Entre as expressões algébricas mostradas a seguir, identifique os polinômios e determine os seus respectivos graus.

a) $A(x) = 5x^7 - 11x^6 + 7x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 6$
b) $B(x) = 2x^2 + 5x^4 - 3x^6 + 11 - 4x^3$
c) $C(x) = 5x^{-3} + 6x^{-2} - 4$
d) $D(x) = 4x^4 + 0x^8 - 5x^3 + x^5 - 3$
e) $E(x) = \frac{5}{8} + \sqrt[3]{7}x^1 - 3,76x^2$
f) $F(x) = \frac{2}{\sqrt[5]{3x^2}} + 0x^3 - 6$
g) $G(x) = 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$
h) $H(x) = 7$
i) $I(x) = 3x^3 - 2x^{1/4} + 5x^{-2}$

2) Dentre os números 0, -2, 3, 2+i e 3-i, quais são raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 15x$?

3) Os polinômios $P(x) = (m + 3)x^n - (4 - n)x^2 + 2q + 8$ e $Q(x) = -2x^n + 6x^2 + (p + 4)x - 10$ são idênticos. Determine o valor da soma dos números reais m, n, p e q.

4) Qual o grau do polinômio $P(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 4)^4 \cdot (x + 6)^6 \cdot (x - 8)^8 ... (x + 18)^{18}$?

5) Os números 2, 5, -3 e 11 são raízes do polinômio $P(x) = (a - 2)x^2 + (a + 2b - 4)x + a + b - c + 1$. Determine o valor do produto entre os números reais a, b e c.

6) Dados os polinômios $A(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x - 6$, $B(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 2$ e $C(x) = x^2 + 2x - 3$, efetue as seguintes operações:

a) $A(x) + C(x)$
b) $A(x) - B(x)$
c) $A(x) + B(x) - 2C(x)$
d) $A(x) : C(x)$
e) $[C(x)]^2$

7) **(ITA)** No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio p(x) cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de p(x), então a soma a + b + c é igual a

a) -1/2.
b) -1/4.
c) 1/2.
d) 1.
e) 3/2.

das raízes de uma equação do 2º grau.

8) Um polinômio $P(x)$, do terceiro grau, possui raízes iguais a 3, 2 e -4. Determine $P(x)$, sabendo que $P(0) = 48$.

9) Dado o polinômio $A(x)$, do segundo grau, de raízes -5 e 6, tal que $A(-2) = -120$, determine o valor de $A(2)$.

10) Determine as raízes da equação $x^3 \cdot (x + 6) \cdot (x^2 - 9) \cdot (x^3 - 2x^2) = 0$.

11) O polinômio $P(x) = x^4 \cdot (x^2 + 1) \cdot (3x - 4) \cdot (x^3 - x^2)^{k+3}$ admite 12 raízes nulas. Determine o valor do número real k.

12) No polinômio $Q(x) = (x - 3) \cdot (x^2 - 9)^2 \cdot (x^2 - 4x + 3)^{m-2}$, a raiz 3 tem multiplicidade 8. Determine o valor do número real m.

13) Determine o resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 4$ por $x - 1$.

14) O polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x + 2 - k$ é divisível por $x + 1$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$.

15) **(FGV)** Se o polinômio $P(x) = x^3 - kx^2 + 6x - 1$ for divisível por $x - 1$, ele também será divisível por:

a) $x^2 - 5x + 1$
b) $x^2 - 5x + 3$
c) $x^2 + 5x + 1$
d) $x^2 + 5x + 3$
e) $x^2 - 5x + 5$

16) Sejam $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ e $Q(x) = x - a$ dois polinômios, com valores de em R. Um valor de a para que o polinômio $P(x)$ seja divisível por $Q(x)$ é

a) 1.
b) -2.
c) -1/2.
d) 2.
e) 3.

17) O polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + (m + 1)x + k$, com m e k reais, é divisível por $x - 1$ e $x - 2$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 3$.

18) **(EN)** Determine o resto da divisão de

$$P(x) = \sum_{j=1}^{40} (3j) \cdot (x+1)^{40-j} \text{ por } x + 2.$$

19) Uma das raízes do polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ é igual a 2. Determine as demais raízes de $P(x)$.

20) O polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d$, $d \in R$, é divisível por $x - 2$.

a) Determine o valor de d.
b) Calcule as raízes da equação $P(x) = 0$.

21) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

22) **(PUC)** Se o polinômio $x^5 - ax^4 + b$ é divisível por $(x - 1)^2$, calcule a soma $a + b$.

23) **(PUC)** Determine todas as raízes da equação $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$.

24) **(UERJ)** As equações $x^3 + x + 10 = 0$ e $x^3 - 19x - 30 = 0$, em que $x \in C$, têm uma raiz comum.
Determine todas as raízes não comuns.

25) Considere um polinômio do quarto grau e coeficientes reais em que três raízes são iguais a i^{327}, i^{248} e i^{138}. Esse polinômio pode ser representado por:

a) $x^4 + x^2 + 1$
b) $x^4 - x^2 + 1$
c) $x^4 - x^2 - 1$
d) $x^4 + 1$
e) $x^4 - 1$

26) **(PUC)** Dada a função $f(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, determine

a) $f(-1)$ e $f(0)$.
b) as raízes de $f(x) = 9$.

27) Sabendo que as raízes da equação $5x^3 - 2x^2 + 6x - 1 = 0$ são a, b e c, determine os valores das expressões:

a) $a + b + c$
b) $ab + ac + bc$
c) abc
d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
e) $a^2 + b^2 + c^2$

28) **(FUVEST)** Seja $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de $p(x)$ são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares tem o polinômio $p(x)$?

29) O polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$ também pode ser escrito como $P(x) = (x - 1)^n \cdot (x - p)$. Determine o valor do número real p.

30) Determine o valor do número real m na equação $x^4 - 12x^3 + (m + 2)x^2 - (2 - m)x + m - 1 = 0$, sabendo que a soma de três de suas raízes vale 10.

31) A soma e o produto das raízes de um polinômio do quarto grau, e de coeficientes racionais, valem, respectivamente, 7 e -120. Sabendo que uma de suas raízes é $3 - i$, determine suas demais raízes.

32) No polinômio $P(x) = 4x^3 + kx^2 + mx - 4$, as raízes são 4, $\text{sen}^2 23°$ e $\text{sen}^2 67°$. Determine os valores dos números reais k e m.

33) O produto das raízes da equação
$3x^3 + (k - 4)x^2 - (2 - k)x + 2k + 1 = 0$ é igual a -5.
Determine o valor da soma das suas raízes.

34) A soma dos quadrados das raízes da equação $2x^4 - 8x^3 + (m + 1)x^2 + (2 - m)x + 4 = 0$ vale 12. Determine o valor da soma dos inversos das suas raízes.

35) **(PUC)** Determine a soma dos quadrados das raízes da equação $x^5 - 2x^4 - x^3 - 7x^2 + 19x - 1 = 0$.

36) **(UERJ)** Os zeros do polinômio $p(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$ formam uma progressão aritmética. Determine o conjunto solução da equação $p(x) = 0$.

37) **(FUVEST)** Considere o polinômio não nulo $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, onde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ estão em progressão geométrica de razão $q \neq 0$. Calcule $P(1/q)$.

38) **(UERJ)** Uma sequência de três números não nulos está em progressão harmônica se seus inversos formam uma

progressão aritmética.
As raízes da equação $x^3 + mx^2 + 15x - 25 = 0$ estão em progressão harmônica. Determine todas as suas raízes.

39) **(PUC)** Determine os valores das constantes a e b, para os quais $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$ para todo $x \notin \{2, 3\}$.

40) **(UERJ)** Determine a e b de forma que, para todo x real e tal que $|x| \neq 1$, se tenha $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$.

41) Os restos das divisões do polinômio P(x) por $x - 3$ e $x + 1$ são respectivamente iguais a 10 e 2. Determine o resto da divisão de P(x) por $(x - 3)(x + 1)$.

42) **(FUVEST)** P(x) é um polinômio de grau $n \geq 2$ e tal que $P(1) = 2$ e $P(2) = 1$. Sejam $D(x) = (x - 2)(x - 1)$ e Q(x) o quociente da divisão de P(x) por D(x).

a) Determine o resto da divisão de P(x) por D(x).
b) Sabendo que o termo independente de P(x) é igual a 8, determine o termo independente de Q(x).

43) **(PUC)** Determine o resto da divisão do polinômio $x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$ pelo polinômio $x^3 - x$.

44) **(ITA)** O polinômio com coeficientes reais $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i. Então, a soma dos coeficientes de P(x) é igual a:

a) -4
b) -6
c) -1
d) 1
e) 4

45) Determine todas as raízes da equação $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

46) **(UNICAMP)** Determine o quociente e o resto da divisão de $x^{100} + x + 1$ por $x^2 - 1$.

47) Resolva as equações:

a) $6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0$
b) $40x^5 - 246x^4 + 287x^3 + 287x^2 - 246x + 40 = 0$
c) $15x^4 - 28x^3 - 230x^2 - 28x + 15 = 0$

48) **(UNICAMP)** Considere a equação

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

a) Mostre que $x = i$ é raiz dessa equação.
b) Encontre as outras raízes da mesma equação.

49) **(ITA)** Seja a um número real tal que o polinômio $p(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - ax^2 - 2x - 1$ admite apenas raízes reais. Então:

a) $a \in [2, \infty[$
b) $a \in [-1, 1]$
c) $a \in]-\infty, -7]$
d) $a \in [-2, -1[$
e) $a \in]1, 2[$

50) Seja $(1 + x + x^2)^{10} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_{20}x^{20}$. Assinale a alternativa na qual consta o valor de $A_1 + A_3 + A_5 + ... + A_{19}$.

a) $3^9 + 3^8 + 3^7 + ... + 3 + 1$
b) 0
c) 3^{10}
d) $3^9 - 3^8 + 3^7 - 3^6 + ... + 3 - 1$
e) 1

51) **(UERJ)** Considere duas embalagens, uma no formato de um cubo de aresta x dm e outra na forma de um paralelepípedo retângulo com dimensões x, x e 5, em decímetros. A diferença entre as capacidades de armazenamento dessas embalagens, em dm^3, é expressa por $x^3 - 5x^2 = 36$. Considerando essa equação,

a) demonstre que 6 é uma de suas raízes;
b) calcule as suas raízes complexas.

52) **(UERJ)** As dimensões de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio $3x^3 - 13x^2 + 7x - 1$. Em relação a esse paralelogramo, determine:

a) a razão entre a sua área total e o seu volume;
b) suas dimensões.

53) **(UERJ)** Para fazer uma caixa sem tampa com um único pedaço de papelão, utilizou-se um retângulo de 16 cm de largura por 30 cm de comprimento. De cada um dos quatro cantos desse retângulo foram retirados quadrados de áreas idênticas e, depois, foram dobradas para cima as abas resultantes.

Determine a medida do lado do maior quadrado a ser cortado do pedaço de papelão, para que a caixa formada tenha:

a) área lateral de 204 cm^2;
b) volume de 600 cm^3.

54) **(UERJ)** Admita a possibilidade de contar objetos de duas maneiras, uma na base x e outra na base $(x + 3)$. Ao empregar essas duas maneiras para contar determinado grupo de objetos, obtemos $(2343)_x = (534)_{x+3}$.

Calcule o valor da base x e as outras duas raízes da equação resultante.

55) Considere a função real de variável real $f(x) = (x - 4)(x - 2)^3(x + 3)^2$ e determine sua variação de sinal em todo o seu domínio.

56) **(FUVEST)**

a) Quais são as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$?
b) Decomponha o polinômio p(x) em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2.
c) Resolva a inequação $p(x) < 4(x - 2)$.

57) **(UNICAMP)** Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 26$.

a) Verifique se o número complexo $2 + 3i$ é raiz desse polinômio.
b) Prove que $p(x) > 0$ para todo número real $x > -2$.

58) **(ITA)** Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I.

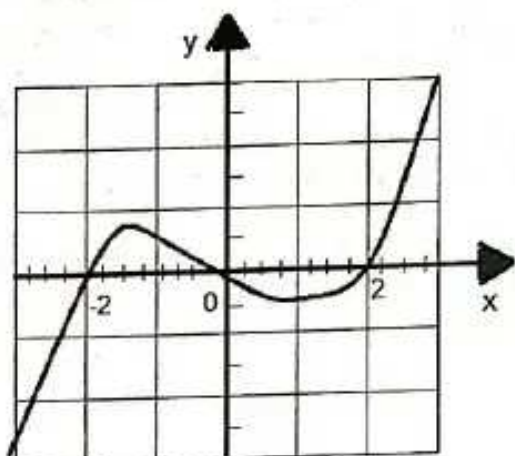
Na inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$, a soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a

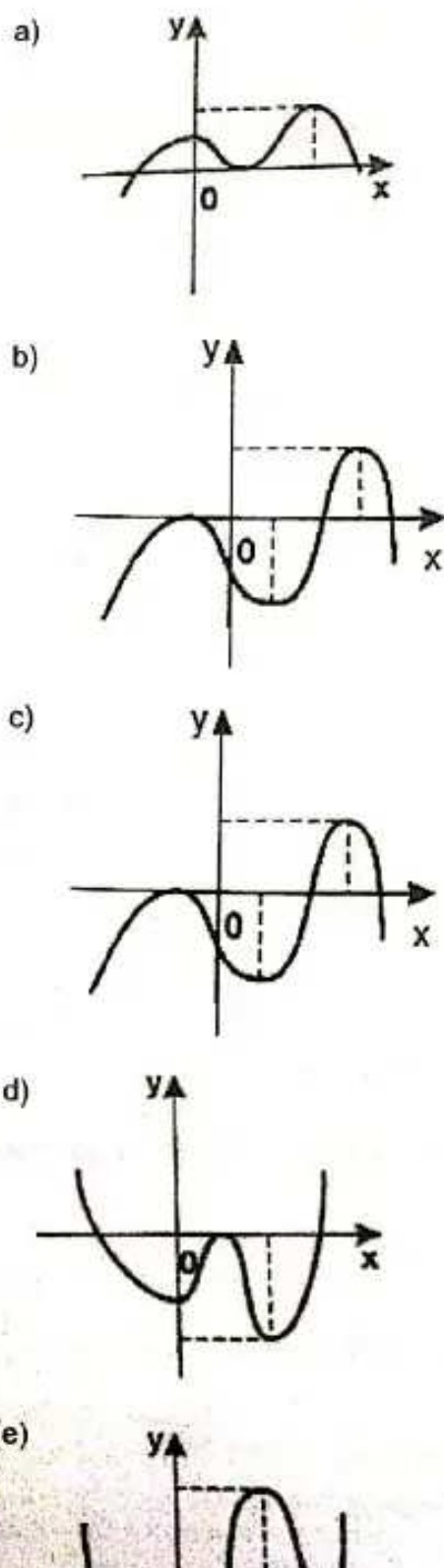
a) 3/4.
b) 3/2.
c) 7/3.
d) 11/6.
e) 7/6.

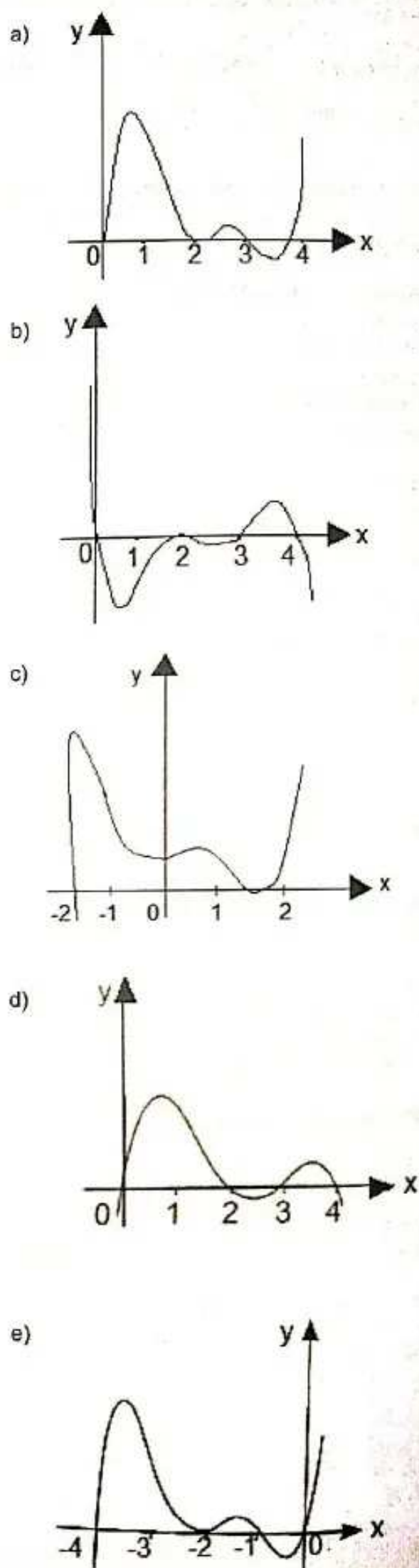
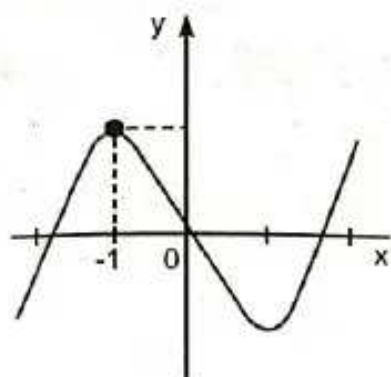
59) **(UNICAMP)** Seja $p(x) = x^3 - 12x + 16$.

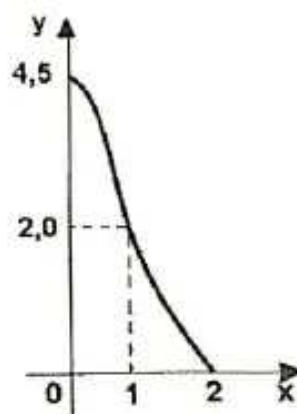
a) Verifique que $x = 2$ é raiz de p(x).
b) Use fatoração para mostrar que se $x > 0$ e $x \neq 2$, então $p(x) > 0$.

c) Mostre que, entre todos os prismas retos de bases quadradas que têm volume igual a $8m^3$, o cubo é o que tem menor área total.

60) **(UERJ)** A figura abaixo representa o polinômio P definido por $P(x) = x^3 - 4x$.

a) Determine as raízes desse polinômio.
b) Substituindo-se, em P(x), x por x – 3, obtém-se um novo polinômio definido por y = P(x – 3). Determine raízes desse novo polinômio.

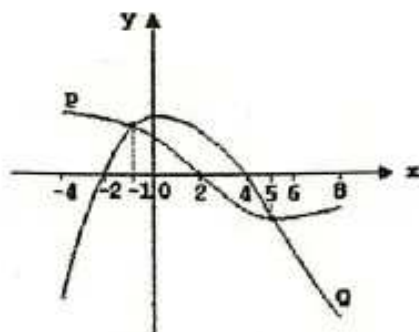
61) O gráfico que melhor representa a função polinomial $P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 4) \cdot (x + 9)$ é:

a)
b)
c)
d)
e)
62) **(FUVEST)** Dado o polinômio $p(x) = x^2 (x - 1) (x^2 - 4)$, o gráfico da função $y = p(x - 2)$ é melhor representado por:

a)
b)
c)
d)
e)

63) **(PUC)** O gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x$ está representado na figura a seguir:

Quantas soluções reais tem a equação $x^3 - 3x - 3 = 0$?

64) **(UFF)** Uma parte do esboço do gráfico de uma função polinomial f é dada na figura:

Sabe-se que a função f possui somente três raízes: a raiz $x = 2$ e outras duas que são reais e simétricas.

Determine:

a) a expressão polinomial que define f.
b) o(s) intervalo(s) em que f é positiva.

65) **(FUVEST)** Os gráficos de duas funções polinomiais P e Q estão representados na figura seguinte.

Então, no intervalo [-4, 8], $P(x) \cdot Q(x) < 0$ para:

a) $-2 < x < 4$
b) -2 , $x < -1$ ou $5 < x < 8$
c) $-4 \leq x < -2$ ou $2 < x < 4$
d) $-4 \leq x < -2$ ou $5 < x \, 8$
e) $-1 < x < 5$

66) Para que valor real de k, o polinômio $P(x) = x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ é divisível por $x + y + z$?

67) **(IME)** Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\theta + x\,\text{sen}\,\theta)^n$ por $x^2 + 1$, onde n é um número natural.

68) **(IME)** Considere o polinômio

$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a $3 - i$ e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

Gabarito

1)
a) Polinômio de grau 7
b) Polinômio de grau 6
c) Não é polinômio
d) Polinômio de grau 5
e) Polinômio de grau 3
f) Não é polinômio
g) Polinômio sem grau definido
h) Polinômio de grau 0
i) Não é polinômio

2) 0, 3 e 2 + i

3) -8

4) 90

5) 8

6)
a) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6x - 9$
b) $3x^4 - 12x^2 + 3x - 4$
c) $3x^4 + 4x^3 + x - 2$
d) Quociente: $3x^2 - 4x + 12$
Resto: $-32x + 30$
e) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$

7) a

8) $P(x) = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$

9) -140

10) 0 (raiz quíntupla), -6, -3, 2, 3

11) 1

12) 7

13) 4

14) 24

15) a

16) a

17) 40

18) 60

19) -2 e -3

20)
a) 10
b) $-\sqrt{5}, 2$ e $\sqrt{5}$

21) -3 e 1 (raiz tripla)

22) $\frac{3}{2}$

23) -1; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

24) $2 - 2i$, $2 + 2i$, -3 e 5

25) e

26)
a) $f(-1) = 0$ e $f(0) = 1$
b) $-1 - \sqrt{3}\,i$, $-1 + \sqrt{3}\,i$ e 2

27)
a) $\frac{2}{5}$
b) $\frac{6}{5}$
c) $\frac{1}{5}$
d) 6
e) $\frac{-56}{25}$

28) 3

29) 2

30) 11

31) $3 - i$, -3 e 4

32) $k = -20$ e $m = 17$

33) -1

34) $\frac{1}{4}$

35) 6

36) $S = \{2, 4, 6\}$

37) $a_0(n + 1)$

38) $1 - 2i$, $1 + 2i$ e 5

39) $a = -1$ e $b = 1$

40) $a = 1$ e $b = 1$

41) $2x + 4$

42)
a) $-x + 3$
b) 2,5

43) $5x$

44) a

45) 1, $\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ e $\frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

46) $Q(x) = x^{98} + x^{96} + \cdots + x^2 + 1$
$R(x) = x + 2$

47)
a) $S = \left\{-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$
b) $S = \left\{-1, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}, 4\right\}$
c) $S = \left\{\frac{-\frac{5}{3} \pm i\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{5}, 5\right\}$

48)
a) demonstração
b) $-i$, $\frac{-7 + \sqrt{33}}{4}$ e $\frac{-7 - \sqrt{33}}{4}$

49) c

50) a

51)
a) demonstração
b) $\frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$

52)

53)
a) 3 cm
b) 5 cm

54) $x = 5$ e raízes: $\frac{-4 \pm i\sqrt{6}}{2}$

55) $f(x) < 0 \rightarrow -2 < x < 4$
$f(x) = 0 \rightarrow x \in \{-3, 2, 4\}$
$f(x) > 0 \rightarrow x < -3$ ou $-3 < x < 2$ ou $x > 4$

56)
a) 2
b) $p(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$
c) $S = \{x \in R \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

57)
a) Sim
b) demonstração

58) d

59)
a) Sim
b) demonstração
c) demonstração

60)
a) -2, 0 e 2
b) 1, 3 e 5

61) d

62) a

63) 1

64)
a) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 3)(x + 3)$
b) $]-3, 2[\cup]3, +\infty[$

65) c

66) -3

67) $R(x) = x \operatorname{sen}(n\theta) + \cos(n\theta)$

68) $1 \pm i$, $2 \pm i$ e -3

Anotações

a) 14

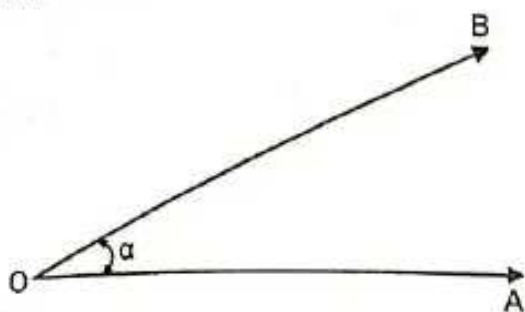
b) $\frac{1}{3}, 2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$

Capítulo I

ÂNGULOS

Definição

Ângulo é a região do plano limitada por duas semi-retas de mesma origem.

Nomenclatura $\begin{cases} A\hat{O}B \text{ ou } B\hat{O}A \\ \alpha \\ \hat{O} \\ \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \end{cases}$

Sistema sexagesimal para a medição de ângulos

Unidade Padrão: Grau (°)

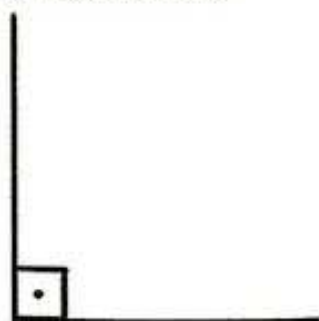
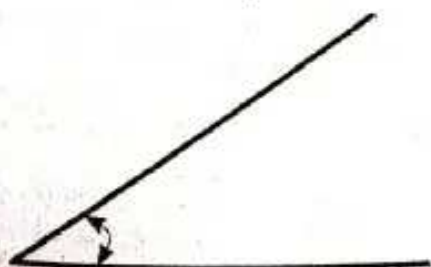
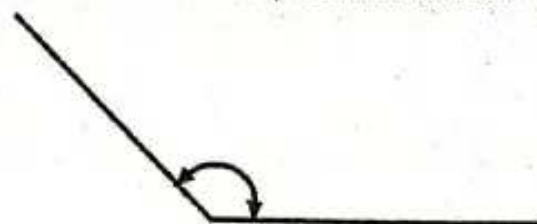
$1° = \frac{1}{360}$ da circunferência

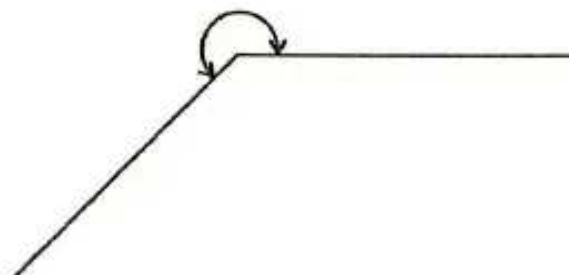
Relações $\begin{cases} 1° = 60' \\ 1' = 60'' \\ 1° = 3.600'' \end{cases}$

Submúltiplos $\begin{cases} \text{Minuto (')} \\ \text{Segundo ('')} \end{cases}$

> **NOTA:** Uma circunferência possui 360°.

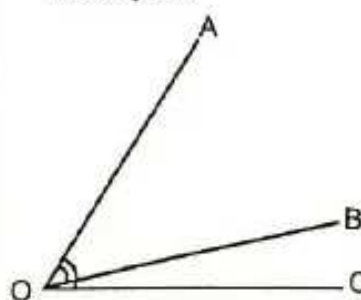
Tipos de Ângulos

a) Reto – abertura igual a 90°.

b) Agudo – abertura menor que 90°.

d) Obtuso – abertura compreendida entre 90° e 180°.

e) Cheio, pleno ou uma volta – abertura igual a 360°.

f) Reentrante ou côncavo – abertura compreendida entre 180° e 360°.

> **NOTA:** Todo ângulo positivo cuja abertura é menor que 180° é dito saliente ou convexo.

Ângulos Consecutivos

Dois ângulos são consecutivos quando possuem um lado comum.

Exemplos:

- Os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ são consecutivos.
- Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos.
- Os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos.

- Os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são consecutivos.

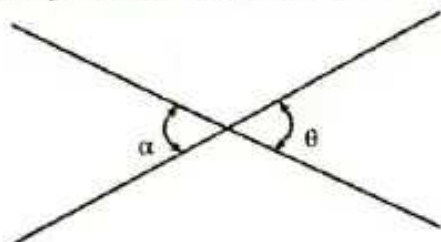
Ângulos Adjacentes

Dois ângulos são adjacentes quando possuem o mesmo vértice, um lado comum e os lados não comuns, chamados de lados exteriores, situados em semi-planos distintos determinados pela reta suporte do lado comum.

c) Raso ou meia volta – abertura igual a 180°.

NOTA: Dois ângulos adjacentes são ângulos consecutivos cujo lado comum está entre os não comuns.
$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes
$A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ não são adjacentes

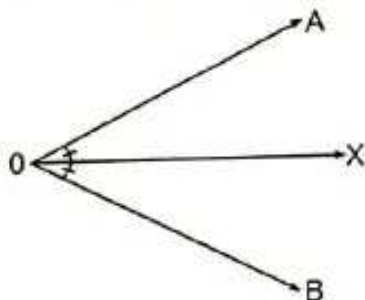
Ângulos Opostos pelo Vértice (o.p.v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um deles são os prolongamentos dos lados do outro.

$\hat{\alpha}$ e $\hat{\theta}$ são opostos pelo vértice.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Dois ângulos o.p.v. são congruentes, daí: $\hat{\alpha} = \hat{\theta}$

Bissetriz de Um Ângulo

É a semi-reta que parte do vértice do ângulo dividindo-o em dois outros ângulos congruentes.

$\overrightarrow{OX}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, então:
$A\hat{O}X = X\hat{O}B$

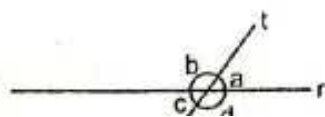
Complemento, Suplemento e Replemento

a) Dois ângulos *complementares* são aqueles cuja soma vale 90°. O *complemento* de um ângulo é o que falta à sua medida para completar 90°.

b) Dois ângulos *suplementares* são aqueles cuja soma vale 180°. O *suplemento de* um ângulo é o que falta à sua medida para completar 180°.

c) Dois ângulos *replementares* são aqueles cuja soma vale 360°. O *replemento* de um ângulo é o que falta à sua medida para completar 360°.

Retas Paralelas Cortadas por Transversal ou Secante

Na figura abaixo, supondo que a transversal t não é perpendicular às paralelas r e s, formam-se oito ângulos de soma 720°, dos quais quatro são agudos (a,c,e,g) e congruentes e quatro são obtusos (b,d,f,h) também congruentes entre si.

Nomenclatura

a) *Correspondentes*: são ângulos que ocupam posições análogas em relação às paralelas ($\hat{a}$ e $\hat{e}$, $\hat{b}$ e $\hat{f}$, $\hat{c}$ e $\hat{g}$, $\hat{d}$ e $\hat{h}$).

b) *Alternos internos*: são ângulos que estão em lados opostos em relação à transversal e entre as paralelas ($\hat{a}$ e $\hat{e}$, $\hat{d}$ e $\hat{f}$).

c) *Alternos externos*: são ângulos que estão em lados opostos em relação à transversal e exteriores às paralelas ($\hat{a}$ e $\hat{g}$, $\hat{b}$ e $\hat{h}$).

d) *Colaterais internos*: são ângulos que estão do mesmo lado da transversal e entre as paralelas ($\hat{c}$ e $\hat{f}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$).

e) *Colaterais externos*: são ângulos que estão do mesmo lado da transversal e exteriores às paralelas ($\hat{a}$ e $\hat{h}$, $\hat{b}$ e $\hat{g}$).

NOTA: (i) dois ângulos correspondentes ou alternos são congruentes.
(ii) dois ângulos colaterais são suplementares.

Exercícios

1) A medida 7° é equivalente a quantos minutos e a quantos segundos?

2) A quantos segundos equivale a medida 23°34'?

3) A medida 48°28'12" equivale a quantos segundos? E a quantos graus?

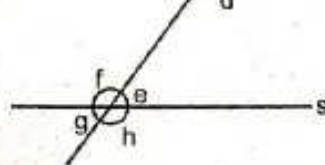
4) Sabendo-se que um grado é a centésima parte de um ângulo reto, quantos grados tem o ângulo de 45°36'54"?
   a) 50,48333...
   b) 50,58333...
   c) 50,68333...
   d) 50,78333...
   e) 50,88333...

5) Resolva as operações:
   a) 123°19'43" + 26°54'39"
   b) 47°33'28" + 52°26'32"
   c) 114°26'15" – 62°47'38"
   d) 76°– 34°22'52"
   e) 87°13" – 44°29'
   f) 42°26'38" x 5
   g) 134°41'48" : 6
   h) 111°54'36" : 7

6) As medidas, em graus, de dois ângulos opostos pelo vértice são expressas por 3x – 40 e 88 – x. Determine o valor da soma das medidas desses ângulos.

7) Duas retas intersectam-se em um ponto, formando quatro ângulos. As medidas dos dois maiores ângulos são expressas, em graus, por 4x + 12 e 2x + 94. Determine a medida do menor ângulo formado por essas retas.

8) Em torno de um mesmo ponto são traçados quatro ângulos de medidas, em graus, expressas por 5x + 25, 3x + 3, 6x – 82 e 4x. Determine as medidas de todos esses ângulos.

esses ângulos.

9) Dois ângulos adjacentes cujos lados exteriores estão em linha reta, têm medidas, em graus, iguais a $2x - 20$ e $3x + 30$. Determine suas medidas.

10) O brinquedo Gira-gira é composto por um eixo giratório do qual saem três hastes metálicas de mesmo tamanho, em cujas extremidades livres são colocadas cadeiras destinadas aos usuários. As medidas dos ângulos formados pelas hastes, duas a duas, em graus, são proporcionais a 4, 11 e 3. Determine as medidas desses ângulos.

11) **(ENEM)** Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado de "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

a) uma volta completa.
b) uma volta e meia.
c) duas voltas completas.
d) duas voltas e meia.
e) cinco voltas completas.

12) Dois ângulos adjacentes têm medidas iguais a 27° e 95°. Determine o ângulo formado por suas bissetrizes.

13) Quanto vale a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos complementares adjacentes?

14) Os ângulos $M\hat{O}N$ e $N\hat{O}P$ são adjacentes e $N\hat{O}P$ mede 28°. Determine a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de $M\hat{O}N$ e $M\hat{O}P$.

15) Considere os ângulos adjacentes $M\hat{O}N$ e $N\hat{O}P$ cujas bissetrizes são, respectivamente, OX e OY. Se a bissetriz do ângulo $X\hat{O}Y$ forma 50° com OP e $M\hat{O}N$ mede 86°, determine a medida do ângulo $N\hat{O}P$.

16) Marca-se um ponto O sobre uma reta r e, para um mesmo semiplano, traçam-se as semirretas OX e OY, que formam com r os ângulos a e b. Sabendo que o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos a e b mede 148°, determine a medida do ângulo $X\hat{O}Y$.

17) As medidas de dois ângulos complementares diferem de 18°. Determine suas medidas.

18) Dois ângulos são suplementares. Determine suas medidas, sabendo que o triplo da medida de um deles excede de 100° a medida do outro.

19) As medidas, em graus, de dois ângulos replementares são expressas por $5x - 7$ e $3x + 15$. Determine-as.

20) Determine a soma das medidas do complemento de 54°16'43" com o suplemento de 78°54'33" com o replemento de 212°17'49".

21) Dois ângulos são EXPLEMENTARES quando a diferença entre suas medidas equivale a 180°. Sabendo que os ângulos $a = 4x + 40°$ e $b = 2x - 60°$ são adjacentes e explementares, determine o ângulo formado pelas suas bissetrizes.

22) Determine a soma do explemento de 210° com o

23) Determine o suplemento do complemento de 70°.

24) Determine o replemento do suplemento do complemento de 34°27'42".

25) O replemento do complemento de um ângulo vale 300°23'12", determine a sua medida.

26) O replemento do suplemento do complemento do suplemento de um ângulo vale 245°16'37".

27) A soma de três ângulos é 220°. Determine suas medidas, sabendo que os dois primeiros são complementares e os dois últimos são suplementares.

28) O triplo do complemento de um ângulo, diminuído de seu suplemento, dá 20°. Determine a medida desse ângulo.

29) O replemento de um ângulo, diminuído do dobro do suplemento desse ângulo, aumentado do quádruplo da medida desse mesmo ângulo, dá resultado 195°. Determine a medida desse ângulo.

30) A metade do replemento de um ângulo, diminuída da terça parte do seu suplemento, aumentada da sexta parte de seu complemento, dá 121°. Determine a medida desse ângulo.

31) O triplo do complemento de um ângulo, aumentado do dobro do suplemento do dobro desse ângulo, diminuído da sexta parte do replemento do triplo desse mesmo ângulo, dá resultado 336°. Determine o explemento desse ângulo.

32) A medida de um ângulo a equivale ao dobro do suplemento do ângulo b, enquanto que o ângulo b equivale ao quíntuplo do complemento de a. Determine o ângulo formado pelas bissetrizes de a e b.

33) O professor de Geometria pediu que Fernanda e Flávia pensassem na medida de um ângulo agudo, cada uma. Em seguida pediu que cada uma delas somasse o replemento de seu ângulo com o dobro do suplemento dele e, do resultado, subtraíssem o triplo do complemento desse mesmo ângulo. Curiosamente, elas verificaram ter chegado a um mesmo resultado, embora tenham partido de ângulos diferentes. Que resultado elas encontraram?

34) Dois ângulos correspondentes obtidos de duas paralelas cortadas por uma transversal são expressos, em graus, por $2x - 4$ e $x + 32$. Determine as medidas dos oito ângulos formados.

35) Dois ângulos colaterais externos formados por duas paralelas cortadas por uma secante têm suas medidas, expressas em graus, diretamente proporcionais a 2 e 3. Determine as medidas dos oito ângulos formados.

36) Duas paralelas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos cujas medidas são $4x - 12°$ e $2x + 36°$. Determine os oito ângulos formados.

37) Uma reta forma oito ângulos ao intersectar duas outras retas paralelas. Se um dos ângulos agudos equivale à quinta parte da soma dos quatro ângulos obtusos, determine as medidas de todos os oito ângulos formados.

explemento de 70°. (Não se esqueça que na Geometria Plana as medidas dos ângulos variam de 0° a 360°.)

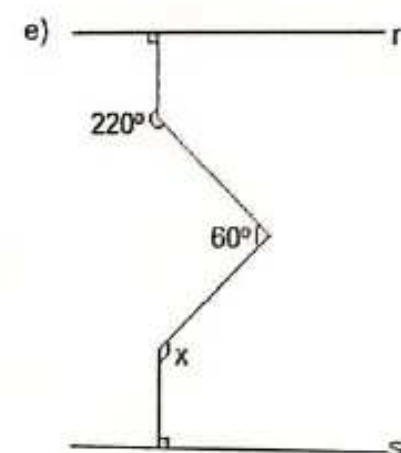
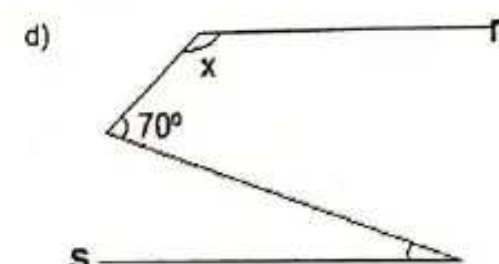
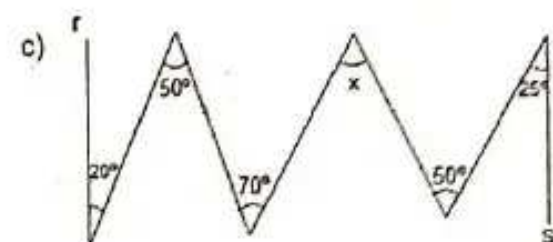
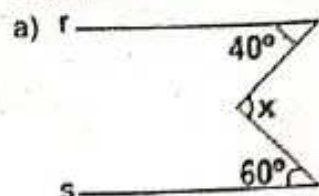
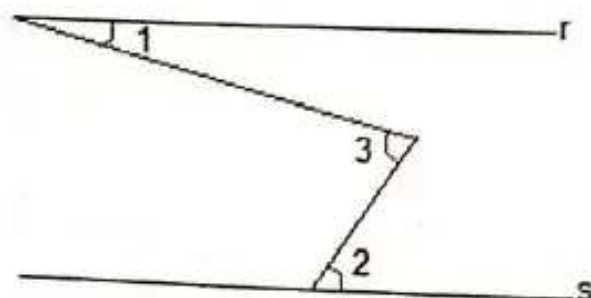
38) Determine a medida do ângulo x, em cada um dos itens a seguir, considerando que a reta r é paralela à reta s.

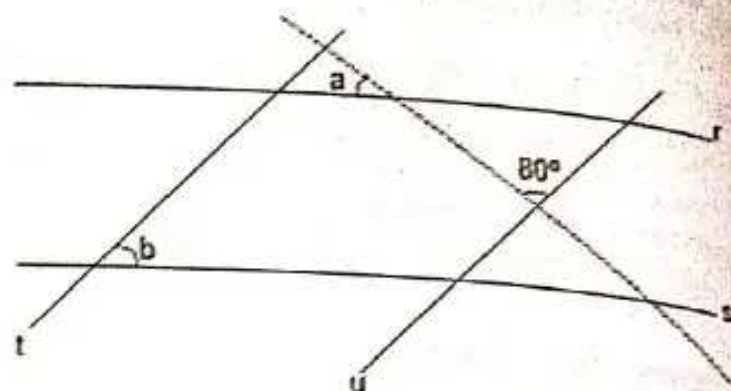
a)

b)

c)

d)

e)

39) **(FUVEST)** Na figura, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida em graus do ângulo 3 é:

a) 50
b) 55
c) 60
d) 60
e) 100

40) Na figura abaixo, têm-se r//s e t//u. A soma das medidas dos ângulos a e b é igual a:

a) 100°
b) 80°
c) 70°
d) 50°
e) 30°

41) **(PUC)** Calcule o ângulo reentrante formado pelos ponteiros de um relógio às 4h 20min.

42) Determine a medida do ângulo saliente formado pelos ponteiros de um relógio às 3h 46min.

43) Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 17,35h.

44) Quando, pela primeira vez, após 14h, os ponteiros de um relógio ficarão alinhados?

45) Quando, entre 4h e 5h, os ponteiros de um relógio ficam perpendiculares?

Gabarito

1) 420' e 25200"
2) 84840"
3) 174492" e 48,47°
4) c
5) a) 150° 14'22"
   b) 100°
   c) 51° 38' 37"
   d) 41° 37'8"
   e) 42° 31' 13"
   f) 211° 13' 10"
   g) 22° 26' 58"
   h) 15° 59' 13 $\frac{5}{7}$"
6) 112°
7) 4°
8) 140°, 72°, 56° e 92°
9) 48° e 132°
10) 80°, 220° e 60°
11) d
12) 61°
13) 45°
14) 14°
15) 38°
16) 116°
17) 54° e 36°

24) 235° 32' 18"
25) 30° 23' 12"
26) 155° 16' 37"
27) 40°, 50° e 130°
28) 35°
29) 39°
30) 42°
31) 36°
32) a = 60° e b = 150°
33) 450°
34) 4 de 68° e 4 de 112°
35) 4 de 72° e 4 de 108°
36) 4 de 84° e 4 de 96°
37) 4 de 80° e 4 de 100°
38) a) 100°
    b) 150°
    c) 65°
    d) 150°
    e) 100°
39) e
40) a
41) 350°
42) 163°
43) 34° 30'

18) 70° e 110°
19) 213° e 147°
20) 284° 30' 55"
21) 110°
22) 280°
23) 160°

44) 14h43min

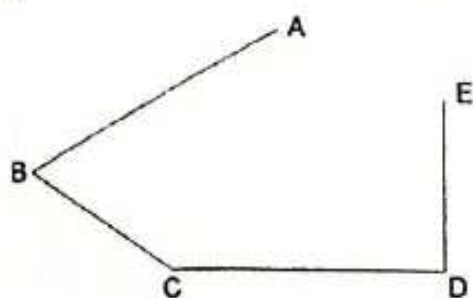
45) 4h5min27 $\frac{3}{11}$ seg e

4h 38min 10 $\frac{9}{11}$ seg

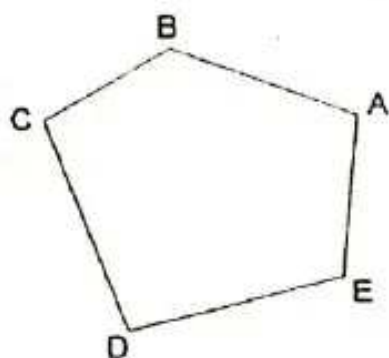
Capítulo II

POLÍGONOS

Linha Poligonal

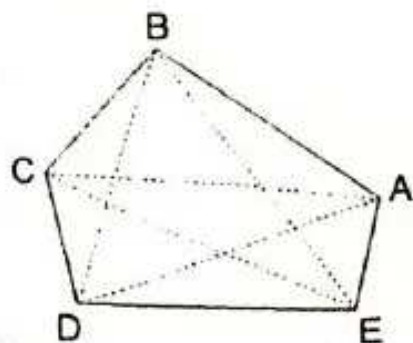
Linha poligonal é formada por segmentos consecutivos e não alinhados.

(Linha poligonal aberta)

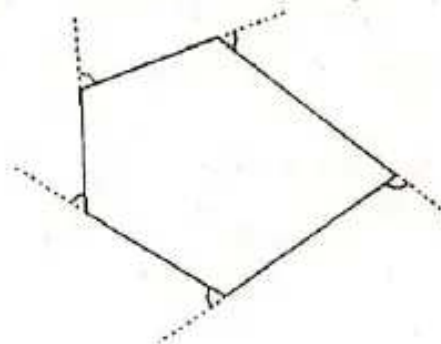
Polígono

Polígono é a figura plana limitada por uma linha poligonal fechada.

Elementos de Um Polígono

Vértices – A, B, C, D e E

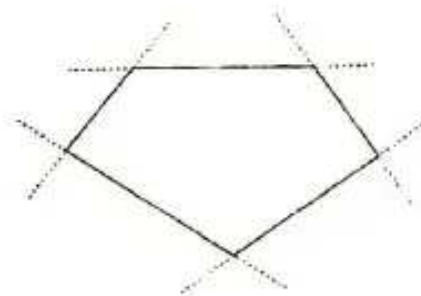
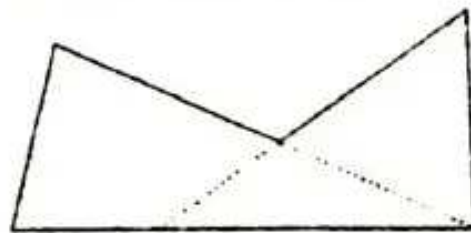
Lados – $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AE}$

Diagonal – é todo segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. ($\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$)

Ângulo interno – é todo ângulo formado por dois lados consecutivos e voltado para o interior do polígono.

Ângulo externo – é todo ângulo formado por um lado e o prolongamento de outro consecutivo.

Gênero – é o número de lados do polígono.

Perímetro de um polígono – é dado pela soma das medidas dos lados. O perímetro é representado por 2p e o semiperímetro por p.

Classificação dos Polígonos

Polígono convexo – o polígono é convexo, quando o prolongamento de qualquer um de seus lados não corta o polígono.

Polígono côncavo – quando o prolongamento de pelo menos um de seus lados corta o polígono.

Polígono equilátero – é todo polígono que apresenta os lados iguais.

Polígono equiângulo – é todo polígono que apresenta os ângulos iguais.

Polígono regular – é todo polígono equilátero e equiângulo.

Nomenclatura

É feita de acordo com o gênero do polígono:

3 lados	–	triângulo
4 lados	–	quadrilátero
5 lados	–	pentágono
6 lados	–	hexágono
7 lados	–	heptágono
8 lados	–	octógono
9 lados	–	eneágono
10 lados	–	décagono

11 lados	–	undecágono
12 lados	–	dodecágono
15 lados	–	pentadecágono
20 lados	–	icoságono

Formulário

Considerando um polígono convexo de gênero n, temos que:

Soma dos ângulos externos de um polígono convexo:
$S_e = 360°$.

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo:
$S_i = 180°(n-2)$

Ângulo externo: $A_e = \dfrac{360°}{n}$

Ângulo interno: $A_i = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

Número de diagonais: $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Número de diagonais que partem de cada vértice:
$d = n - 3$

Exercícios

1) Considere um octógono regular cujo lado mede 2 cm. Determine:
   a) o seu gênero
   b) o seu perímetro
   c) a soma de seus ângulos internos
   d) a soma dos seus ângulos externos
   e) o número de diagonais que partem de cada vértice
   f) o número total de diagonais
   g) o número de diagonais que passam pelo seu centro
   h) a medida de cada um de seus ângulos internos
   i) a medida de cada um de seus ângulos externos

2) Um dodecágono regular de lado 6 cm é isoperímetro de um octógono regular. Determine a medida do lado do octógono.

3) Determine a medida do ângulo interno Â de um pentágono ABCDE, sabendo que os ângulos internos nos vértices B, D e E são respectivamente iguais a 130°, 100° e 60°, e que a diagonal EC é bissetriz interna dos ângulos nos vértices E e C.

4) Os ângulos internos de um pentágono convexo são expressos, em graus, por $2x + 12°$, $2x - 16°$, $3x - 38°$, $x + 26°$ e $4x - 44°$. Determine a medida do maior ângulo externo desse polígono.

5) Em um polígono regular, as medidas dos ângulos interno e externo, em graus, são respectivamente expressas por $3x + 72°$ e $84° - 2x$. Quantas diagonais possui esse polígono?

6) Determine o número de diagonais de um polígono regular cuja medida do ângulo externo é 40°.

7) Quanto vale a soma dos ângulos internos de um polígono convexo que possui 14 diagonais?

8) Em qual dos polígonos convexos abaixo, a soma dos ângulos internos mais a soma dos ângulos externos é de 1 080°?

9) **(PUC)** Um polígono regular de n lados tem 90 diagonais. O valor de n é:
   a) 10
   b) 12
   c) 15
   d) 20
   e) 21

10) **(PUC)** O ângulo interno de um polígono regular de 170 diagonais é igual a:
   a) 80°
   b) 170°
   c) 162°
   d) 135°
   e) 81°

11) De cada vértice de um polígono regular podem ser traçadas exatamente 9 diagonais distintas. Qual a medida de cada ângulo interno desse polígono?

12) Pelo centro de um polígono regular passam, exatamente, 10 diagonais distintas. Qual o total de diagonais desse polígono?

13) A soma de todos os ângulos internos de um polígono convexo, cujo lado mede 4 cm, vale 1 620°. Determine o perímetro desse polígono.

14) **(ITA)** A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 2 160°. Então, o número de diagonais, deste polígono, que não passam pelo centro da circunferência que o circunscreve, é:
   a) 50
   b) 60
   c) 70
   f) 80
   e) 90

15) Em um polígono convexo, o número de diagonais é igual ao número de lados. Determine a soma de todos os seus ângulos internos adicionados a todos os seus ângulos externos.

16) Dois polígonos convexos têm gêneros consecutivos e a soma de todos os ângulos internos de um deles adicionada à soma de todos os ângulos internos do outro totaliza 2 340°. Quanto vale a diferença entre os números totais de diagonais desses dois polígonos?

17) A medida do ângulo interno de um polígono regular é o quádruplo da medida do ângulo externo. Quantas diagonais passam pelo centro desse polígono?

18) Qual o polígono convexo cujo número de diagonais excede o gênero de 18 unidades?

19) Qual o polígono convexo cuja soma do número de lados com o número de diagonais dá 45?

20) Dois polígonos convexos, de gêneros consecutivos, têm juntos um total de 34 diagonais. Quais são esses polígonos?

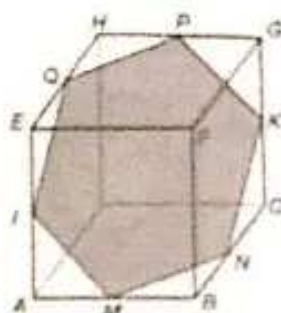
21) Qual o polígono cujo gênero é o quíntuplo do número de diagonais?

a) Pentágono
b) Hexágono
c) Heptágono
d) Octógono
e) Eneágono

22) Os polígonos convexos de gêneros n_1, n_2 e n_3 apresentam seus respectivos números totais de diagonais formando uma progressão aritmética. O menor valor possível da soma $n_1 + n_2 + n_3$ é igual a

a) 16.
b) 19.
c) 21.
d) 23.
e) 29.

23) Encontre três polígonos convexos de gêneros consecutivos que apresentem um total de 61 diagonais.

24) **(ENEM)** Um artista utilizou uma caixa cúbica transparente para a confecção de sua obra, que consistiu em construir um polígono IMNKPQ, no formato de um hexágono regular, disposto no interior da caixa. Os vértices desse polígono estão situados em pontos médios de arestas da caixa. Um esboço da sua obra pode ser visto na figura.

Considerando as diagonais do hexágono, distintas de IK quantas têm o mesmo comprimento de IK?

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 9

25) Um polígono regular admite para medida de suas diagonais apenas os números $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{27}$, tais que $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{27}$. Logo, este polígono

a) tem 30 lados.
b) pode ter 54 lados.
c) pode ter 57 lados.
d) pode ter 58 lados.
e) tem um número de lados maior do que 60.

26) A soma dos n – 2 ângulos internos de um polígono regular de gênero n é igual a 980°. Quantas diagonais não passam pelo centro desse polígono?

27) **(ITA)** Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma dos n – 1 ângulos do polígono é 2 004°, determine o valor de n.

28) **(FUVEST)** Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130° cada um e os demais ângulos internos medem 128° cada um. Quantos lados tem esse polígono?

29) **(ITA)** Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3 780°. O número total de diagonais nestes três polígonos é igual a:

a) 63

30) **(PUC)** $A_1A_2\ldots A_n$ é um polígono convexo de n lados, inscrito em um círculo. Determine o valor de n sabendo que o vértice $A_{[illegible]}$ é diametralmente oposto ao vértice $A_{[illegible]}$.

31) Quanto vale o menor ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos internos de vértices consecutivos de um eneágono regular?

32) As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo igual a 20°. Qual o gênero desse polígono?

33) No polígono regular ABCDE..., as bissetrizes dos ângulos internos nos vértices B e D formam um ângulo igual a 72°. Quantas diagonais não passam pelo centro desse polígono?

34) No icoságono regular ABCDE..., determine a medida do ângulo formado pela bissetriz interna do ângulo Â com a mediatriz do lado AB.

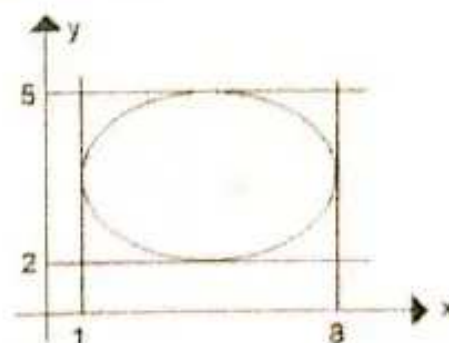
35) Em um polígono regular ABCDE..., o ângulo CÂE mede 30°. Determine o número de diagonais que não passam pelo centro desse polígono.

36) Em um polígono regular ABCD..., traçam-se todas as diagonais possíveis do vértice A. O ângulo formado pela primeira com a última diagonal é igual ao ângulo externo desse polígono. Qual o gênero desse polígono?

37) **(ENEM)** Um fabricante planeja colocar no mercado duas linhas de cerâmicas para revestimento de pisos. Diversas formas possíveis para as cerâmicas foram apresentadas e decidiu-se que o conjunto P de formas possíveis seria composto apenas por figuras poligonais regulares.

Duas formas geométricas que fazem parte de P são

a) triângulo e pentágono.
b) triângulo e hexágono.
c) triângulo e octógono.
d) hexágono e heptágono.
e) hexágono e octógono.

38) **(UERJ)** Ao observar, em seu computador, um desenho como o apresentado abaixo, um estudante pensou tratar-se de uma curva.

Porém, após aumentar muito a figura, verificou que a tal "curva" era, de fato um polígono com o menor perímetro possível, formado por uma quantidade finita de lados, todos paralelos ao eixo x ou ao eixo y. Verificou ainda que esse polígono possuía um lado em cada uma das seguintes retas: x = 1, x = 8, y = 2 e y = 5.

Se foi utilizada a mesma unidade de comprimento em ambos os eixos, a medida do perímetro desse polígono é:

a) 10
b) 13

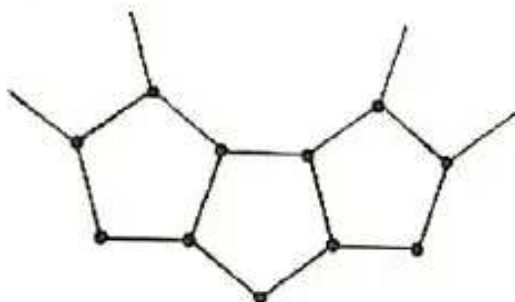
b) 69
c) 90
d) 97
e) 106

c) 18
d) 20

39) **(ENEM)**

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de

a) 45°.
b) 60°.
c) 90°.
d) 120°.
e) 180°.

40) Arqueólogos encontraram um colar de ouro feito de placas no formato de pentágonos regulares. Cada uma dessas placas está conectada a outras duas placas, como ilustra a figura.

Quantas placas formam o colar?

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

41) **(ENEM)** Na construção civil, é muito-comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

Figura 1:
Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

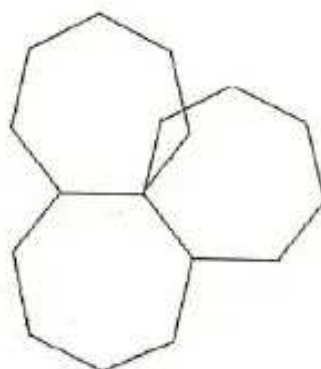
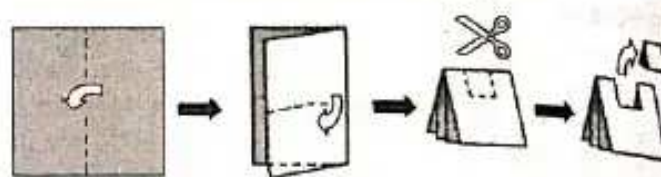
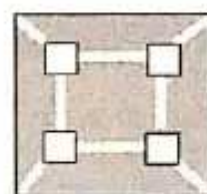
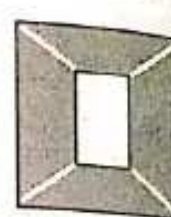
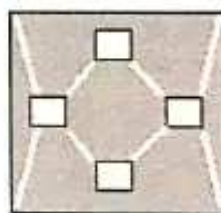
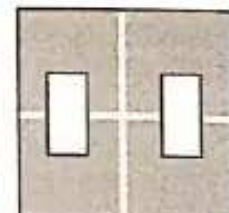
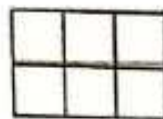
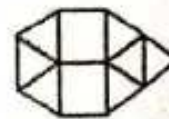



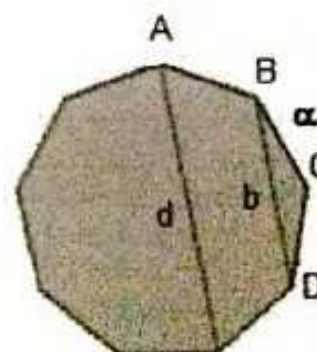
Figura 2:
Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um:

a) triângulo
b) quadrado
c) pentágono
d) hexágono
e) eneágono

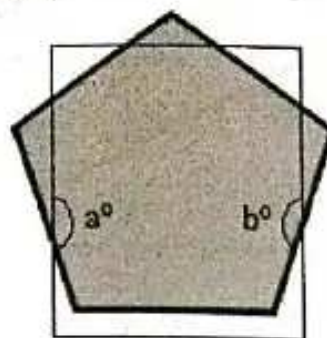
42) **(OBM)** Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura.

Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?

43) **(OBM)** Um polígono convexo é elegante quando pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. Abaixo, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.

Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?

44) **(OBM)** A figura ilustra um polígono regular de 9 lados. A medida do lado do polígono é α, a medida da menor diagonal é b e a medida da maior diagonal é d.

	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	140°

E

a) Determine a medida do ângulo BÂE.
b) Calcule d em função de a e b.

45) **(OBM)** A figura abaixo é composta por um quadrado e um pentágono regular.

a° b°

Determine a soma a° + b°.

Gabarito

1) a) 8
   b) 16 cm
   c) 1080°
   d) 360°
   e) 5
   f) 20
   g) 4
   h) 135°
   i) 45°
2) 9 cm
3) 150°
4) 104°
5) 35
6) 27
7) 900°
8) b
9) c
10) c
11) 150°
12) 170
13) 44 cm
14) c
15) 1260°
16) 7
17) 5
18) Eneágono
19) Decágono
20) Heptágono e Octógono
21) Polígono de treze lados
22) d
23) Heptágono, Octógono e Eneágono
24) b
25) c
26) 27
27) 14
28) 7
29) d
30) 62
31) 40°
32) 18
33) 30
34) 9°
35) 48
36) 6
37) b
38) d
39) d
40) c
41) b
42) e
43) 60°, 90°, 120° e 150°
44) a) 60°
    b) d = a + b
45) 324°

Anotações

Capítulo III

TRIÂNGULOS

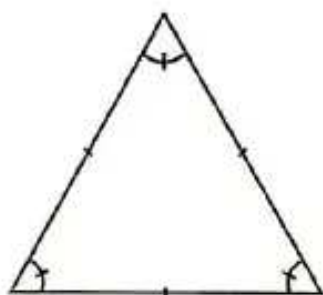
Definição

Triângulo é o polígono que possui três lados.

Classificação

I. Quanto aos lados

a) Equilátero

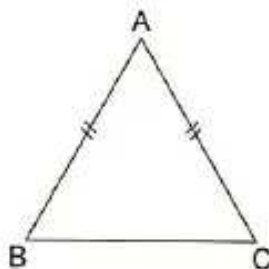
Apresenta os três lados e os três ângulos respectivamente congruentes.

b) Isósceles

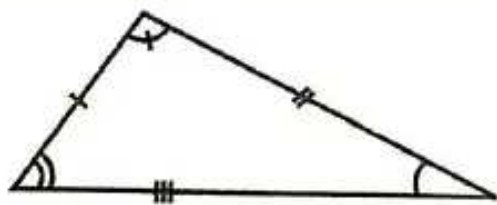
Apresenta dois lados e dois ângulos respectivamente congruentes. Todo triângulo equilátero é isósceles.

Em um triângulo isósceles o lado diferente (quando existe) é chamado de base, o vértice a ele oposto é o vértice principal e os ângulos adjacentes à base, chamados de ângulos de base, são congruentes. Na figura:

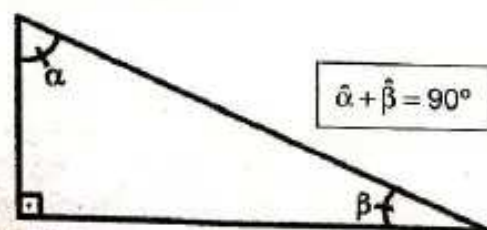
Base: $\overline{BC}$.

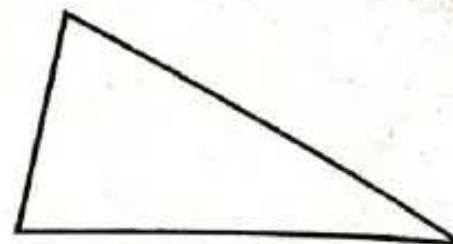
Vértice principal: A

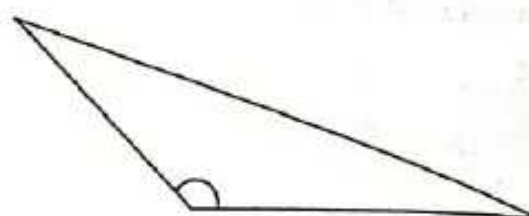
Ângulos da base: $\hat{B}$, $\hat{C}$

c) Escaleno

Apresenta os três lados e ângulos diferentes.

II. Quanto aos ângulos

a) Retângulo

Apresenta um ângulo reto. Os outros dois ângulos são agudos e complementares.

b) Acutângulo

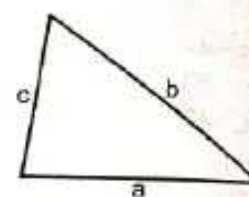
Apresenta os três ângulos agudos.

c) Obtusângulo

Apresenta um ângulo obtuso. Os outros dois ângulos são agudos.

Condições de Existência de Um Triângulo

"A medida de cada lado de um triângulo deve ser menor que a soma e maior que o módulo da diferença dos outros dois."

$|b-c| < a < b+c$

$|a-c| < b < a+c$

$|a-b| < c < a+b$

Exemplos:

1) Verifique quais triângulos, com lados dados abaixo, existem.

a) 7, 8 e 13;
b) 5, 12 e 6;
c) 6, 6, e 6;
d) 6, 9 e 15.

Resolução:

Como conhecemos os valores dos três supostos lados, basta, ao invés de aplicarmos as duas condições, verificar se o maior "lado" é estritamente menor do que a soma dos outros dois. Em caso afirmativo o triângulo existe, em caso contrário não existe.

a) Maior valor = 13
$13 < 7 + 8$
O triângulo de lados 7, 8 e 13 existe.

b) Maior valor = 12
$12 > 5 + 6$
O triângulo de lados 5, 12 e 6 não existe.

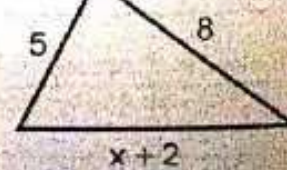
c) Maior valor = 6
$6 < 6 + 6$
O triângulo de lados 6, 6 e 6 existe e é equilátero.

d) Maior valor = 15
$15 = 6 + 9$
O triângulo de lados 6, 9 e 15 não existe.

2) Determine os valores inteiros de x para que o triângulo da figura abaixo exista.

NOTA: O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa e os outros dois, catetos.

5 8

x + 2

Resolução:

Como neste caso não podemos precisar qual é o maior lado, já que não sabemos o valor de x, devemos aplicar as duas condições de existência.

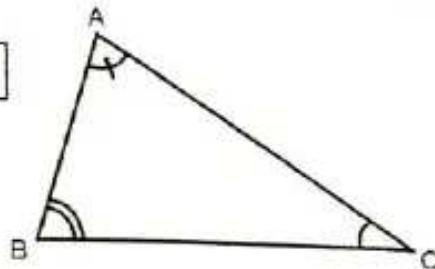
$$\begin{cases} x+2 < 8+5 \\ x+2 > 8-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 11 \\ x > 1 \end{cases}$$

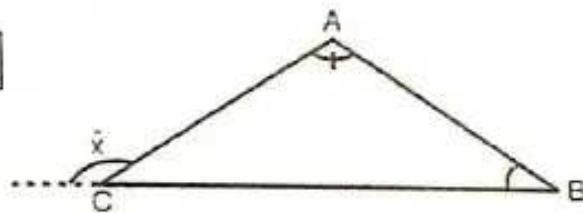
Logo $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Teorema Angular de Thales

"Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a 180°."

$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ}$$

Consequência do Teorema Angular de Thales

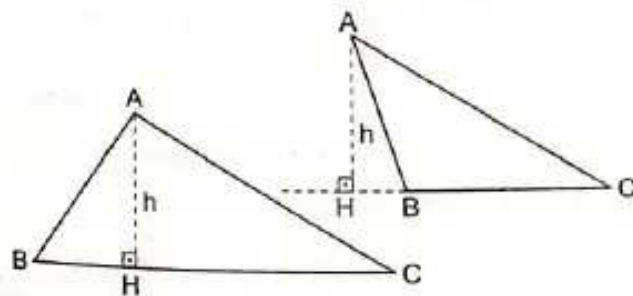
"Cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes."

$$\boxed{\hat{x}=\hat{A}+\hat{B}}$$

Ceviana de Um Triângulo

Chama-se ceviana de um triângulo qualquer reta que contém um vértice e intersecta o lado oposto ou o seu prolongamento.

Principais Cevianas

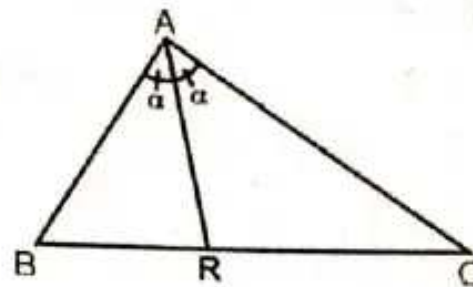
Altura de um triângulo

É a ceviana perpendicular a um lado ou a seu prolongamento.

$\overline{AH}$ é altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

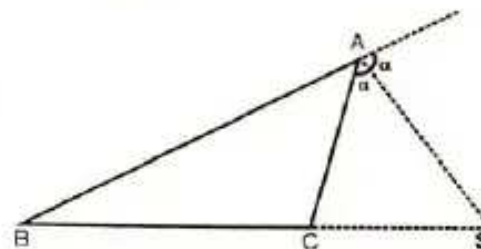
Mediana

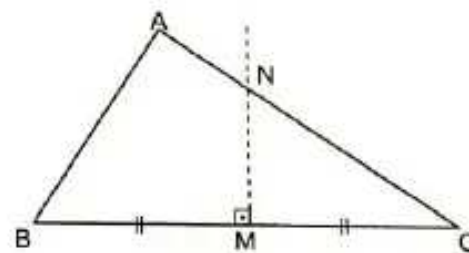
É a ceviana que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto.

Bissetriz interna

É a ceviana que divide o ângulo interno em dois ângulos adjacentes congruentes.

$\overline{AR}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$.

Bissetriz externa

É a ceviana que divide o ângulo externo em dois ângulos adjacentes congruentes.

$\overline{AS}$ é bissetriz externa do ângulo $\hat{A}$.

NOTA: Mediatriz é toda reta perpendicular ao lado que contém o seu ponto médio, não necessariamente passando pelo vértice, daí não ser considerada ceviana.

$\overline{MN}$ é mediatriz do lado $\overline{BC}$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

a) As três alturas de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto chamado de *ORTOCENTRO*, as três medianas no *BARICENTRO*, as três bissetrizes internas no *INCENTRO*, as três bissetrizes externas encontram-se, duas a duas, nos *EX-INCENTROS*, e as mediatrizes encontram-se no CIRCUNCENTRO.

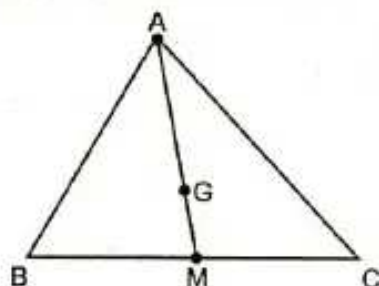
b) O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, enquanto que o circuncentro é o centro da circunferência nele circunscrita. Daí, o incentro é o ponto equidistante dos lados do triângulo, e o circuncentro equidista de seus vértices.

c) Em um triângulo acutângulo, o ortocentro está em seu interior, já no obtusângulo ele está em seu exterior, enquanto que no triângulo retângulo, ele coincide com o vértice do ângulo reto.

d) O triângulo cujos vértices são os pés das alturas de um triângulo, é chamado de triângulo órtico. O triângulo retângulo é o único que não possui triângulo órtico.

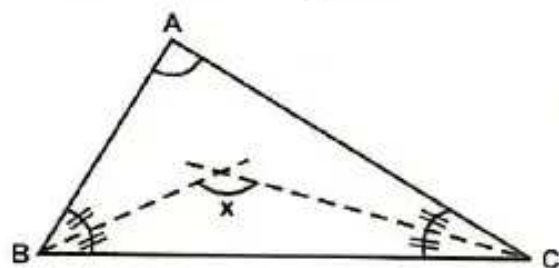
$\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{BC}$

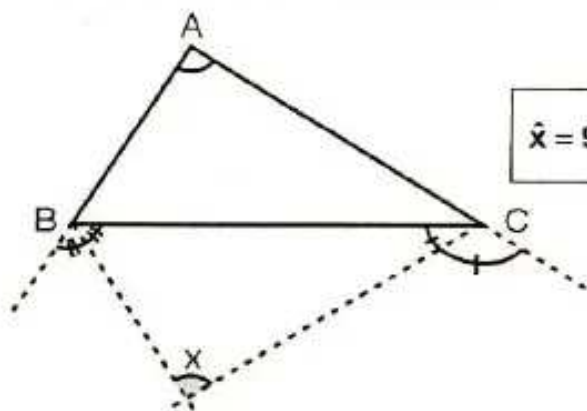
133

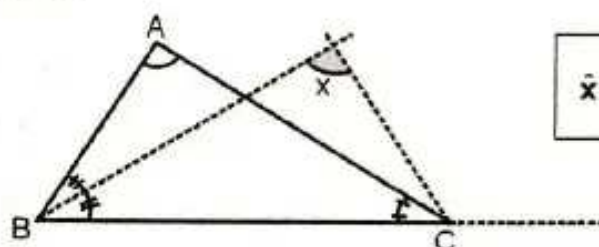
e) O baricentro divide cada medidana em dois segmentos aditivos que estão sempre na razão 2 : 1, ou seja, a distância do vértice ao baricentro vale sempre o dobro da distância do baricentro até o lado.

G é baricentro
$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$

f) Em um triângulo isósceles chamamos de altura principal àquela relativa à base, a qual é também mediana, mediatriz e bissetriz, simultaneamente.

g) Em um triângulo equilátero, o incentro, o baricento, o ortocentro e o circuncentro são coincidentes.

h) Em todo triângulo, o ângulo formado pelas bissetrizes internas de dois de seus ângulos vale sempre 90° mais a metade do terceiro ângulo interno.

$$\hat{x} = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$$

i) Em todo triângulo, o ângulo formado pelas bissetrizes de dois de seus ângulos externos, vale sempre 90° menos a metade do ângulo interno localizado no terceiro vértice.

$$\hat{x} = 90° - \frac{\hat{A}}{2}$$

j) Em todo triângulo, o ângulo formado por uma bissetriz interna e outra externa, traçadas de vértices diferentes, vale sempre a metade do ângulo interno localizado no terceiro vértice.

$$\hat{x} = \frac{\hat{A}}{2}$$

Exemplos:

Dados um triângulo MNP de ângulos $\hat{M} = 30°$, $\hat{N} = 70°$ e $\hat{P} = 80°$, determine:

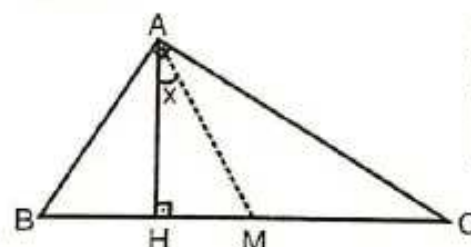
c) o ângulo $\hat{\gamma}$ formado pela bissetriz interna de $\hat{N}$ com a bissetriz externa de $\hat{P}$.

Resolução:

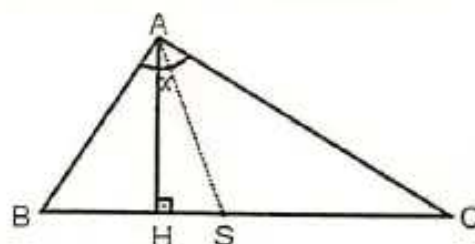
a) $\hat{\alpha} = 90° + \frac{\hat{P}}{2} = 90° + \frac{80°}{2} = 130°$.

b) $\hat{\beta} = 90° - \frac{\hat{N}}{2} = 90° - \frac{70°}{2} = 55°$.

c) $\hat{\gamma} = \frac{\hat{M}}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$.

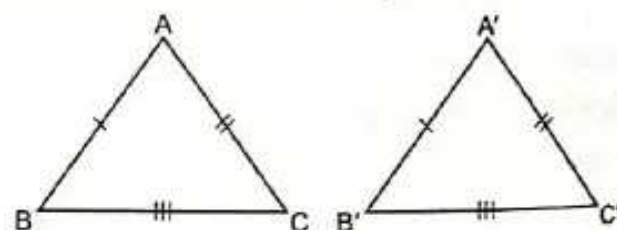
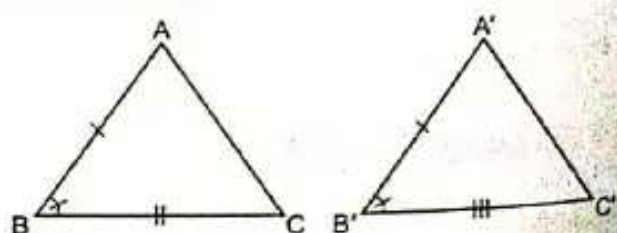
l) Em todo triângulo retângulo, o ângulo formado pela altura e pela mediana, relativas à hipotenusa, vale sempre a diferença entre as medidas dos ângulos agudos do triângulo.

$\overline{AH} \rightarrow$ altura
$\overline{AM} \rightarrow$ mediana

$$\hat{x} = |\hat{B} - \hat{C}|$$

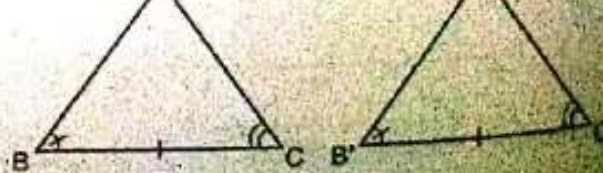
m) Em todo triângulo, o ângulo formado pela altura e pela bissetriz interna, traçadas de um mesmo vértice, vale sempre a semi-diferença entre os ângulos internos localizados nos outros vértices.

$\overline{AH} \rightarrow$ altura
$\overline{AS} \rightarrow$ bissetriz

$$\hat{x} = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$$

Congruência de Triângulos

1° caso (LLL) - São congruentes dois triângulos que têm os três lados respectivamente congruentes.

2° caso (LAL) - São congruentes dois triângulos que têm um ângulo congruente compreendido entre dois lados respectivamente congruentes.

3° caso (ALA) - São congruentes dois triângulos que têm um lado congruente compreendido entre dois ângulos respectivamente congruentes.

a) o ângulo α formado pelas bissetrizes internas de $\hat{M}$ e $\hat{N}$;

b) o ângulo $\hat{\beta}$ formado pelas bissetrizes externas de $\hat{M}$ e $\hat{P}$;

Exercícios

1) Verifique se os ângulos apresentados em cada uma das opções abaixo servem como medidas dos ângulos internos de um mesmo triângulo. Em caso afirmativo, classifique o triângulo quanto aos ângulos e quanto aos lados.

a) 40°, 60° e 80°
b) 50°, 50° e 50°
c) 30°, 47° e 103°
c) 100°, 40° e 40°
e) 40°, 50° e 90°
f) 60°, 60° e 60°
g) 40°, 70° e 70°

2) Verifique se os valores apresentados em cada uma das opções abaixo servem, em centímetros, como lados de um mesmo triângulo. Em caso afirmativo, classifique-o quanto aos lados;

a) 5, 6 e 7
b) 4, 6 e 10
c) 7, 7 e 7
d) 3, 3 e 8
e) 5, 12 e 13

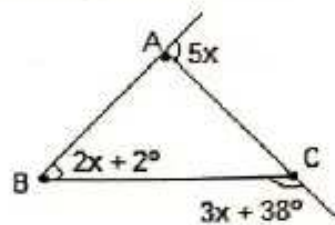
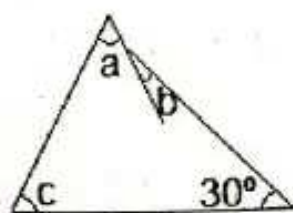
3) As medidas dos lados de um triângulo são expressas, em centímetros, por $2x - 1$, $x + 4$ e $3x - 7$. Classifique, quanto aos lados, esse triângulo, sabendo que seu perímetro é igual a 26 cm.

4) As medidas dos lados de um triângulo isósceles são 18 e 8. Determine o seu perímetro.

5) Em um triângulo isósceles de perímetro 20 cm, a base equivale a 2/3 da soma dos outros dois lados. Determine a medida o maior lado desse triângulo.

6) Determine as medidas dos lados de um triângulo, de perímetro 26 cm, sabendo que elas são inversamente proporcionais a 2, 3 e 4.

7) As medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo são 6, 11 e $x + 4$. Quantos valores inteiros x pode assumir?

8) Determine a medida do maior ângulo externo do triângulo ABC mostrado na figura abaixo.

9) Determine a soma dos ângulos a, b e c, assinalados na figura abaixo.

10) Determine a soma dos ângulos assinalados nas figuras abaixo.

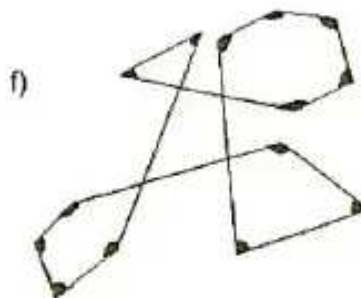
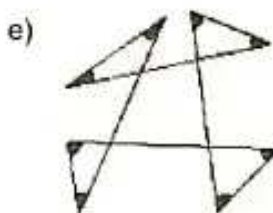
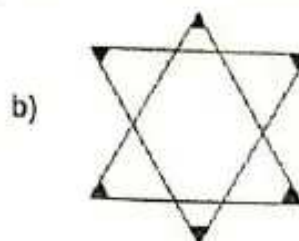
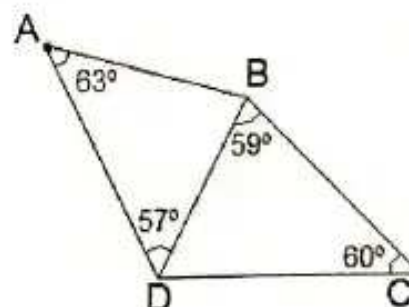
a)

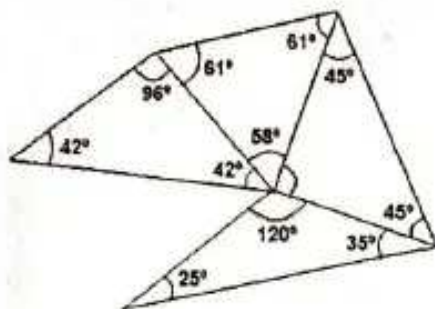
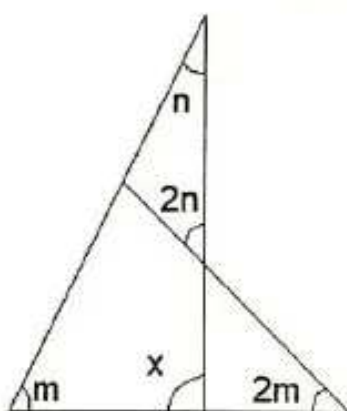
b)

c)

d)

e)

f)

11) Dentre os segmentos desenhados na figura a seguir, qual é o maior?

a) AB
b) AD
c) BD
d) BC
e) CD

12) Determine a medida do ângulo oposto ao menor lado entre todos os triângulos da figura abaixo.

13) Determine a medida do ângulo x na figura:

14) Em um triângulo ABC, a soma das medidas dos ângulos externos nos vértices B e C vale 230° e a soma dos ângulos externos nos vértices A e C vale 210°. Determine o ângulo formado pelas bissetrizes internas dos ângulos nos vértices A e B.

15) Considere um triângulo ABC em que o ângulo interno Â equivale a 7/11 da soma dos outros dois ângulos internos. Determine a medida do ângulo formado pela bissetriz interna no vértice C com a bissetriz externa no vértice B.

16) Em um triângulo ABC, o ângulo interno no vértice B é expresso, em graus, por $3x - 7°$, enquanto que o ângulo formado pelas bissetrizes externas traçadas dos vértices A e C é expresso, em graus, por $2x + 20°$. Determine o valor de x.

17) Seja α ângulo formado pelas bissetrizes externas nos vértices A e B, de um triângulo ABC, e β o ângulo formado pelas bissetrizes internas traçadas nesses mesmos vértices. Se α e β são expressos em graus, respectivamente, por $3x - 3°$ e $4x + 8°$, determine o valor de x.

18) Em um triângulo, os ângulos internos são proporcionais a 4, 9 e 5. Determine a medida do ângulo formado pela altura com a mediana traçadas do vértice com o maior ângulo interno.

19) Em um triângulo ABC, o ângulo interno Â mede 50°. Sabendo que o ângulo formado pela altura com a bissetriz interna, traçadas de A, mede 5°, determine as medidas dos ângulos internos nos vértices B e C.

20) Três casas são construídas numa área plana de um condomínio nos pontos A, B e C, de uma planta imobiliária. A previsão é de que seja instalado um posto policial para aumentar a segurança dos condôminos. Por questões de logística, esse posto deve estar situado em

a) medianas.
b) mediatrizes.
c) alturas.
d) bissetrizes internas.
e) bissetrizes externas.

21) **(CEFET)** Imagine que se tenham três casas de um condomínio e que seus donos desejem colocar segurança particular numa quarta pequena casa a ser construída de forma que ela deva ficar numa posição equidistante das ruas que interligam as casa duas a duas. A posição que deve ser escolhida corresponde a que ponto notável do triângulo formado por essas ruas?

a) Baricentro
b) Ex-incentro
c) Incentro
d) Ortocentro
e) Circuncentro

22) **(ENEM)** Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.

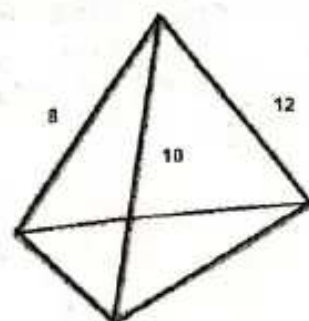
A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A. Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C.
b) 4 e C.
c) 4 e D.
d) 4 e E.
e) 5 e C.

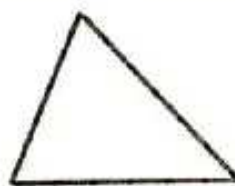
23) Ligando-se o incentro de um triângulo aos seus três vértices, ficam formados, em torno dele, dois ângulos de medidas 120° e 130°. Determine as medidas dos ângulos internos desse triângulo.

24) **(UERJ)** Dispondo de canudos de refrigerantes, Tiago deseja construir pirâmides. Para as arestas laterais, usará sempre canudos com 8 cm, 10 cm e 12 cm de comprimento. A base de cada pirâmide será formada por três canudos que têm a mesma medida, expressa por um número inteiro, diferente das anteriores. Veja o

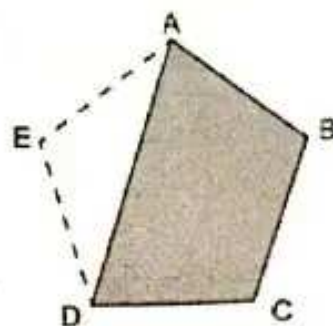
um ponto P, à mesma distância das três casas. Assim, para encontrarmos a localização exata de P, nessa planta, devemos, no triângulo ABC, traçar

modelo a seguir:

A quantidade de pirâmides de bases diferentes que Tiago poderá construir, é:

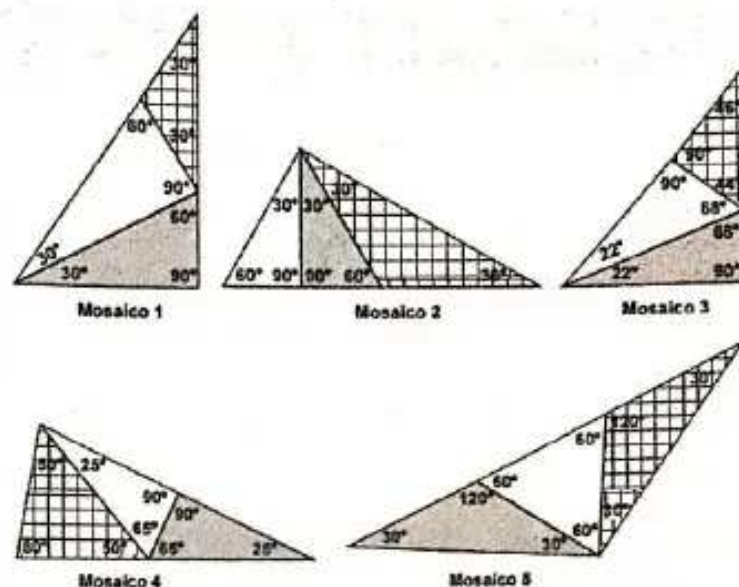
a) 10
b) 9
c) 8
d) 7

25) **(ENEM)** Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

a) 3.
b) 5.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

26) **(ENEM)** Um gesseiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.

Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos $x = E\hat{A}D$, $y = E\hat{D}A$ e $z = A\hat{E}D$ do triângulo ADE.

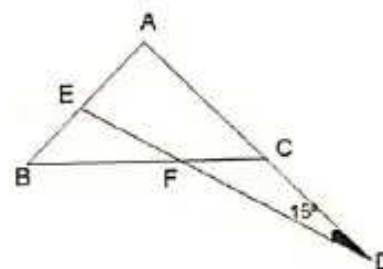
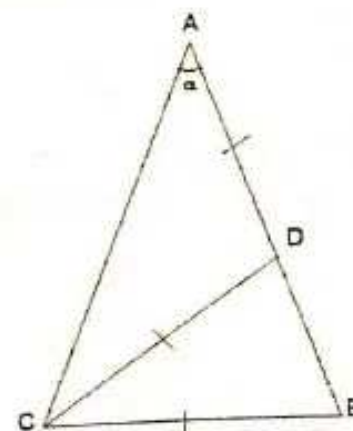
As medidas x, y e z em graus, desses ângulos são, respectivamente,

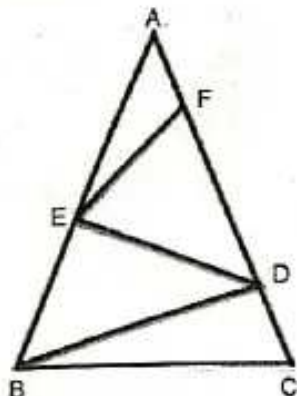
a) 18, 18 e 108.
b) 24, 48 e 108.
c) 36, 36 e 108.
d) 54, 54 e 72.
e) 60, 60 e 60.

Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

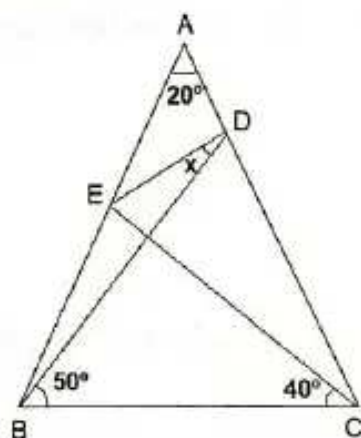
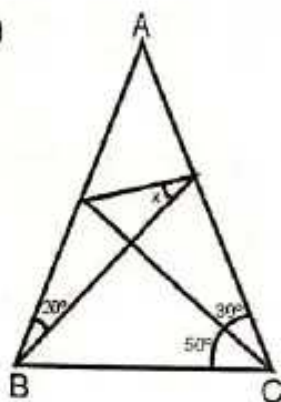
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

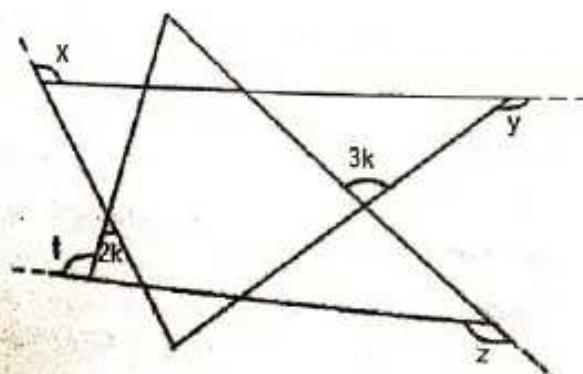
28) Determine o perímetro do hexágono equiângulo ABCDEF, sabendo que os lados AB, BC, CD e EF medem, respectivamente, 5, 8, 4 e 6.

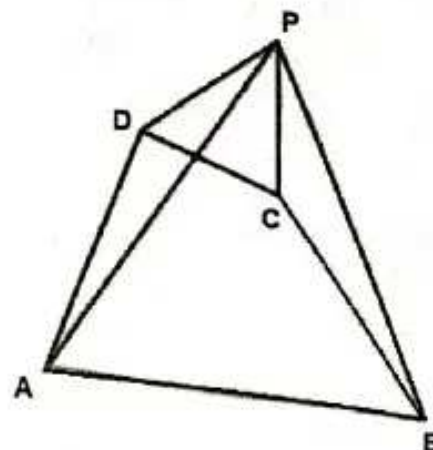
29) Sobre uma reta t são marcados os pontos A e B. Pelos pontos A e B são traçadas, para um mesmo lado de t, respectivamente, as semirretas paralelas r e s, oblíquas a t. Considere um ponto E pertinente à reta t, localizado entre A e B, do qual são traçados os segmentos EC, C em r, e ED, D em s. Determine a medida do ângulo $C\hat{E}D$, sabendo que AC = AE e BE = BD.

30) Na figura, tem-se $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{CD} = \overline{CF}$. Determine o valor de do ângulo $A\hat{E}F$.

31) Na figura, tem-se $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{CD} = \overline{CB} = \overline{AD}$. Determine a medida do ângulo α.

27) **(ENEM)** Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

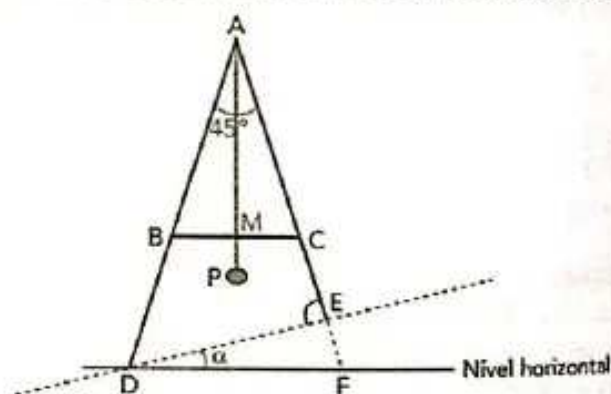
32) Determine a medida do ângulo $\hat{A}$, que é o ângulo principal do triângulo ABC, sabendo que $\overline{AF} = \overline{EF} = \overline{DE} = \overline{BD} = \overline{BC}$.

33) Nas figuras abaixo, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Determine o valor de x em cada um dos itens.

a)

b)

34) Quantos são os pontos de um plano α que estão equidistantes das três retas suportes dos lados de um triângulo ABC, contido em α?

35) Na figura abaixo, sabe-se que $k > 36°$. Qual é o menor valor natural da soma $x + y + z + t$, sabendo que tal soma deixa resto 4, quando dividida por 5, e resto 11, quando dividida por 12?

a) 479
b) 539
c) 599
d) 659

36) Na figura, ABCD é um quadrilátero em que $\overline{AD} = \overline{BC}$, $D\hat{A}B = 80°$ e $C\hat{B}A = 40°$. Um ponto P é tal que o triângulo DPC é equilátero. Determine o perímetro do triângulo APB, sabendo que $\overline{AB} = 6$ cm e $\overline{CD} = 3$ cm.

37) **(UERJ)** Uma ferramenta utilizada na construção de uma rampa é composta pela seguinte estrutura:

- duas varas de madeira, correspondentes aos segmentos AE e AD, que possuem comprimentos diferentes e formam o ângulo $D\hat{A}E$ igual a 45°;
- uma travessa, correspondente ao segmento BC, que une as duas varas e possui uma marca em seu ponto médio M;
- um fio fixado no vértice A e amarrado a uma pedra P na outra extremidade;
- nesse conjunto, os segmentos AB e AC são congruentes.

Observe o esquema que representa essa estrutura:

Quando o fio passa pelo ponto M, a travessa BC fica na posição horizontal. Com isso, obtém-se, na reta que liga os pontos D e E, a inclinação a desejada.

Calcule a, supondo que o ângulo $A\hat{E}D$ mede 85°.

Gabarito

1) a) Sim: Acutângulo e Escaleno
b) Não
c) Sim: Obtusângulo e Escaleno
d) Sim: Obtusângulo e Isósceles
e) Sim: Retângulo e Escaleno
f) Sim: Acutângulo e Equilátero
g) Sim: Acutângulo e Isósceles

2) a) Sim: Escaleno

e) 719

b) Não
c) Sim: Equilátero
d) Não
e) Sim: Escaleno

3) Isósceles
4) 44
5) 8 cm
6) 12 cm, 8 cm e 6 cm
7) 11
8) 130°
9) 150°

10)
a) 120°
b) 360°
c) 180°
d) 360°
e) 360°
f) 1240°

11) d
12) 58°
13) 120°
14) 140°
15) 35°
16) 21°
17) 25°
18) 10°
19) 70° e 60°
20) b
21) c
22) c
23) 40°, 60° e 80°
24) a
25) a
26) c
27) b
28) 36
29) 90°
30) 135°
31) 36°
32) 20°

33)
a) 30°
b) 30°

34) 4
35) c
36) 18 cm
37) 17°30'

Anotações

Capítulo IV

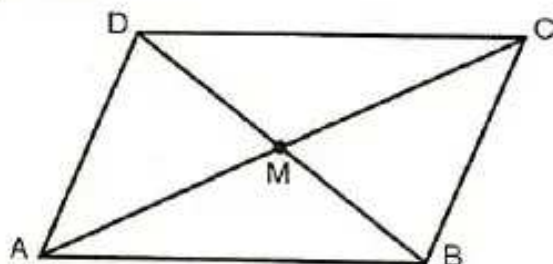
QUADRILÁTEROS

Definição

Quadrilátero é todo polígono que possui quatro lados.

Principais Quadriláteros

I) Paralelogramo

Paralelogramo é o quadrilátero que apresenta os lados opostos paralelos.

ABCD é paralelogramo pois $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$ E $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

Propriedades gerais

a) Os lados opostos são congruentes.
$\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

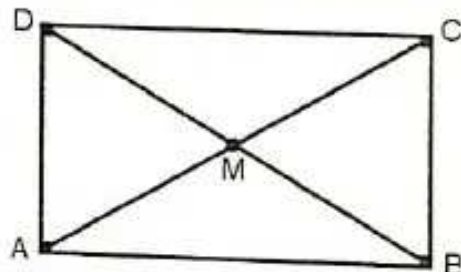
b) Os ângulos opostos são congruentes.
$\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$

c) Os ângulos consecutivos são suplementares.
$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{C} = \hat{C} + \hat{D} = \hat{D} + \hat{A} = 180°$

d) As diagonais cortam-se ao meio.
$\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{MD}$

Paralelogramos Importantes

1) Retângulo

É o paralelogramo que possui os ângulos congruentes.

Propriedades

a) As gerais.

b) As diagonais são congruentes. $\overline{AC} = \overline{BD}$

Consequência da propriedade (b)

Da figura, temos que: $\overline{AC} = \overline{BD}$ e $\overline{AM} = \dfrac{\overline{AC}}{2}$,

logo $\overline{AM} = \dfrac{\overline{BD}}{2}$.

2) Losango ou rombo

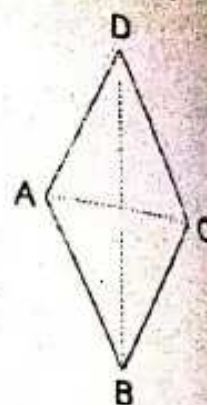
É o paralelogramo que possui os lados congruentes.

ABCD é losango pois
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

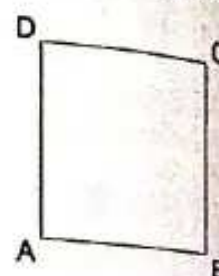
Propriedades

a) As gerais.

b) As diagonais são perpendiculares.
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

c) As diagonais são bissetrizes.

3) Quadrado

É o paralelogramo que possui os lados e ângulos respectivamente congruentes.

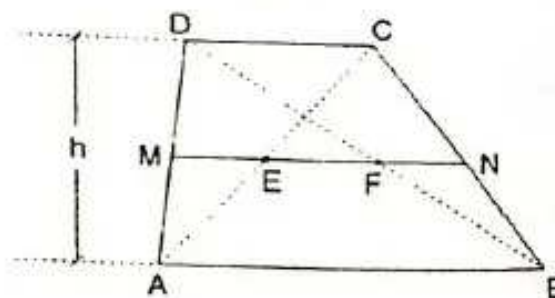
ABCD é quadrado pois
$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \equiv 90°$ e
$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$

Propriedades

Valem para o quadrado todas as propriedades de paralelogramo, retângulo e losango.

NOTA: O quadrado é simultaneamente retângulo e losango.

II) Trapézio

Trapézio é o quadrilátero convexo que possui apenas dois lados paralelos.

Elementos e propriedades

ABCD é trapézio pois $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

a) Os lados paralelos são chamados de bases: $\overline{AB}$ é a base maior e $\overline{DC}$ é a base menor.

b) $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são os lados oblíquos.

c) A distância entre as bases é a altura: h

d) $\hat{A} + \hat{D} = 180°$ e $\hat{B} + \hat{C} = 180°$

e) Base Média ($\overline{MN}$): segmento que une os pontos médios dos lados oblíquos. É paralelo às bases e tem por medida a semi-soma das bases.

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}$$

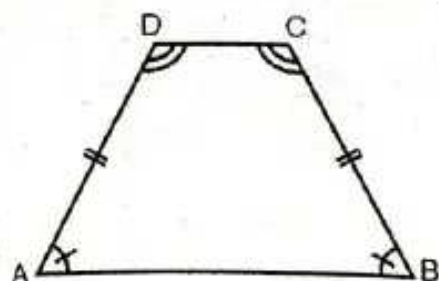
f) Mediana de Euler ($\overline{EF}$): segmento que une os pontos

Como o triângulo ABD é retângulo, $\overline{AM}$ é mediana relativa à hipotenusa. Daí podemos concluir que: **"em todo triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa vale sempre a metade da hipotenusa".**

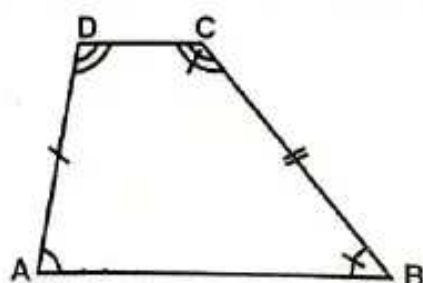
7) Mediana de Euler (EF): segmento que une os pontos médios das diagonais. É paralelo às bases e tem por medida a semi-diferença das bases.

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2}$$

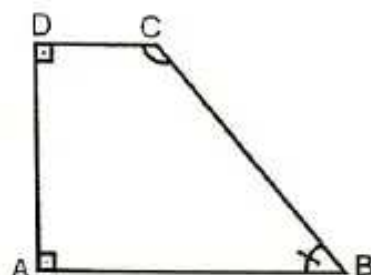
Classificação dos Trapézios

1) ***Isósceles:*** lados não paralelos são congruentes.

ABCD é trapézio isósceles pois $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

daí: $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{D} \equiv \hat{C}$

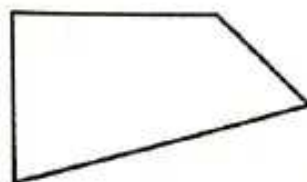
2) ***Escaleno:*** lados não paralelos não são congruentes.

ABCD é trapézio escaleno pois $\overline{AD} \neq \overline{BC}$, daí:

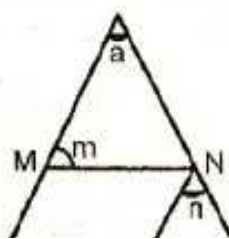
$\hat{A} \neq \hat{B}$ e $\hat{D} \neq \hat{C}$

3) ***Retângulo:*** um dos lados oblíquos é perpendicular às bases.

ABCD é trapézio retângulo pois

$\overline{AD} \perp \overline{AB} \perp$ e $\overline{AD} \perp \overline{DC}$

III) Trapezóide

Trapezóide é o quadrilátero convexo que não possui lados paralelos.

Base Média de Um Triângulo

Chamamos de base média de um triângulo ao segmento que une os pontos médios de dois lados desse triângulo, sendo paralela ao terceiro lado e valendo a metade dele.

Demonstração:

Partindo da hipótese que M é ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{MN} // \overline{BC}$, tracemos $\overline{NP} // \overline{AB}$.

Pelo paralelismo temos que: $\hat{a} = \hat{n}$ e $\hat{m} = \hat{p}$. Como MNPB é um paralelogramo, $\overline{NP} = \overline{MB} = \overline{AM}$, daí que os triângulos AMN e NPC são congruentes, logo: MN = PC e MN = PB e finalmente $\overline{BC} = \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{MN} = 2\overline{MN}$.

Exercícios

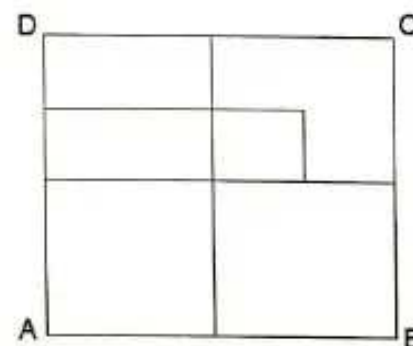
1) Classifique em verdadeira ou falsa as afirmativas a seguir.

a) Todo losango é um paralelogramo.
b) Todo retângulo é um paralelogramo.
c) Todo quadrado é um retângulo.
d) Todo quadrilátero é um trapézio.
e) Todo quadrado é um losango.
f) Todo trapézio é um paralelogramo.
g) Todo paralelogramo é um quadrilátero.

2) **(UERJ)** "Se um polígono tem todos os lados iguais, então todos os seus ângulos internos são iguais."

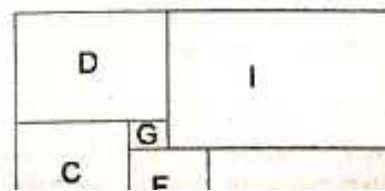
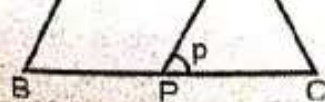
Para mostrar que essa proposição é falsa, pode-se usar como exemplo a figura denominada:

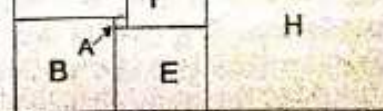
a) Losango
b) Trapézio
c) Retângulo
d) Quadrado

3) Observe o quadrilátero ABCD indicado na figura abaixo.

O número máximo de quadriláteros que podem ser visualizados na figura é:

a) 6
b) 12
c) 16
d) 8
e) 14

4) **(OBM)** O retângulo abaixo está dividido em nove quadrados A, B, C, D, E, F, G, H e I. O quadrado A tem lado 1 e o quadrado B tem lado 9. Qual é o lado do quadrado I?

B P C

$\overline{MN}$ é base média do triângulo ABC.

H
B A E

5) **(ENEM)** O proprietário de um restaurante deseja comprar um tampo de vidro retangular para a base de uma mesa, como ilustra a figura.

Sabe-se que a base da mesa, considerando a borda externa, tem a forma de um retângulo, cujos lados medem AC 105 cm e AB 120 cm.

Na loja onde será feita a compra do tampo, existem cinco tipos de opções de tampos, de diferentes dimensões, e todos com a mesma espessura, sendo:

Tipo 1: 110 cm x 125 cm

Tipo 2: 115 cm x 125 cm

Tipo 3: 115 cm x 130 cm

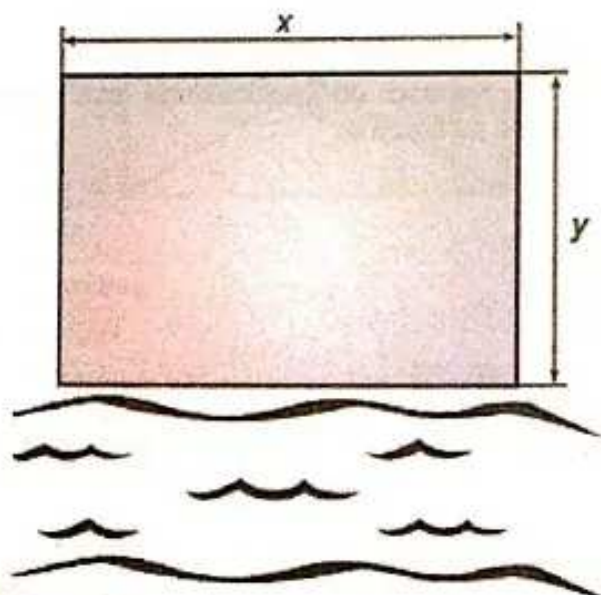
Tipo 4: 120 cm x 130 cm

Tipo 5: 120 cm x 135 cm

O proprietário avalia, para comodidade dos usuários, que se deve escolher o tampo de menor área possível que satisfaça a condição: ao colocar o tampo sobre a base, de cada lado da borda externa da base da mesa, deve sobrar uma região, correspondendo a uma moldura em vidro, limitada por um mínimo de 4 cm e máximo de 8 cm fora da base da mesa, de cada lado.

Segundo as condições anteriores, qual é o tipo de tampo de vidro que o proprietário avaliou que deve ser escolhido?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

6) **(ENEM)** Um terreno retangular de lados cujas medidas, em metro, são x e y será cercado para a construção de um parque de diversões. Um dos lados do terreno encontra-se às margens de um rio. Observe a figura.

Para cercar todo o terreno, o proprietário gastará R$ 7 500,00. O material da cerca custa R$ 4,00 por metro para

Nessas condições, as dimensões do terreno e o custo total do material podem ser relacionados pela equação

a) $4(2x + y) = 7\,500$
b) $4(x + 2y) = 7\,500$
c) $2(x + y) = 7\,500$
d) $2(4x + y) = 7\,500$
e) $2(2x + y) = 7\,500$

7) **(PUC)** Os ângulos internos de um quadrilátero medem, em graus, $3x - 45$, $2x + 10$, $2x + 15$ e $x + 20$. A medida do menor ângulo mede

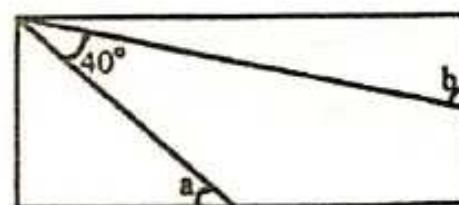
a) 45°.
b) 65°.
c) 80°.
d) 90°.
e) 105°.

8) Dois ângulos opostos de um paralelogramo são expressos, em graus, por $4x + 30°$ e $2x + 100°$. Determine a medida do menor ângulo desse paralelogramo.

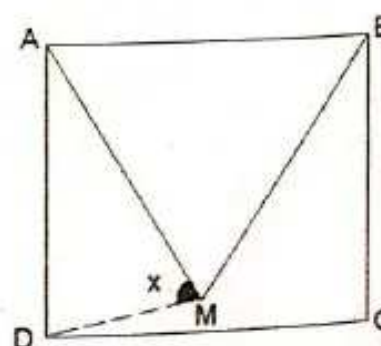
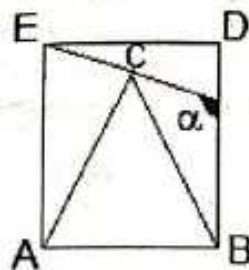
9) Determine os ângulos de um rombóide, sabendo que eles são proporcionais a 3, 5, 2 e 8.

10) **(ENEM)** Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos consecutivos estão a razão 1:3. O menor ângulo desse paralelogramo mede

a) 45°.
b) 50°.
c) 55°.
d) 60°.
e) 65°.

11) **(FUVEST)** No retângulo abaixo, o valor, em graus, de a + b é:

a) 50.
b) 90.
c) 120.
d) 130.
e) 220.

12) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e AMB é um triângulo equilátero. Determine a medida do ângulo x.

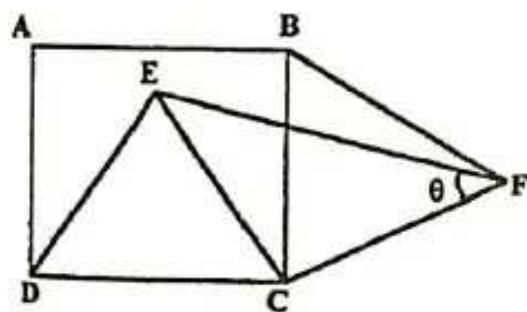
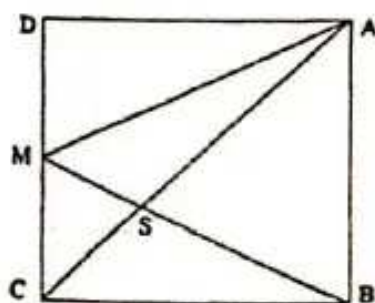
os lados do terreno paralelos ao rio, e R$ 2,00 por metro para os demais lados.

13) Na figura, ABC é um triângulo equilátero e ABDE é um quadrado. Qual a medida do ângulo α?

14) Os ângulos adjacentes à base maior de um trapézio medem 45° e 72°. Determine os outros ângulos de trapézio.

15) Dois lados opostos de um losango são expressos, em metros, por $5x - 12$ e $2x + 6$. Determine o perímetro desse quadrilátero.

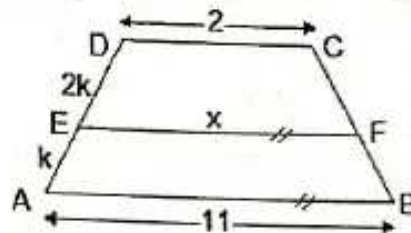
16) Em um losango, um dos ângulos é o dobro do outro. Determine a medida de sua menor diagonal, sabendo que seu perímetro é 36 cm.

17) Considere um ponto P, interior a um triângulo equilátero ABC de perímetro 24 cm. De P são traçados os segmentos x, y e z, respectivamente paralelos a AC, AB e BC, com extremos nos lados AB, BC e AC, nesta ordem. Determine a soma das medidas de x, y e z.

18) (**PUC**) Em um quadrilátero ABCD, os segmentos AB e CD são paralelos e o ângulo interno no vértice D vale o dobro do ângulo interno no vértice B. Calcule a medida do segmento AB, sabendo que AD = 6 cm e CD = 4 cm.

19) (**PUC**) Na figura, ABCD é um quadrado, DEC e BCF são triângulos equiláteros. Determine a medida do ângulo θ.

20) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo, M é o ponto médio de CD e o triângulo ABM é equilátero. Determine a medida do segmento MS, sabendo que AB mede 21 m.

21) Determine as medidas da base média e da mediana de Euler de um trapézio de bases 8 e 20.

22) Determine as bases de um trapézio em que a base média e a mediana de Euler medem, respectivamente, 68,3562 e 31,6438.

24) Na figura abaixo, ABCD é um trapézio e o segmento EF é paralelo às bases. Determine o valor de x.

25) Em um trapézio ABCD, a base menor CD mede 6 cm. Considere o ponto M que divide o lado oblíquo AC em dois segmentos aditivos, na razão 2:3, e o ponto N, pertinente ao lado BD, de modo que o segmento MN seja paralelo às bases do trapézio. Sabendo que MN mede 14 cm, determine a medida da base maior desse trapézio.

26) Um trapézio ABCD, de base menor CD e base maior AB, é tal que AD = DC = CB e BD = BA. Determine a medida do ângulo Â desse trapézio.

27) (**UNICAMP**) Um trapézio retângulo é um quadrilátero convexo plano que possui dois ângulos retos, um ângulo agudo α e um ângulo obtuso β. Suponha que, em tal trapézio, a medida de β seja igual a cinco vezes a medida de α.

a) Calcule a medida de α, em graus.
b) Calcule a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de α e β.

28) Em um trapézio isósceles, um dos ângulos equivale a 2/7 da soma das medidas dos outros ângulos. Determine os ângulos desse trapézio.

29) Determine o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo de perímetro 30 cm.

30) As diagonais de um quadrilátero convexo ABCD medem 12,7 cm e 17,3 cm. Determine o perímetro do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos médios dos lados de ABCD.

31) Pelos vértices de um triângulo, de perímetro 16 cm, são traçadas retas paralelas aos lados opostos que se intersectam, duas a duas, em três pontos. Determine o perímetro do triângulo com vértices nesses pontos.

32) Em um trapézio isósceles, uma das diagonais divide o menor ângulo ao meio. Determine o perímetro desse quadrilátero, sabendo que suas bases medem 6 cm e 12 cm.

33) Determine o perímetro de um trapézio isósceles ABCD, em que a base média MN, com N ∈ BC, mede 8 cm e o segmento MB é bissetriz do ângulo agudo desse trapézio.

34) Um paralelogramo ABCD tem perímetro igual 48 cm. As bissetrizes internas dos ângulos nos vértices A e B encontram-se no ponto P e as bissetrizes internas nos vértices B e C encontram-se no ponto Q. Sendo M e N, respectivamente, os pontos médios dos lados AB e BC, determine a soma das medidas dos segmentos MP e NQ.

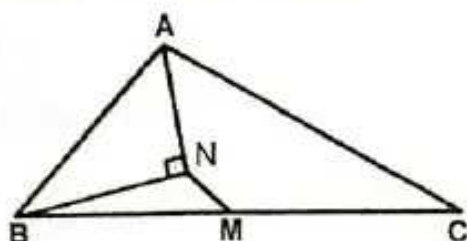
35) Em um trapézio MNPQ, o lado oblíquo MQ é perpendicular

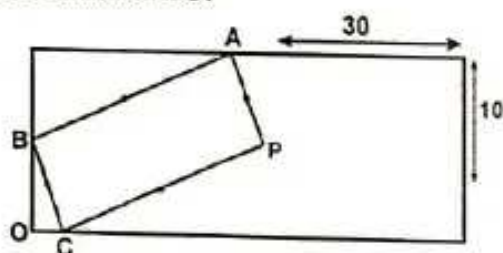
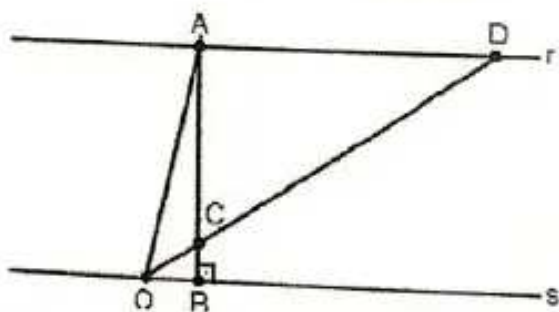
[...]) Um trapézio possui bases que medem 8 cm e 30 cm. Calcule a medida do menor segmento que as diagonais determinam sobre a base média.

a base maior MN. Sabendo que o lado NP, cujo ponto médio é A, tem medida igual ao dobro da medida da base menor PQ e que o ângulo interno no vértice N mede 32°, determine a medida do ângulo MÂQ.

36) Considere um trapézio ABCD, de bases AD e BC que medem, respectivamente, 40 cm e 90 cm. Se a medida do ângulo interno no vértice D é o dobro da medida do ângulo oposto, determine a medida do lado CD.

37) **(OBM)** O trapézio ABCD tem bases AB e CD. O lado DA mede x e o lado BC mede 2x. A soma dos ângulos internos nos vértices A e B vale 120°. Determine a medida do ângulo DÂB.

38) Na figura, M é o ponto médio do lado BC, NA é bissetriz do ângulo BÂC e BN é perpendicular a AN. Se AB = 14 e AC = 20, a medida do segmento MN é:

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

39) Em uma mesa de bilhar, uma bola está situada no ponto P, a 30 cm do menor lado da mesa e a 10 cm do maior. Teixeirinha, em uma exibição, dá uma tacada em que a bola, após três tabelas, volta ao ponto P, percorrendo o caminho PABCP, conforme a figura abaixo. Em cada tabela, o ângulo de incidência é igual ao de reflexão. Calcule a distância BO.

40) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas e o segmento AB é perpendicular a elas. Sabendo que CD = 2.AO e BÔC=18°, calcule a medida do ângulo AÔB.

41) Do vértice A traçam-se as alturas do paralelogramo ABCD. Sabendo-se que essas alturas dividem o ângulo interno no vértice A em três partes iguais, quanto mede o maior ângulo interno desse paralelogramo?

a) 120°
b) 135°
c) 150°
d) 165°
e) 175°

Gabarito

1)
a) V
b) V
c) V
d) F
e) V
f) F
g) V

2) a
3) d
4) 18
5) c
6) a
7) b
8) 10°
9) 60°, 100°, 40° e 160°
10) a
11) d
12) 75°
13) 105°
14) 135° e 108°
15) 72 m
16) 9 cm
17) 8 cm
18) 10 cm
19) 45°
20) 7 m
21) 14 e 6
22) 100 e 36,7124
23) 4 cm
24) 8
25) 26 cm
26) 72°
27)
a) 30°
b) 90°

28) 2 de 80° e 2 de 100°
29) 15 cm
30) 30 cm
31) 32 cm
32) 30 cm
33) 48 cm
34) 12 cm
35) 32°
36) 50 cm
37) 90°
38) b
39) 10 cm
40) 54°
41) b

Anotações

Capítulo V

CÍRCULO

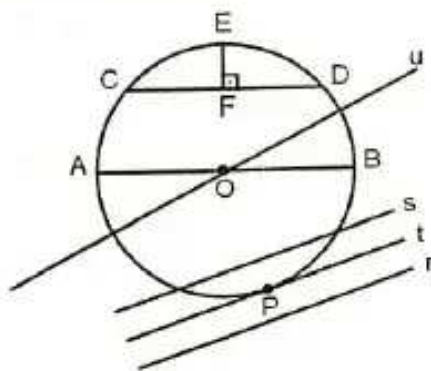
Circunferência

Definição: circunferência é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo chamado **centro**.

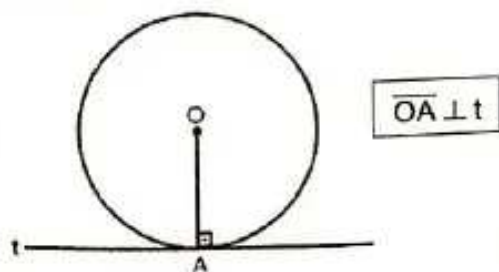
Círculo

Definição: círculo é o conjunto dos pontos do plano cuja distância até um ponto fixo (centro) é menor ou igual a um valor dado chamado de **raio**.

Elementos do círculo

- O → centro
- $\overline{OA}$ → raio
- $\overline{CD}$ → corda
- $\overline{AB}$ → diâmetro (corda máxima)
- $\widehat{CD}$ → arco
- $\overline{EF}$ → flecha
- r → reta exterior
- s → reta secante
- t → reta tangente
- u → reta secante diametral
- P → ponto de tangência

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

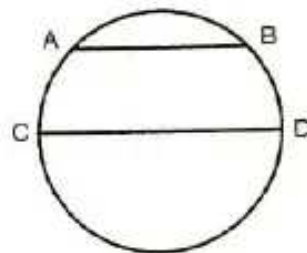
a) **"O raio que passa pelo ponto de tangência é perpendicular à tangente."**

$$\overline{OA} \perp t$$

b) **"Quando traçamos, por um ponto exterior, duas tangentes a uma mesma circunferência, os segmentos compreendidos entre o ponto exterior e os pontos de tangência são congruentes."**

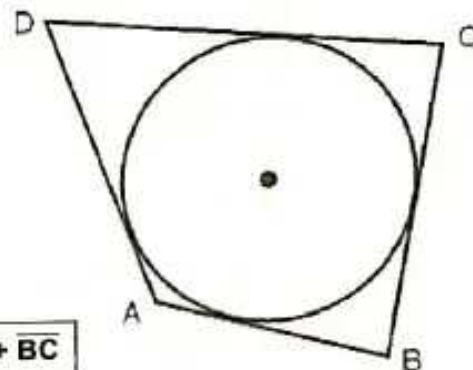
Demonstração

Os triângulos AOP e BOP são congruentes pois ambos são triângulos retângulos com a mesma hipotenusa $(\overline{OP})$ e dois catetos congruentes $(\overline{OA}$ e $\overline{OB})$. Daí temos que:

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

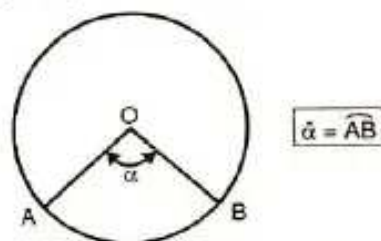
c) **"Cordas paralelas de um círculo determinam arcos congruentes."**

$$\overline{AB} // \overline{CD} \rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

d) **Teorema de Pitot**

"Em todo quadrilátero circunscritível, a soma de dois lados opostos é sempre igual à soma dos outros dois."

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

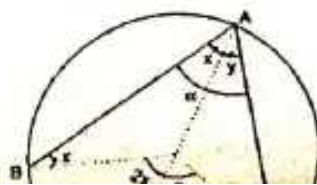
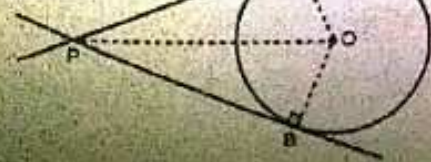
Ângulos no Círculo

Ângulo central

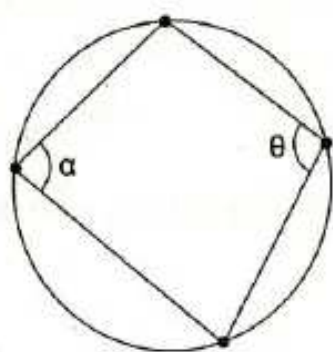
É o ângulo cujo vértice é o centro do círculo. A medida do ângulo central é igual à medida do arco compreendido entre os lados do ângulo, que são dois raios.

$$\hat{\alpha} = \widehat{AB}$$

$\hat{\alpha}$ - ângulo central

Ângulo Inscrito

É o ângulo cujo vértice encontra-se na circunferência e seus lados são duas cordas. A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco subentendido entre seus lados.

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

$\hat{\alpha} = \hat{x} + \hat{y}$ = ângulo inscrito

Corolários

1) **"Em todo quadrilátero inscritível dois ângulos opostos são suplementares."**

$$\hat{\alpha} + \hat{\theta} = 180^\circ$$

2) **"Todo triângulo inscrito em um círculo que apresente o diâmetro como um de seus lados é *retângulo* e tem o diâmetro como hipotenusa":**

Demostração

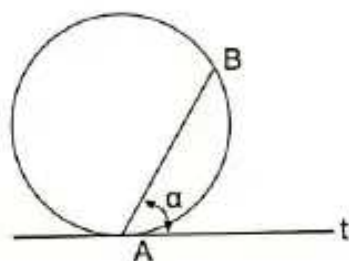
Se $\overline{BC}$ é diâmetro, então $\widehat{BC} = 180^\circ$.

Como o ângulo $B\hat{A}C$ é inscrito, temos que:

$$B\hat{A}C = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

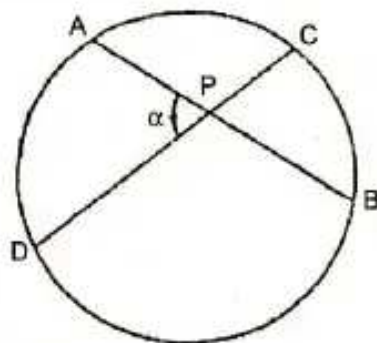
Daí que o triângulo ABC é retângulo.

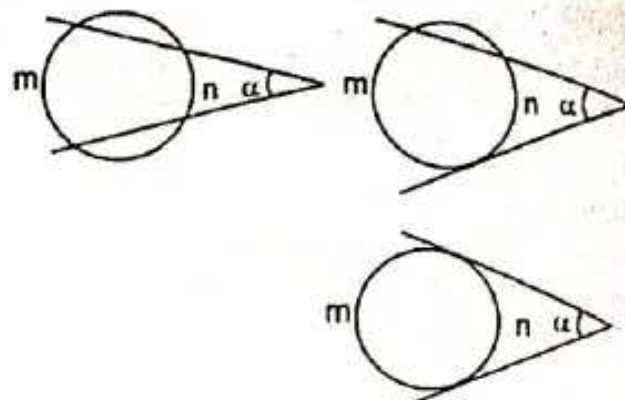
Ângulo de Segmento

É o ângulo cujo vértice está na circunferência e seus lados, são uma tangente e uma corda que parte do ponto de tangencia.

$\hat{\alpha}$ - ângulo de segmento

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Ângulo Excêntrico Interior

É o ângulo cujos lados são duas cordas que se intersectam no interior do círculo, mas não no centro.

Ângulo Excêntrico Exterior

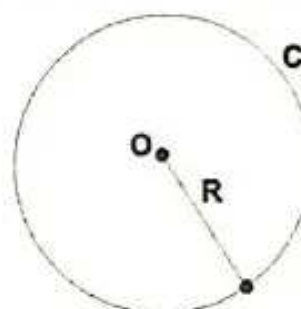
É o ângulo cujos lados são duas secantes, ou uma secante e uma tangente, ou duas tangentes que se intersectam em um ponto no exterior do círculo. No caso dos lados serem duas tangentes o ângulo excêntrico exterior é chamado de ângulo *circunscrito*.

$\hat{\alpha}$ - ângulo excêntrico exterior.

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{m} - \hat{n}}{2}$$

Obs.: No caso do ângulo circunscrito, este pode ser calculado através do suplemento do menor arco, ou seja:

$$\hat{\alpha} = 180^\circ - \hat{n}$$

Comprimento da Circunferência

A circunferência é uma linha cujo comprimento é dado por:

$$C = 2 . \pi . R$$

onde $\pi \cong 3{,}14$

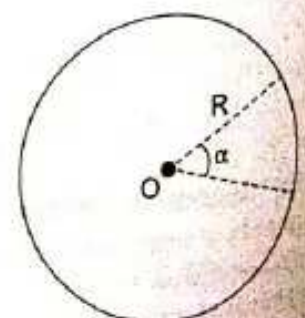
Comprimento de Um Arco

Seja o ℓ comprimento de um arco que, em um círculo de raio R, está associado a um ângulo central $\hat{\alpha}$. Podemos, observar que enquanto a circunferência é um arco que tem comprimento $2\pi R$ e subentende um ângulo de 360°, o arco de comprimento ℓ compreende um ângulo central $\hat{\alpha}$. Assim, podemos montar uma regra de três:

$2\pi R$ - 360°
ℓ - $\hat{\alpha}$

$$360^\circ . \ell = 2\pi R . \hat{\alpha}$$

$$\ell = \frac{2\pi R . \hat{\alpha}}{360^\circ}$$

$$\ell = \frac{\pi R \hat{\alpha}}{180^\circ}$$

Se o ângulo $\hat{\alpha}$ estiver em radianos, teremos que:

$\pi R\hat{\alpha}$ $\pi R\hat{\alpha}$

$\hat{\alpha}$ - ângulo excêntrico interior

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

$$\ell = \frac{\quad}{180°} = \frac{\quad}{\pi}$$

$$\ell = R \cdot \hat{\alpha}$$

Exemplo:

1) Determine o comprimento de uma circunferência de raio 5 cm.

Solução:

$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \cong 10 \cdot 3{,}14 \cong 31{,}4$ cm.

2) Determine o comprimento de um arco que, num círculo de raio 4 m, subentende um ângulo de 120°.

Solução:

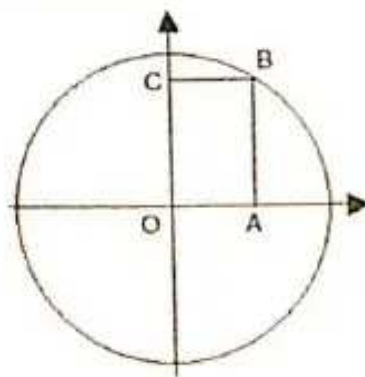
Dados: R = 4m; $\hat{\alpha} = 120°$; $\ell = ?$

$$\ell = \frac{\pi R\,\hat{\alpha}}{180°} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 120°}{180°} = \frac{8\pi}{3} \cong \frac{8 \cdot 3{,}14}{3} \cong 8{,}37 \text{ m}$$

Exercícios

1) Considere um hexágono regular ABCDEF, inscrito em um círculo de centro O, e uma reta t, tangente ao círculo no ponto A. Determine a medida do ângulo

a) $A\hat{O}B$.
b) $C\hat{O}E$.
c) $F\hat{A}B$.
d) $B\hat{E}D$.
e) formado pelas cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BF}$.
f) formado pelos prolongamentos os lados $\overline{AF}$ e $\overline{BC}$.
g) pela reta t com o lado $\overline{AB}$.

2) **(ENEM)** Na figura abaixo, o vértice A do retângulo OABC está a 6 cm do vértice C.

O raio do círculo mede

a) 5 cm.
b) 6 cm.
c) 8 cm.
d) 9 cm.
e) 10 cm.

3) Determine a medida do ângulo x em cada uma das figuras abaixo.

a)

b)

c)

d)

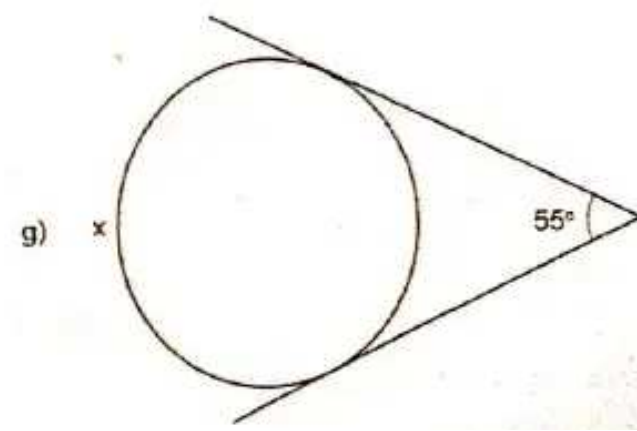
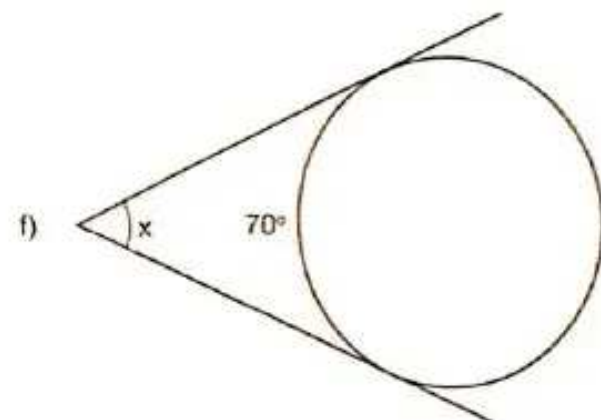
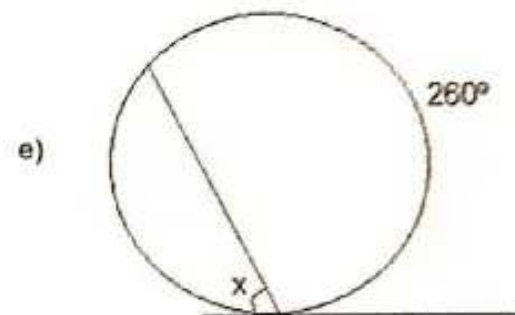
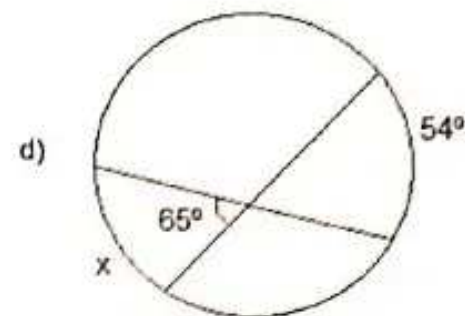
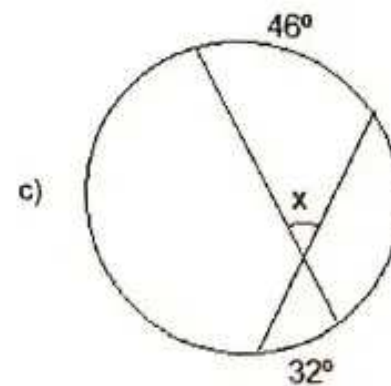
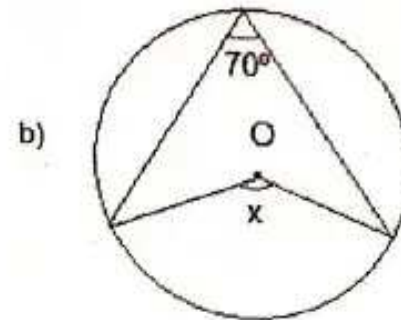
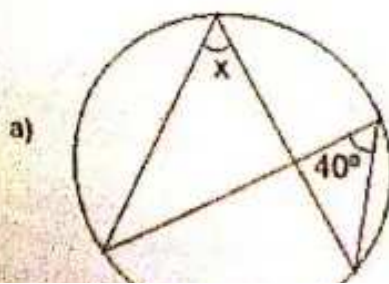
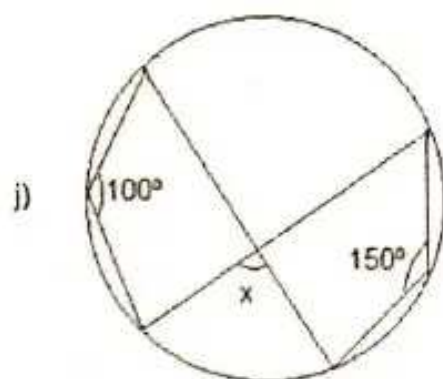
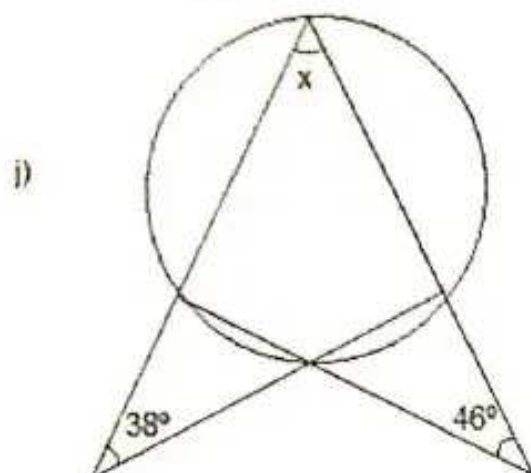
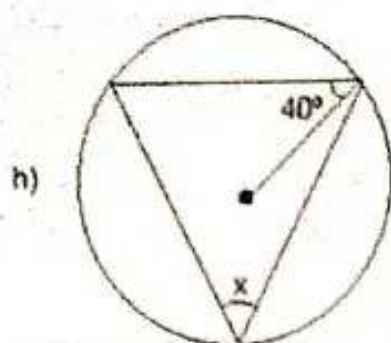
e)

f)

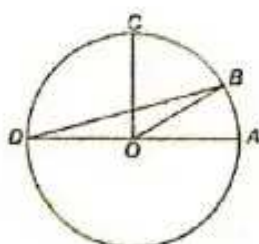
g)

h)

i)

j)

4) Um ângulo inscrito, cuja medida em graus é expressa por $2x + 10$, subentende, na circunferência, um arco de medida $5x + 4$, em graus. Determine o valor de x.

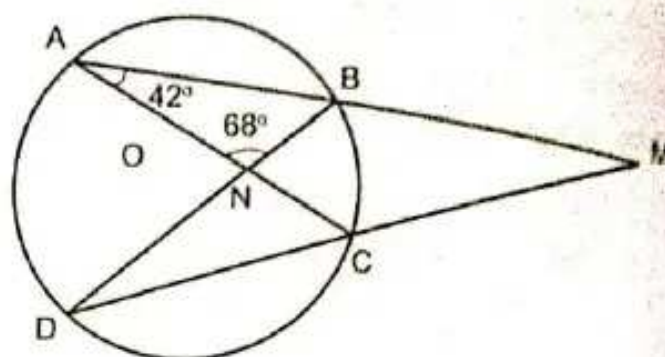
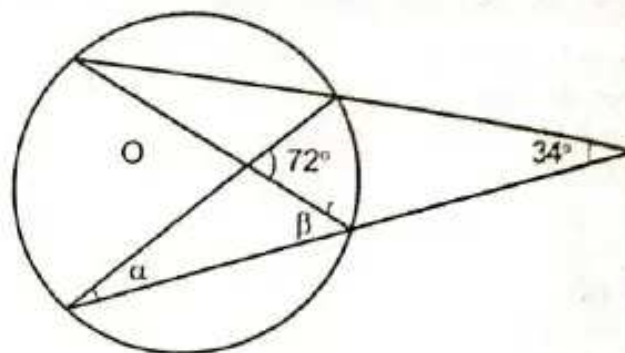
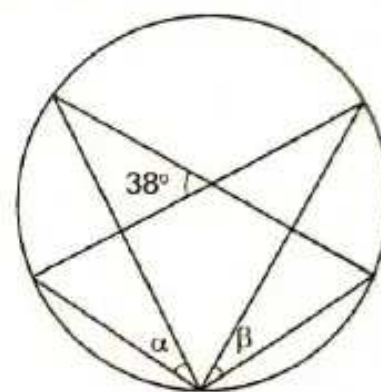
5) A partir do ponto A de uma circunferência são traçadas as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ que são, respectivamente, os lados do triângulo equilátero e do quadrado inscritos nesse círculo. Determine a medida do ângulo $C\hat{A}B$.

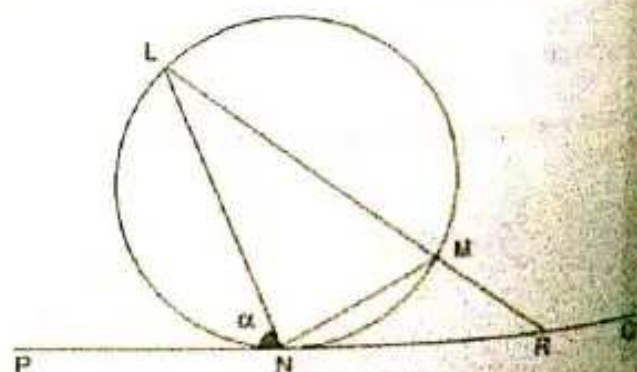
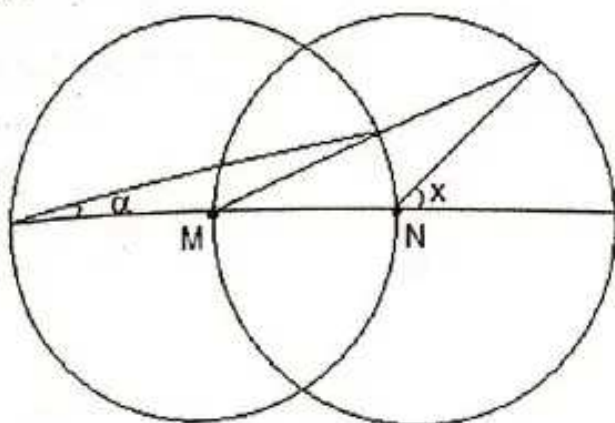
6) **(PUC)** No círculo de centro O, seja AD um diâmetro. Sejam B e C tais que $A\hat{O}B = 90°$ e $A\hat{O}B$ vale a metade de $B\hat{O}C$.

Assinale o valor do ângulo $O\hat{D}B$:

a) 12°
b) 15°
c) 18°
d) 22,5°
e) 30°

7) Duas cordas intersectam-se no interior de um círculo formando um ângulo de 48° que subentende na circunferência arcos proporcionais a 3 e 5. Determine as

8) A tangente t, a um círculo, toca sua circunferência no ponto A. A partir desse ponto é traçada a corda $\overline{AB}$ que a divide a circunferência em dois arcos tais que um deles equivale a 5/13 do outro. Determine a medida do maior ângulo que a tangente t forma com a corda $\overline{AB}$.

9) Na figura abaixo, determine as medidas dos ângulos $A\hat{N}D$ e $A\hat{M}C$.

10) Determine as medidas dos ângulos α e β na figura abaixo.

11) Determine a soma das medidas dos ângulos α e β assinalados na figura abaixo.

12) **(OBM)** Na figura, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ toca em N o círculo que passa por L, M e N. A reta $\overleftrightarrow{LM}$ corta a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ em R. Se $\overline{LM} = \overline{LN}$ e a medida do ângulo $P\hat{N}L$ é α, α > 60°, quanto mede, em função de α, o ângulo $L\hat{R}P$?

medidas, em graus, desses arcos.

13) Na figura abaixo são mostrados dois círculos de centros nos pontos M e N. Determine a medida do ângulo x em função do ângulo α.

14) Um trapézio está inscrito em um círculo de modo que o centro do círculo esteja em seu interior. Se as bases desse trapézio são o lado do hexágono regular e o lado do pentágono regular inscritos, determine as medidas de seus ângulos.

15) Um trapézio está inscrito em um semicírculo e suas bases subentendem arcos respectivamente iguais a 80° e 140°. Determine as medidas dos ângulos desse trapézio.

16) Um trapézio está inscrito em um círculo. Determine os ângulos desse quadrilátero, sabendo que suas bases são o lado do quadrado e o lado do triângulo equilátero inscritos.

17) Um triângulo ABC está circunscrito a um círculo em que os pontos de tangência são $M \in \overline{AC}$, $N \in \overline{BC}$ e $P \in \overline{AB}$. Sabendo que $\overline{AM} = 5$ cm, $\overline{CN} = 6$ cm e $\overline{BP} = 4$ cm, determine o perímetro desse triângulo.

18) Em um triângulo de lados $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm e $\overline{BC} = 12$ cm, inscreve-se um círculo cujos pontos de tangência são $M \in \overline{AC}$, $N \in \overline{BC}$ e $P \in \overline{AB}$. Determine a soma das medidas dos segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CM}$.

19) Considere um triângulo ABC de perímetro 34 cm que circunscreve um círculo. Os pontos de tangência são $R \in \overline{AC}$, $S \in \overline{BC}$ e $T \in \overline{AB}$. Por um ponto do menor arco $\widehat{RT}$, é traçada uma tangente à circunferência desse círculo que encontra os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, nos pontos M e N. Determine o perímetro do triângulo AMN, sabendo que a base $\overline{BC}$ mede 10 cm.

20) Por um ponto P, exterior a um círculo, são traçadas as tangentes $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ cujas medidas somam 42 cm. Por um ponto do menor dos arcos $\widehat{AB}$ é traçada uma tangente a essa circunferência que intersecta $\overline{PA}$ no ponto M e $\overline{PB}$ no ponto N. Determine o perímetro do triângulo PMN.

21) Determine o perímetro de um quadrilátero circunscritível ABCD, cujas medidas de seus lados são expressas, em centímetros, por $\overline{AB} = 2x + 1$, $\overline{BC} = 5x - 5$, $\overline{CD} = 3x + 2$ e $\overline{AD} = 4x - 4$.

22) Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo. Determine a medida de sua base média, sabendo que um dos lados oblíquos mede 28 cm.

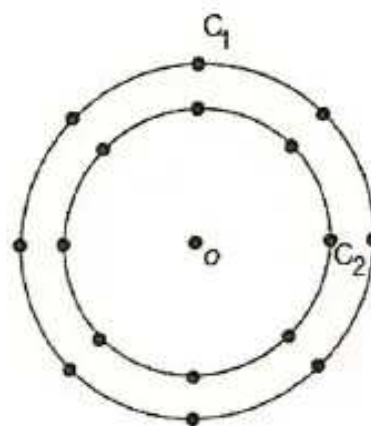
23) Determine o comprimento de uma circunferência de raio 4 cm, considerando a aproximação 3,14 para o número π.

24) **(ENEM)** Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio.

Use 3 como aproximação para π.

Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária?

a) 0,30 km
b) 0,75 km
c) 1,50 km
d) 2,25 km
e) 4,50 km

25) **(ENEM)** A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.

Quantos metros uma criança sentada no cavalo C_1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C_2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

a) 55,5
b) 60,0
c) 175,5
d) 235,5
e) 240,0

26) Em um círculo, o comprimento do menor arco subentendido por um dos lados de um pentágono regular inscrito é igual a 6,28 cm. Determine o raio desse círculo, considerando a aproximação 3,14 para o número π.

27) Em um círculo de raio 12 cm, é traçado um ângulo excêntrico interior, de medida 102°, que subentende na circunferência dois arcos tais que a medida de um deles excede a medida do outro de 84°. Determine os comprimentos de cada um desses arcos, considerando a aproximação 3 para o número π.

28) **(PUC)** Em um círculo, um ângulo central de 20 graus determina um arco de 5 cm. Qual o tamanho do arco, em cm, determinado por um ângulo central de 40 graus?

a) 5
b) 10
c) 20
d) 40
e) 60

29) **(ENEM)** Na imagem, a personagem Mafalda mede a circunferência do globo que representa o planeta Terra.

Em uma aula de matemática, o professor considera que a medida encontrada por Mafalda, referente à maior circunferência do globo, foi de 80 cm. Além disso, informa que a medida real da maior circunferência da Terra, a linha do Equador, é de aproximadamente 40 000 km.

QUINO. Toda Mafalda. São Paulo: Martins Fontes, 2008 (adaptado).

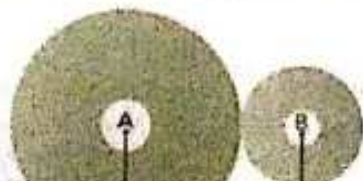
A circunferência da linha do Equador é quantas vezes maior do que a medida encontrada por Mafalda?

a) 500
b) 5 000
c) 500 000
d) 5 000 000
e) 50 000 000

30) **(FUVEST)** Uma das primeiras estimativas do raio da Terra é atribuída a Eratóstenes, estudioso grego que viveu, aproximadamente, entre 275 a.C. e 195 a.C. Sabendo que em Assuã, cidade localizada no sul do Egito, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical não apresentava sombra, Eratóstenes decidiu investigar o que ocorreria em Alexandria, cidade do norte do Egito, distante aproximadamente 900 km de Assuã. O estudioso observou que, em Alexandria, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical apresentava sombra e determinou o ângulo θ entre as direções do bastão e de incidência dos raios de sol. O valor do raio da Terra, obtido a partir de θ e da distância entre Alexandria e Assuã foi de, aproximadamente, 7 500 km. Considerando a aproximação 3 para o número π, o mês em que foram realizadas as observações e o valor aproximado de θ são

a) junho e 7°.
b) dezembro e 7 °.
c) junho e 23°.
d) dezembro e 23°.
e) junho e 0,3°.

31) No protótipo antigo de uma bicicleta, a roda maior tem 55 cm de raio e a menor tem 35 cm de raio. Qual deve ser o número mínimo de voltas completas da roda maior para que a roda menor gire um número inteiro de vezes?

32) **(UERJ)** Uma máquina possui duas engrenagens circulares, sendo a distância entre seus centros A e B igual a 11 cm, como mostra o esquema:

Sabe-se que a engrenagem menor dá 1000 voltas no mesmo tempo em que a maior dá 375 voltas, e que os comprimentos dos dentes de ambas têm valores desprezíveis.

A medida, em centímetros, do raio da engrenagem menor equivale a:

a) 2,5
b) 3,0
c) 3,5
d) 4,0

33) **(ENEM)** Um ciclista A usou uma bicicleta com rodas com diâmetros medindo 60 cm e percorreu, com ela, 10 km. Um ciclista B usou outra bicicleta com rodas cujos diâmetros mediam 40 cm e percorreu, com ela, 5 km.

Considere 3,14 como aproximação para π.

A relação entre o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista A e o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista B é dada por

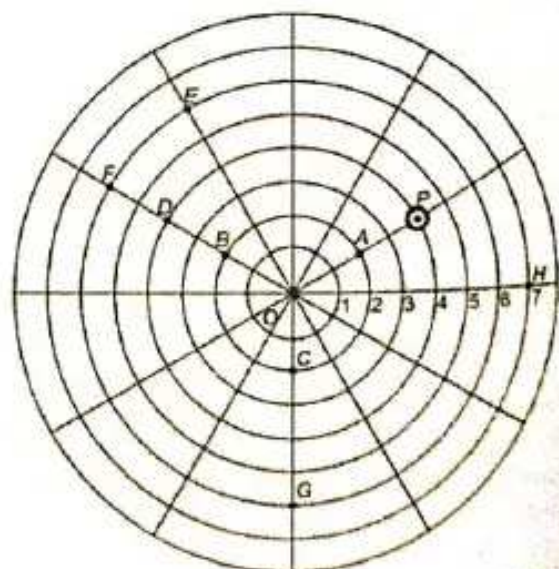
a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{3}$

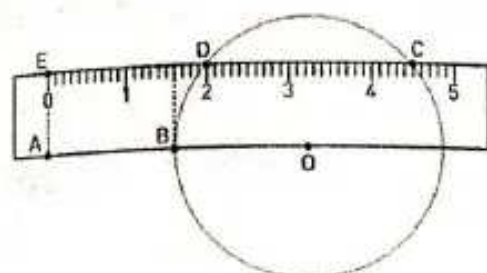
e) $\frac{3}{2}$

34) **(ENEM)** No jogo mostra na figura, uma bolinha desloca-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferências centradas no ponto O e raios variando de 1 a 8. Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir do ponto O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é 120°.

Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto

a) B.
b) D.

11 cm

c) E.
d) F.
e) G.

35) **(UERJ)** A figura abaixo representa um círculo de centro O e uma régua retangular, graduada em milímetros. Os pontos A, E e O pertencem à régua e os pontos B, C e D pertencem, simultaneamente, à régua e à circunferência.

Considere os seguintes dados:

SEGMENTOS	MEDIDA (cm)
$\overline{AB}$	1,6
$\overline{ED}$	2,0
$\overline{EC}$	4,5

O diâmetro do círculo é, em centímetros, igual a:

a) 3,1
b) 3,3
c) 3,5
d) 3,6

36) Determine o raio de um círculo inscrito em um triângulo retângulo de perímetro 2p e cuja hipotenusa tem medida a.

37) Determine o comprimento da circunferência de um círculo inscrito em um triângulo retângulo, de lados 9, 40 e 41.

38) Determine as posições relativas entre os pares de circunferências mostradas abaixo, de raios r e R e distância entre os centros igual a d.

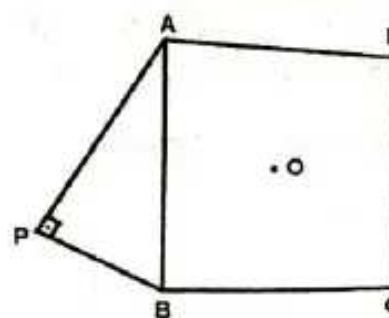
a) R = 10, r = 6 e d = 4
b) R = 8, r = 7 e d = 16
c) R =12, r = 8 e d = 5
d) R = 7, r = 4 e d = 0
e) R = 11, r = 5 e d = 16
f) R = 9, r = 3 e d = 2

39) Quantas tangentes comuns admitem duas circunferências

a) exteriores?
b) tangentes exteriores?
c) secantes?
d) tangentes interiores?
e) interiores?
f) concêntricas?

40) Três circunferências, de centros A, B e C, são tangentes exteriores duas a duas. Determine as medidas de seus raios, sabendo que $\overline{AB}$ = 10cm, $\overline{AC}$ = 13cm e $\overline{BC}$ = 11cm.

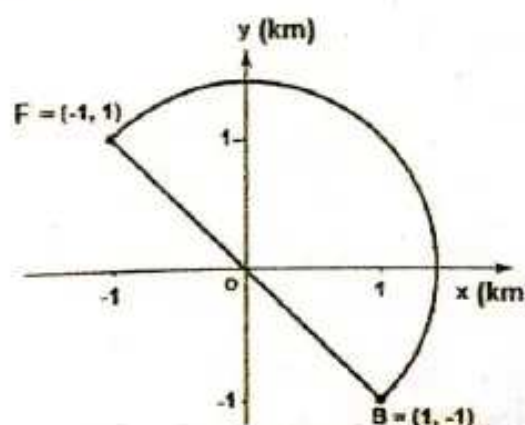
41) Duas circunferências C_1 e C_2 são concêntricas e têm raios iguais a 6 cm e 10 cm. Determine os raios da maior e da menor circunferência que tangenciam simultaneamente as circunferências C_1 e C_2

42) Na figura abaixo, sobre o lado $\overline{AB}$, do quadrado ABCD, constrói-se o triângulo retângulo ABP. Sendo O o centro do quadrado, determine a medida do ângulo $O\hat{P}B$

43) **(ENEM)** Uma fábrica vende pizzas congeladas de tamanhos médio e grande, cujos diâmetros são respectivamente 30 cm e 40 cm. Fabricam-se apenas pizzas de sabor muçarela. Sabe-se que o custo com os ingredientes para a preparação é diretamente proporcional ao quadrado do diâmetro da pizza, e que na de tamanho médio esse custo é R$ 1,80. Além disso, todas possuem um custo fixo de R$ 3,00, referente às demais despesas da fábrica. Sabe-se ainda que a fábrica deseja lucrar R$ 2,50 em cada pizza grande.

Qual é o preço que a fábrica deve cobrar pela pizza, a fim de obter o lucro desejado?

a) R$ 5,70
b) R$ 6,20
c) R$ 7,30
d) R$ 7,90
e) R$ 8,70

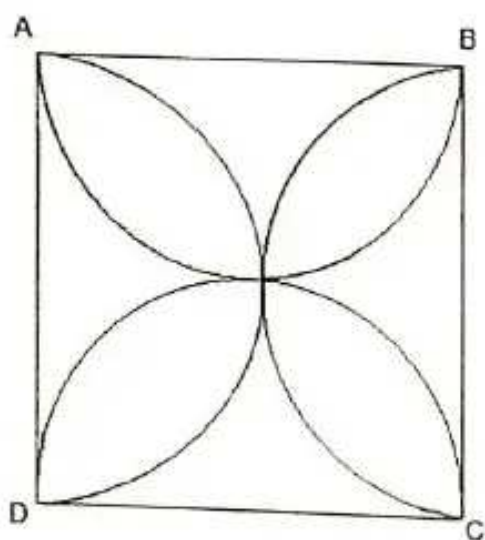
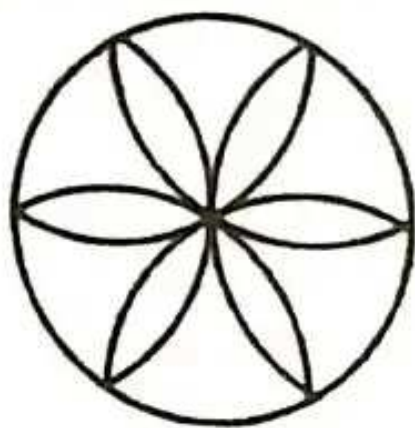
44) Para confeccionar um trabalho de artes para a escola em que estuda, Lucas dispunha de certo número de moedas idênticas. Assim, colocou uma delas sobre uma folha de cartolina e, em seguida, arrumou as demais em volta dela, tangenciando-a, de modo que cada uma delas tangenciasse a outras duas. Ao final do trabalho verificou ter usado todas as moedas que possuía.
Quantas moedas Lucas utilizou em sua obra de arte?

45) **(ENEM)** Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B). Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.

Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$.

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de

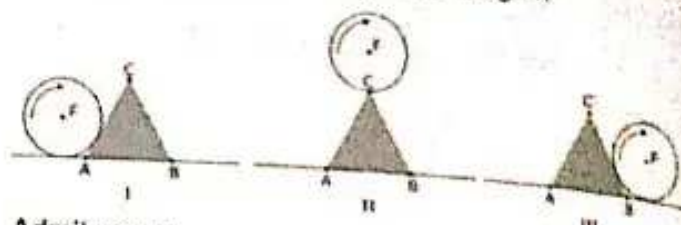
a) 1 260.
b) 2 520.
c) 2 800.
d) 3 600.
e) 4 000.

46) Na figura abaixo, o quadrado ABCD tem lado igual a 8 cm. Determine o perímetro da rosácea construída em seu interior.

47) No interior de um círculo de raio 6 cm, foi construída uma rosácea, como mostra a figura abaixo.

Determine o perímetro dessa figura.

48) Uma roda de 10 cm de diâmetro gira em linha reta, sem escorregar, sobre uma circunferência lisa e horizontal.

Determine o menor número de voltas completas para a roda percorrer uma distância de 10 m.

49) **(IME)** Na figura, a reta r é tangente ao círculo, $\overline{AB} = \overline{OA}$, $O\hat{A}C = 126°$ e $\overline{NA}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares à reta r. Calcule a medida do ângulo $A\hat{C}B$

50) **(UERJ)** Um tubo cilíndrico cuja base tem centro F e raio r rola sem deslizar sobre um obstáculo com a forma de um prisma triangular regular. As vistas das bases do cilindro e do prisma são mostradas em três etapas desse movimento, I, II e III, nas figuras a seguir.

Admita que:

- as medidas do diâmetro do círculo de centro F e da altura do triângulo ABC são respectivamente iguais a $2\sqrt{3}$ decímetros;
- durante todo o percurso, o círculo e o triângulo sempre se tangenciam.

Determine o comprimento total, em decímetros, do caminho descrito pelo centro F do círculo que representa a base do cilindro.

Gabarito

1)
a) 60°
b) 120°
c) 120°
d) 60°
e) 60°
f) 60°
g) 30°

2) b

3)
a) 40°
b) 140°
c) 39°
d) 76°
e) 50°
f) 110°
g) 250°
h) 50°
i) 48°
j) 70°

4) 16°
5) 75° ou 15°
6) b
7) 36° e 60°
8) 130°
9) 112° e 28°
10) 19° e 53°
11) 38°
12) 3α -180°
13) 4α
14) 2 de 87° e 2 de 93°
15) 2 de 55° e 2 de 125°
16) 2 de 82°30' e 2 de 97°30' ou 2 de 52°30' e 2 de 127°30'
17) 30 cm

24) e
25) b
26) 5 cm
27) 12 cm e 28,8 cm
28) b
29) e
30) a
31) 7
32) b
33) d
34) d
35) b
36) p-a
37) 8π

38)
a) Tangentes interiores
b) Exteriores
c) Secantes
d) Concêntricas
e) Tangentes exteriores
f) Interiores

39)
a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0
f) 0

40) 4 cm, 6 cm e 7 cm
41) 2 cm e 8 cm
42) 45°
43) e
44) 7
45) b
46) 16π cm

18) 15 cm
19) 14 cm
20) 42 cm
21) 36 cm
22) 28 cm
23) 25,12 cm

48) 32
49) 42°
50) $\frac{18+2\pi\sqrt{3}}{3}$ dm

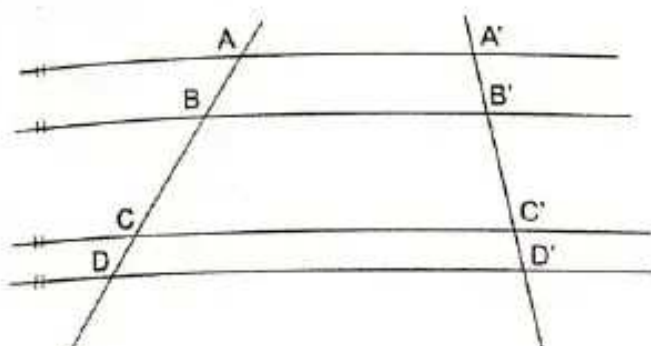
Capítulo VI

LINHAS PROPORCIONAIS

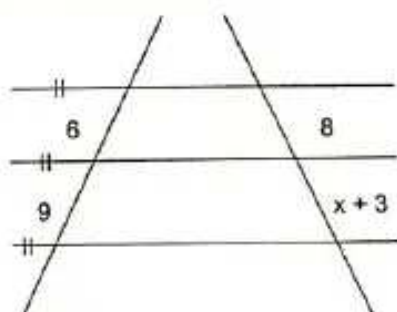
Feixe de Paralelas

É todo conjunto formado por duas ou mais retas paralelas.

Teorema de Thales

"Um feixe de paralelas determina sobre duas secantes segmentos homólogos (correspondentes) proporcionais."

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{B'D'}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}=\dots$$

Exemplo:

Determine o valor de x na figura:

Solução:

$\frac{6}{9}=\frac{8}{x+3}$ ou $\frac{6}{8}=\frac{9}{x+3}$

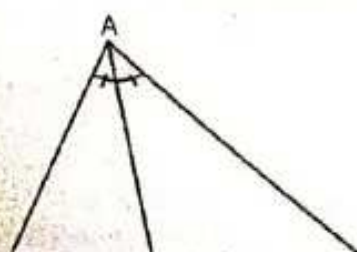
$6(x+3)=8.9$ $6(x+3)=8.9$

$6x+18=72$

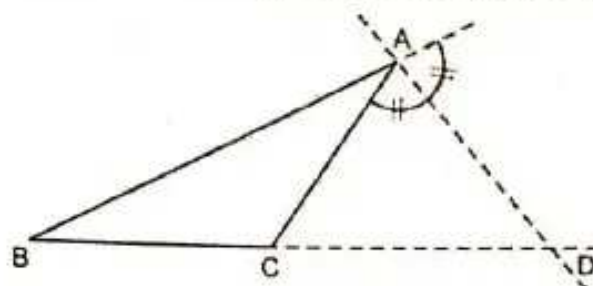
$6x=54$

$\boxed{x=9}$

Teorema da Bissetriz Interna

"A bissetriz interna de um dos ângulos de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos aditivos proporcionais aos lados que lhe são adjacentes."

$$\boxed{\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}}$$

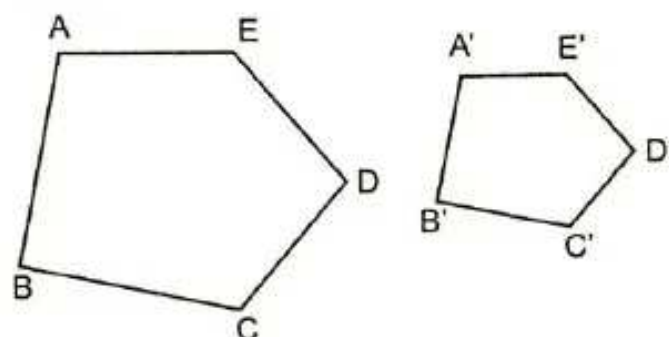
Teorema da Bissetriz Externa

"A bissetriz externa de um dos ângulos de um triângulo determina no lado oposto segmentos subtrativos proporcionais aos lados que lhes são adjacentes."

$$\boxed{\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}}$$

$\overline{AD}$ → bissetriz externa

Obs.: Os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ são subtrativos pois a diferença entre eles é o lado $\overline{BC}$.

Polígonos Semelhantes

Dois polígonos são semelhantes quando apresentam os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais.

Se $\hat{A}\equiv\hat{A}'$, $\hat{B}\equiv\hat{B}'$, $\hat{C}\equiv\hat{C}'$, $\hat{D}\equiv\hat{D}'$, $\hat{E}\equiv\hat{E}'$ e

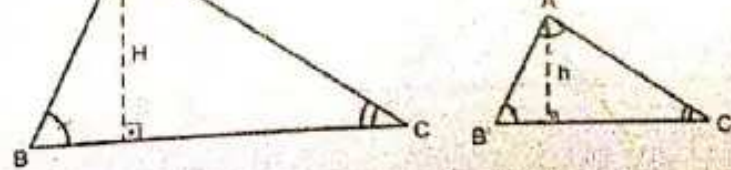
$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}$, os polígonos ABCDE e A'B'C'D'E' são semelhantes, ou seja, ABCDE ~ A'B'C'D'E'.

Devemos observar que a razão de proporcionalidade entre lados homólogos (k) é chamada de ***razão de semelhança*** e vale também para as demais linhas homólogas, como as diagonais e para os perímetros.

Semelhança de Triângulos

No caso dos triângulos, para que se reconheça a semelhança, basta que eles apresentem os mesmo ângulos, ou lados respectivamente proporcionais, ou ainda um ângulo congruente compreendido entre lados respectivamente proporcionais. Lembramos mais uma vez que constatada a semelhança de dois triângulos, a proporcionalidade entre os lados homólogos também deve ser aplicada para as demais linhas homólogas, como alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes.

AD → bissetriz interna

Obs.: Os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ são aditivos pois adicionando-os obtemos o lado $\overline{BC}$.

Se $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, daí:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{H}{h} = \ldots = \frac{2p}{2p'} = k$$

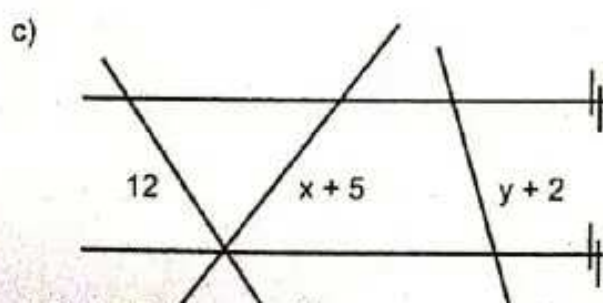
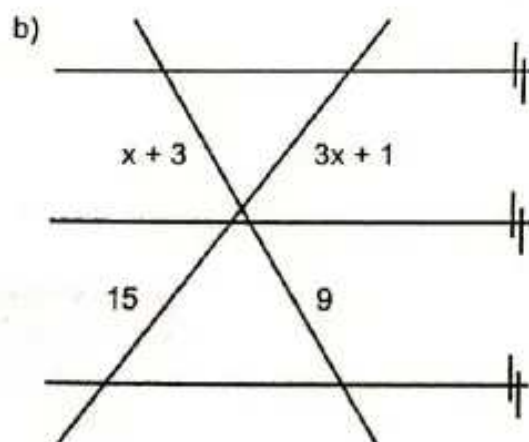
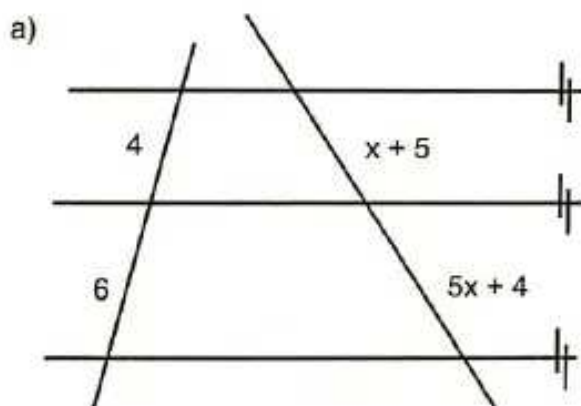
Exercícios

1) O ponto M divide internamente o segmento AB, de comprimento 18 cm, na razão 2 : 7. Determine as medidas dos segmentos MA e MB.

2) O ponto P divide externamente o segmento MN = 12 cm na razão 5 : 8. Determine as medidas dos segmentos PM e PN.

3) Sobre uma reta são marcados, nessa ordem, os pontos A, B e C, tais que AB = 4 cm e BC = 12 cm. Considere o ponto D, conjugado harmônico de B em relação ao segmento AC. Determine a medida do segmento CD.

4) **(IME)** Considere as equações do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e $a'x^2 + b'x + c' = 0$. Suas raízes reais são respectivamente iguais a x_1, x_2, x_3 e x_4. Determine a condição entre os coeficientes das equações para que o segmento de extremidades com abscissas x_1 e x_2 seja dividido harmonicamente pelos pontos de abscissas x_3 e x_4.

5) Determine o valor de x em:

6) Um feixe de quatro paralelas determina sobre uma transversal r segmentos de medidas 6 cm, 12 cm e 10 cm, e, sobre outra transversal s, três segmentos cuja soma é 42 cm. Determine a medida do maior segmento determinado sobre a transversal s.

7) Sobre a transversal t, um feixe formado por quatro paralelas determina três segmentos de medidas 6 cm, 9 cm e 12 cm, enquanto que sobre outra transversal u determina três segmentos tais que o produto das medidas dos dois menores é igual a 96 cm². Determine as medidas dos segmentos determinados sobre a transversal u.

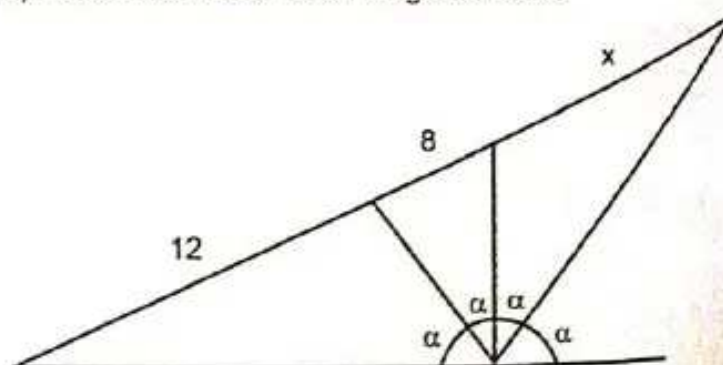
8) Um feixe formado por quatro paralelas determina, sobre uma transversal, segmentos que medem 12 cm, 16 cm e 24 cm, e, sobre outra transversal, três segmentos cuja soma dos quadrados de suas medidas vale 549 cm². Determine as medidas dos segmentos da segunda transversal.

9) Em um triângulo ABC, de lados AB = 12 cm, AC = 8 cm e BC = 15 cm, a bissetriz interna no vértice A intersecta o lado BC no ponto P. Determine as medidas dos segmentos BP e PC.

10) Em um triângulo ABC, de perímetro 35 cm, a bissetriz interna traçada do vértice A divide o lado oposto em dois segmentos aditivos BM = 6 cm e MC = 8 cm. Determine as medidas dos lados AB e AC.

11) A bissetriz interna de um dos ângulos de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos aditivos de medidas 5 cm e 10 cm. Determine as medidas dos lados desse triângulo, sabendo que seu perímetro vale 33 cm.

12) A bissetriz externa traçada do vértice A de um triângulo ABC secciona o prolongamento do lado BC no ponto P. Determine a medida do segmento BP, sabendo que AB = 6 cm, AC = 12 cm e BC = 7 cm.

13) Determine o valor de x na figura abaixo.

14) Um triângulo possui lados de medidas 5 cm, 8 cm e 10 cm. De quanto devemos prolongar o menor lado de modo que ele encontre a bissetriz externa traçada do vértice oposto a ele?

15) A maior diagonal de um pentágono convexo, de perímetro 36 cm, mede 6 cm. Determine o perímetro de outro pentágono, semelhante ao primeiro, cuja maior diagonal mede 9 cm.

16) Um triângulo cujos lados são expressos, em centímetros, por x + 2, 3x – 4 e 28 – 4x, é semelhante a outro triângulo de perímetro 39 cm. Determine a razão entre o maior lado do segundo triângulo

3y + 12 16 2y

do primeiro triângulo é o maior lado do seg...

154

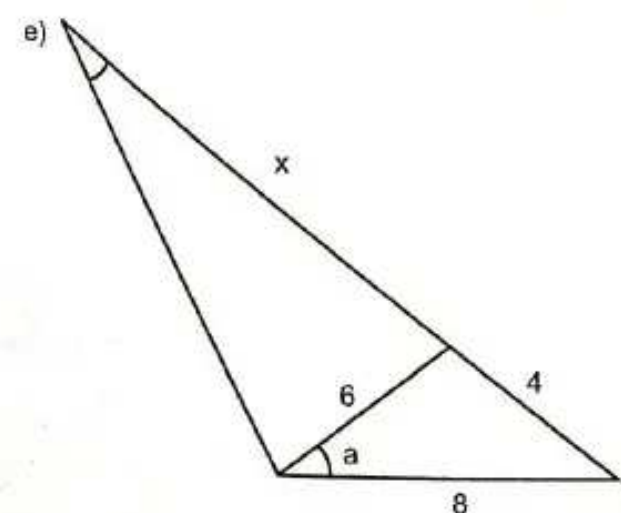
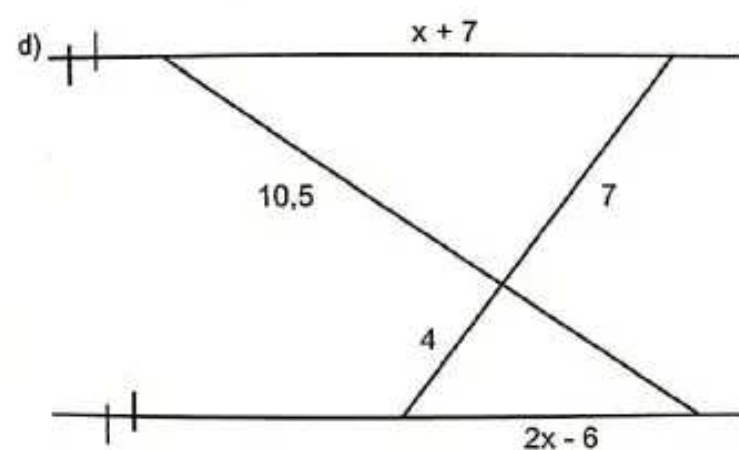
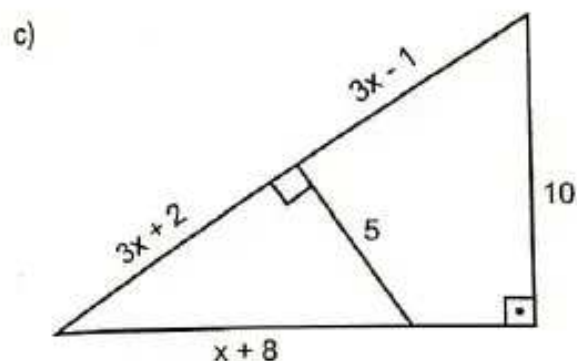
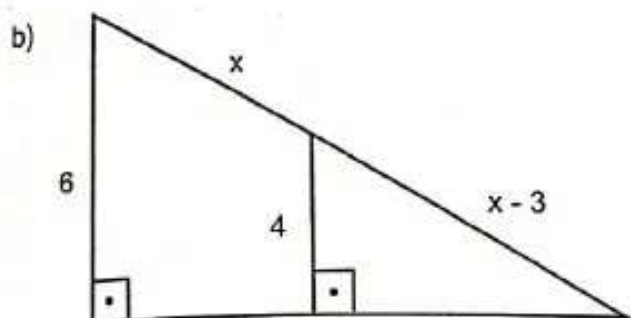
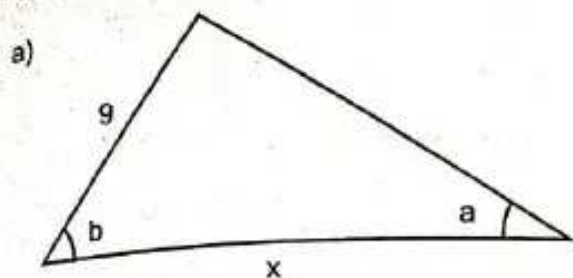
17) Determine os valores de x nas figuras:

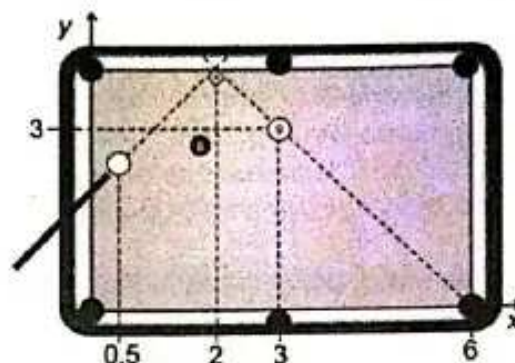
a)

b)

c)

d)

e)

18) **(PUC)** Considere o triângulo ABC em que AB = BC = 1. Seja D o ponto médio de AC e E o ponto médio de AB. Determine o comprimento do segmento DE.

19) **(ENEM)** Em sua vez de jogar, um jogador precisa dar uma tacada ... forma que, ao rebater, ela saia em uma trajetória retilínea, formando um ângulo de 90° com a trajetória da tacada, conforme ilustrado na figura.

Com essa estratégia, o jogador conseguiu encaçapar a bola 9. Considere um sistema cartesiano de eixos sobre o plano da mesa, no qual o ponto de contato da bola com a mesa define sua posição nesse sistema. As coordenadas do ponto que representa a bola 9 são (3 ; 3), o centro da caçapa de destino tem coordenadas (6 ; 0) e a abscissa da bola branca é 0,5, como representados na figura.

Se a estratégia deu certo, a ordenada da posição original da bola branca era

a) 1,3.
b) 1,5.
c) 2,1.
d) 2,2.
e) 2,5.

20) **(ENEM)** A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se mais tarde, a sombra do poste diminui de 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir

a) 30 cm.
b) 45 cm.
c) 50 cm.
d) 80 cm.
e) 90 cm.

21) **(ENEM)** A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 m. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 m e alcançou uma altura de 0,8 m. A distância, em metros, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

a) 1,16.
b) 3,0.
c) 5,4.
d) 5,6.
e) 7,04.

22) Pelo baricentro do triângulo ABC é traçada uma paralela a um de seus lados que forma, com os outros dois lados, um novo triângulo de perímetro 20 cm. Determine o perímetro do triângulo ABC.

23) **(PUC)** ABCD é um paralelogramo, M é o ponto médio do lado CD e T é o ponto de interseção de AM com BD. O valor da razão entre as medidas dos segmentos DT e BD é

a) 1/2.
b) 1/3.
c) 2/5.
d) 1/4.

...tacada na bola branca, de forma a acertar a bola 9 e fazê-la cair em uma das caçapas de uma mesa de bilhar. Como a bola 8 encontra-se entre a bola branca e a bola 9, esse jogador adota a estratégia de dar uma tacada na bola branca em direção a uma das laterais da mesa, de

e) 2/7.

24) O losango ADEF está inscrito no triângulo ABC, de modo que os pontos D, E e F estão, respectivamente, nos lados AB, BC e AC. Sabendo que AB = 6 cm, BC = 4 cm e AC = 3 cm, determine a medida do lado do losango.

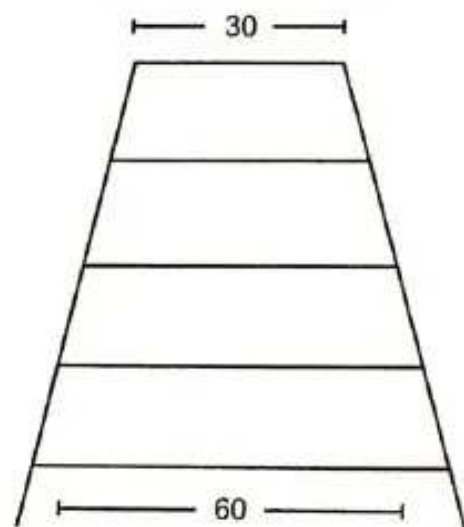
25) Em um retângulo ABCD, temos que AB = 18 cm, BC = 12 cm, M é o ponto médio de AB e a diagonal AC determina sobre o segmento DM o ponto P. Determine o perímetro do retângulo PRBS, sabendo que os pontos R e S pertencem, respectivamente, aos lados BC e AB.

26) As bases de um trapézio medem 6 cm e 8 cm, enquanto que sua altura mede 5 cm. Determine a altura do maior triângulo obtido quando prolongamos os lados oblíquos do trapézio.

27) Um trapézio possui bases de medidas 12 cm e 16 cm e altura medindo 14 cm. A que distância da base menor intersectam-se suas diagonais?

28) Em um trapézio de bases 6 cm e 9 cm e altura 4,5 cm, traça-se uma paralela às bases, a 3 cm da base menor. Determine a medida do segmento dessa paralela compreendido entre os lados não paralelos do trapézio.

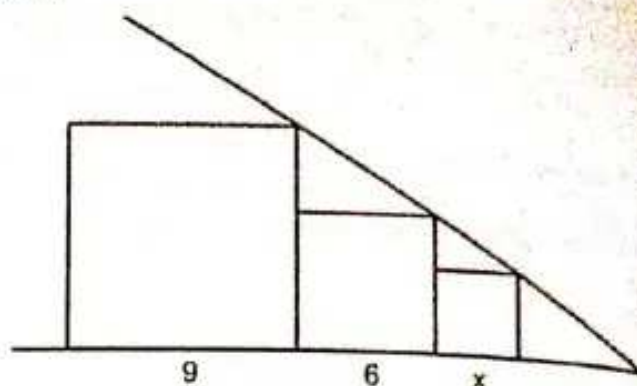
29) Considere um trapézio de bases iguais a 4 cm e 19 cm e altura de medida 15 cm. A 6 cm da base menor e a 3 cm da base maior são traçadas duas paralelas às bases desse trapézio. Determine a soma das medidas dos segmentos dessas paralelas compreendidos entre os lados oblíquos desse trapézio.

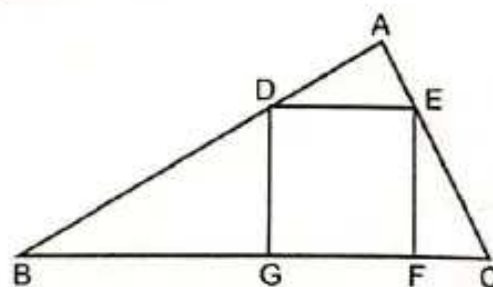
30) **(ENEM)** Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e 30 cm, conforme a figura abaixo.

Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser

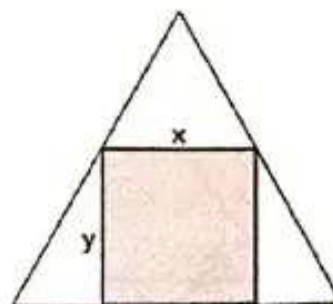
a) 144.
b) 180.
c) 210.
d) 225.
e) 240.

31) Determine a altura de um trapézio retângulo cujas diagonais são perpendiculares e as bases medem 2,25 cm e 16 cm.

32) Determine o perímetro de um quadrado inscrito em um losango cujas diagonais medem 4 cm e 12 cm.

34) A figura abaixo mostra três quadrados. Determine o valor de x.

35) Em um triângulo ABC, retângulo em A, está inscrito um quadrado MNPQ, com MQ sobre o lado BC, N e P, respectivamente, pertinentes aos lados AB e AC. Sabendo que $BM = \sqrt{17} - 1$ e $QC = \sqrt{17} + 1$, determine o perímetro do quadrado e a medida do segmento AQ.

36) **(ENEM)** Na figura, ABC é um triângulo retângulo em A e DEFG é um quadrado inscrito nesse triângulo. Considerando-se que BG = 9 e CF = 4, o perímetro desse quadrado é igual a

a) 24.
b) 28.
c) 32.
d) 36.
e) 40.

37) **(UERJ)** Em um triângulo equilátero de perímetro igual a 6 cm, inscreve-se um retângulo de modo que um de seus lados fique sobre um dos lados do triângulo. Observe a figura:

Admitindo que o retângulo possui a maior área possível, determine, em centímetros, as medidas x e y de seus lados.

38) Sobre uma reta r são marcados dois A e B que distam 12 cm. A partir de A e B, para um mesmo lado de r, são traçados segmentos AD = 16 cm e BE = 2 cm, perpendiculares a AB. Considere um ponto C, pertinente à reta r e compreendido entre A e B, de modo que CD e CE sejam perpendiculares. Determine o menor valor possível para a medida do segmento AC.

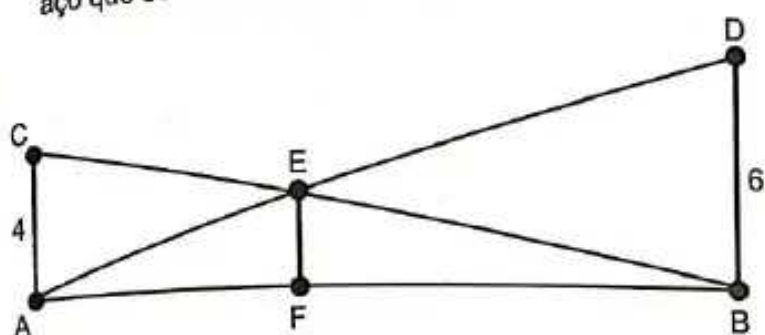
39) Um engenheiro, não podendo medir a largura de um rio ... margem oposta uma

...cujas diagonais medem 4 cm e 12 cm.

33) Um retângulo, cuja base é o triplo da altura, é inscrito em um triângulo de base 12 cm e altura 20 cm. Determine o perímetro desse retângulo.

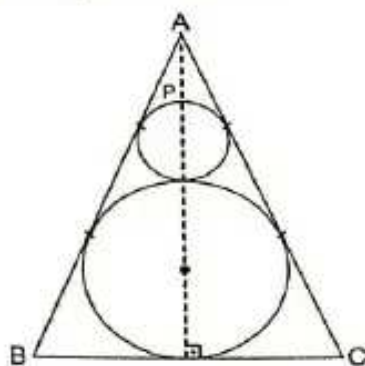
em determinado trecho, avistou na margem ... pedra e colocou-se no ponto A em frente a ela. Andou perpendicularmente à margem até o ponto B. Mediu a distância AB e encontrou 5 m. A seguir, deslocou-se de B até C, paralelamente à margem, e encontrou BC = 12 m. Aí, en-

tão, deslocou-se até o ponto D, junto à margem, andando em direção à pedra. Sabendo-se que AD = 8 m, determine a largura do rio.

40) **(ENEM)** O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.

Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1 m
b) 2 m
c) 2,4 m
d) 3m
e) $2\sqrt{6}$ m

41) Considere duas circunferências, de raios 3 e 8, que se tangenciam interiormente no ponto P. A corda PQ, do maior círculo, intersecta a menor circunferência no ponto N, de modo que PN = 5. Determine a medida do segmento NQ.

42) Na figura, o diâmetro de um dos círculos é o triplo do diâmetro do outro. Determine a altura do triângulo isósceles ABC, sabendo-se que AP = 5 cm.

43) Determine o raio de um semicírculo no qual está inscrito um triângulo ABC cujos lados AB e AC medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm, e a altura AH mede 3 cm.

44) De um ponto A traçamos as tangentes AB e AD, a um mesmo círculo. Considerando um ponto C, pertinente ao maior dos arcos BD, tal que AB e CD são paralelos. É correto afirmar que o segmento BC é

a) a média aritmética entre AB e CD.
b) a média geométrica entre AB e CD.
c) a média harmônica entre AB e CD.
d) o inverso da média aritmética entre AB e CD.
e) o inverso da média harmônica entre AB e CD.

45) Por um ...

46) Determine a medida do lado BC de um triângulo ABC, sabendo que AB = AC = 2 cm e $B\hat{A}C = 36°$.

Gabarito

1) 4 cm e 14 cm
2) 20 cm e 32 cm
3) 24 cm
4) $bb' = 2 \cdot (a'c + ac')$
5) a) 1
   b) 3
   c) 13
6) 18 cm
7) 8 cm, 12 cm e 16 cm
8) 9 cm, 12 cm e 18 cm
9) 9 cm e 6 cm
10) 9 cm e 12 cm
11) 6 cm, 12 cm e 15 cm
12) 7 cm
13) 40
14) 20 cm
15) 54 cm
16) 2/3
17) a) 18
    b) 3
    c) 5
    d) 7
    e) 12
    f) 9,6
18) 0,5
19) e
20) b
21) d
22) 30 cm
23) b
24) 2 cm
25) 32 cm
26) 20 cm
27) 6 cm
28) 8 cm
29) 26 cm
30) d
31) 6 cm
32) 12 cm
33) $\frac{80}{3}$ cm
34) 4
35) 4 e $\sqrt{17} + 2$
36) a
37) $x = 1$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
38) 10 m
39) 10
40) c
41) 25/3
42) 45 cm
43) 5 cm
44) b
45) 3 cm
46) $(\sqrt{5} - 1)$ cm

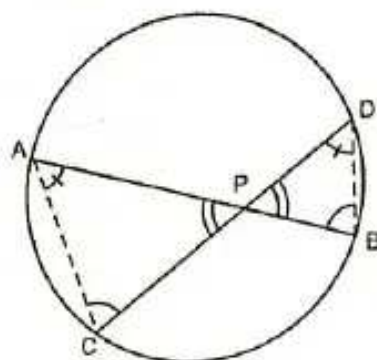
Anotações

...r um ponto T são traçadas duas retas r e s que tangenciam um círculo, respectivamente, nos pontos A e B. Considere um ponto P pertinente ao menor arco AB. A partir de P são traçados os segmentos PM, PN e PQ que são, respectivamente, perpendiculares a AB, s e r. Sabendo que PN = 2 cm e PQ = 4,5 cm, determine a medida do segmento PM.

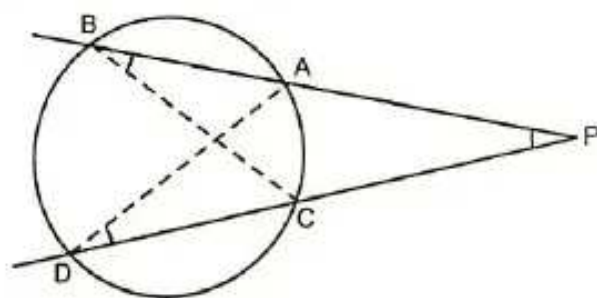
Capítulo VII

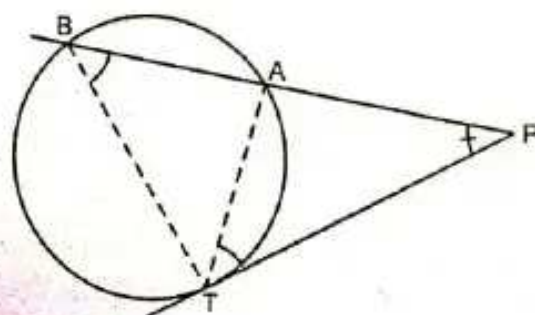
RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

Ponto Interior

"Quando duas cordas intersectam-se no interior de um círculo, cada uma delas fica dividida em dois segmentos. O produto das medidas dos dois segmentos de uma delas é igual ao produto das medidas dos dois segmentos da outra."

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

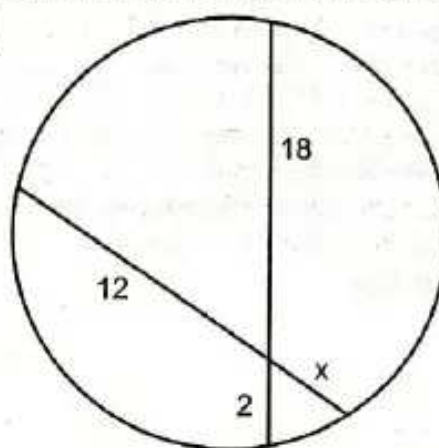
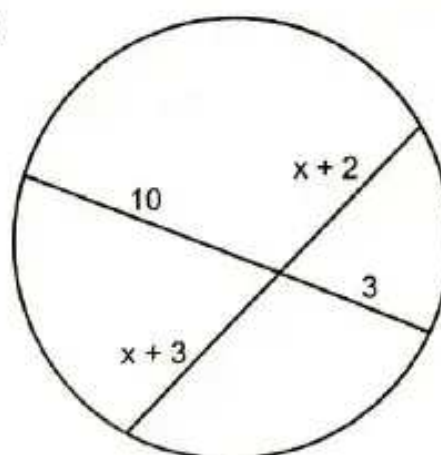
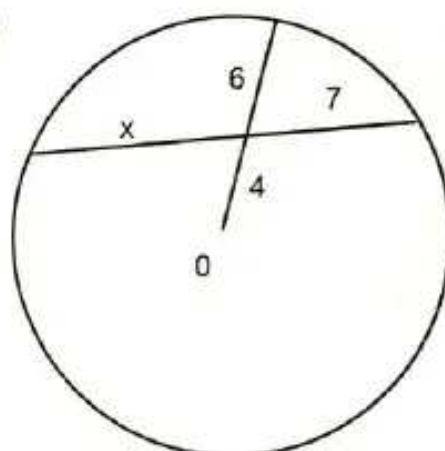
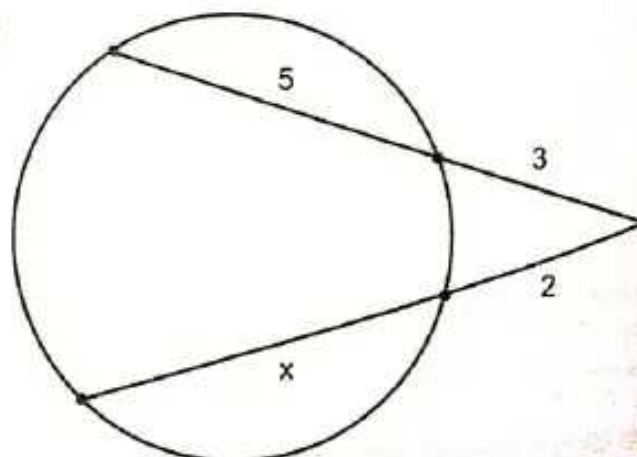
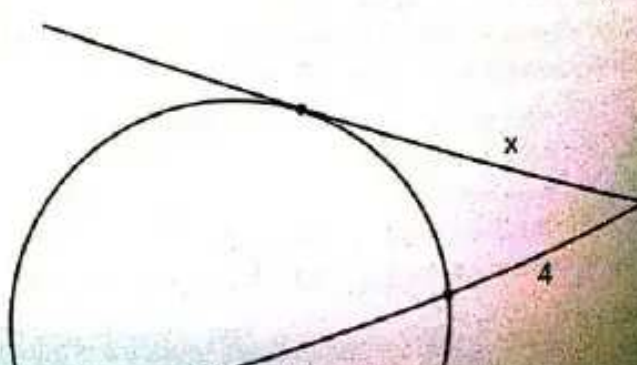
Ponto Exterior

a) "Quando por um ponto exterior traçamos duas secantes a um círculo, o produto entre as medidas da parte externa de uma delas e de seu comprimento total, é igual produto da medida da parte externa da outra pelo seu comprimento total."

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

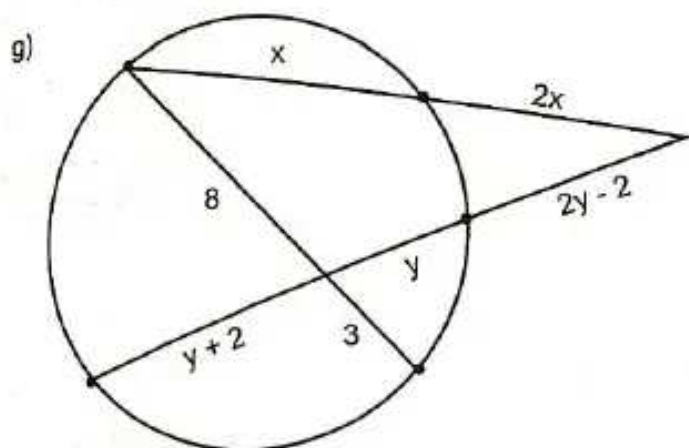
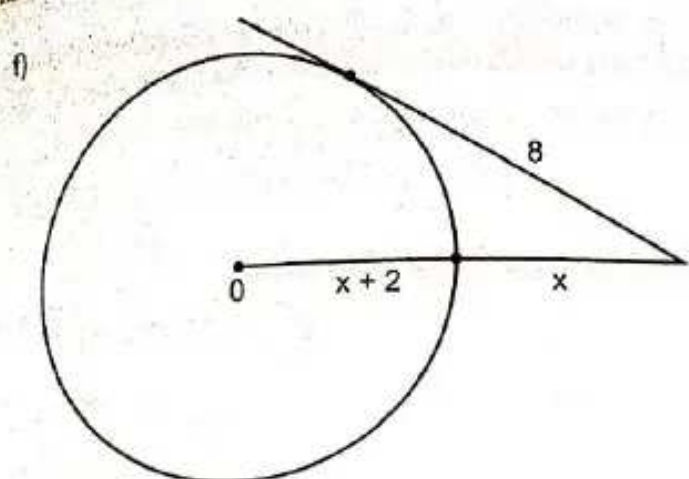
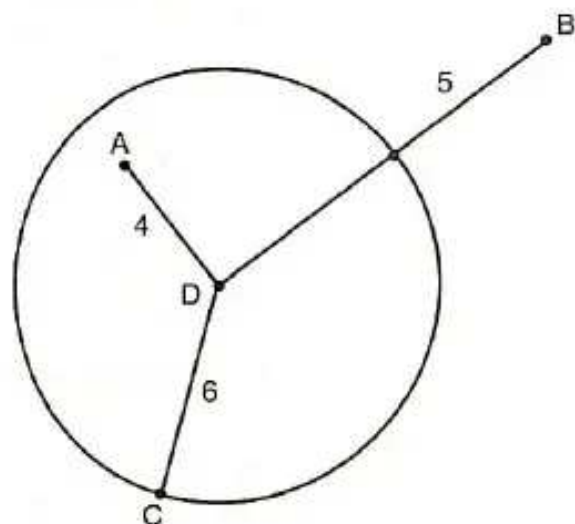
b) "Quando por um ponto exterior traçamos uma tangente e uma secante a um círculo, o quadrado da medida da tangente é igual ao produto da medida da parte externa da secante pelo seu comprimento total."

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PT}^2$$

Exercícios

1) Determine o valor de x em cada uma das figuras abaixo.

a)

b)

c)

d)

e)

NOTA: Toda as relações mostradas anteriormente são dedutíveis através da semelhança de triângulos.

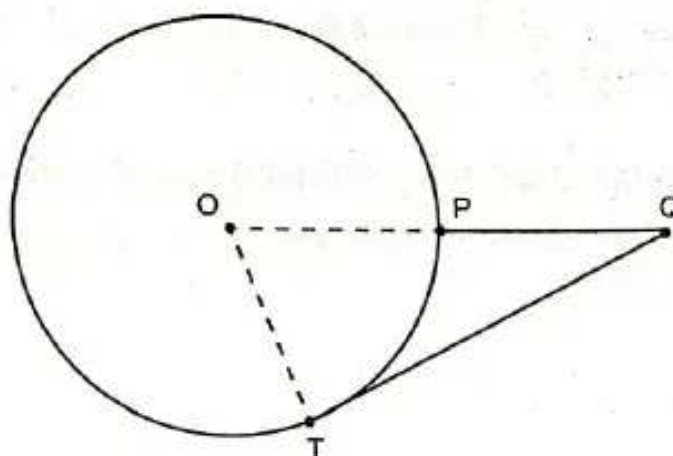
f)

g)

2) Determine a soma das potências dos pontos A, B e C em relação ao círculo de centro D mostrado na figura abaixo.

3) Os pontos A e B, pertinentes a um círculo de raio 6 cm, possuem, respectivamente, potências máxima e mínima em relação a esse mesmo círculo. Determine a distância entre os pontos A e B.

4) As cordas AB e CD cortam-se no interior de um círculo em um ponto P. Sabendo que AB = 9 cm, CP = 2 cm e PD = 9 cm, determine as medidas dos segmentos AP e PB.

5) Determine a medida do raio de um círculo em que o segmento da tangente traçada por um ponto distante 15 cm do seu centro, mede 9 cm.

6) Determine o raio de um círculo em que uma corda mede 8 cm e a sua flecha mede 2 cm.

7) **(ENEM)** Em uma residência, há uma área de lazer com uma piscina redonda de 5 m de diâmetro. Nessa área há um coqueiro, representado na figura por um ponto Q. Se a distância de Q (coqueiro) ao ponto de tangência T (da

a) 4m.
b) 4,5 m.
c) 5 m.
d) 5,5 m.
e) 6 m.

8) De um ponto P, exterior a um círculo, são traçadas a tangente PA e a secante diametral PBC (PB < PC). Sabendo que o raio e o segmento PB têm medidas expressas por um número inteiro de centímetros, e que PA = 2PB, determine o menor valor possível para o perímetro da circunferência desse círculo.

9) As cordas AB e CD intersectam-se no interior de um círculo em um ponto Q, de modo que AQ = 8 cm, QB = 12 cm e CQ = 4QD. Considere o ponto P, conjugado harmônico de Q em relação ao segmento AB (PA < PB), do qual é traçada a tangente PE a esse círculo. Determine o valor do produto das medidas dos segmentos PE e QD.

10) Duas circunferências secantes intersectam-se nos pontos B e C. Traça-se a reta t, tangente comum às duas circunferências, e marcam-se os pontos de tangência M e N. A reta que passa pelos pontos B e C secciona a reta t no ponto A. Determine a medida do segmento MN, sabendo que AB = 2 cm e BC = 6 cm.

11) Considere duas circunferências C_1 de centro O_1 e C_2, de centro O_2 e raio r secantes nos pontos C e D. Passando por um ponto P, exterior às circunferências, são traçadas as retas PAB, secante a C_1, PCD, secante comum e PEF, secante diametral a C_2. Sabendo que $PB = PO_2 = 2r$, determine a medida de $\overline{AB}$ em função da medida de PA.

12) Considere as cordas AB = 29 e CD = 20 de um círculo, que intersectam-se em um ponto P, e um ponto Q da corda AB, tal que ACQD seja um paralelogramo. Determine a medida do segmento AQ.

Gabarito

1) a) 3
b) 3
c) 12
d) 10
e) 6
f) 4
g) 4

3) 6 cm
4) 3 cm e 6 cm
5) 12 cm
6) 5 cm
7) a
8) 6π cm
9) 240 cm^2

piscina) é 6 m, a distância d = QP, do coqueiro à piscina, é

2) $P_{ot} A = -20$
$P_{ot} B = 85$
$P_{ot} C = 0$

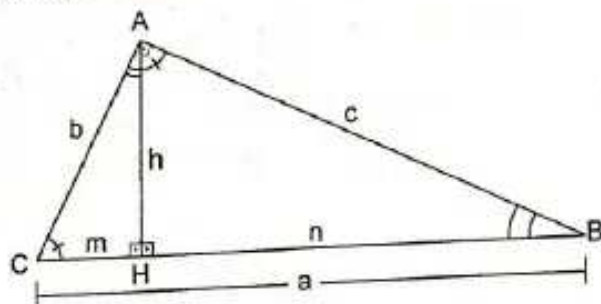
10) 8 cm

11) $\overline{AB} = \frac{\overline{PA}}{3}$

12) 8

Capítulo VIII

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

No triângulo retângulo abaixo vamos destacar os elementos mais importantes:

a → hipotenusa

b, c → catetos

h → altura relativa à hipotenusa

m, n → projeções dos catetos na hipotenusa

Na figura acima podemos observar que os triângulos ABC, AHB e AHC são semelhantes. Daí, podemos tirar as relações que se seguem:

1- "Em todo triângulo retângulo, o quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção sobre ela."

$$b^2 = a.m \quad \text{ou} \quad c^2 = a.n$$

2- "O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura que lhe é relativa."

$$b.c = a.h$$

3- "O quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções."

$$h^2 = m.n$$

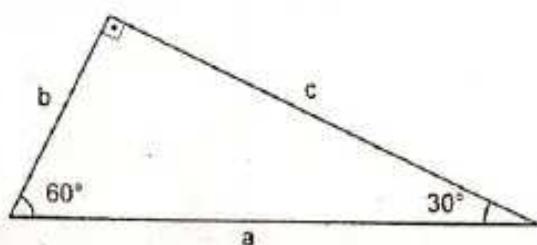
4- "O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos." (Teorema de Pitágoras)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

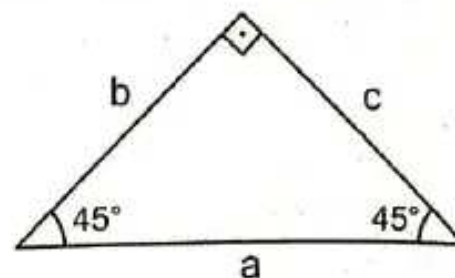
5- "O inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual à soma dos inversos dos quadrados dos catetos."

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Triângulos Retângulos Especiais

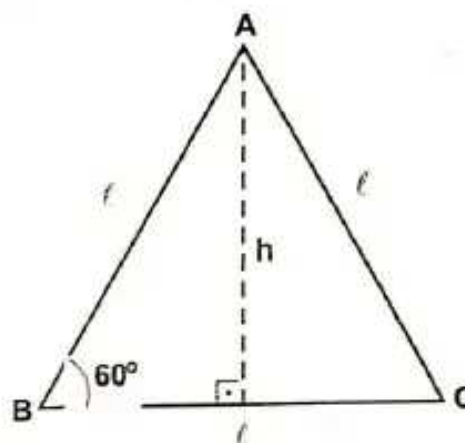
Triângulo de ângulos 30°; 60° e 90°

"Em um triângulo retângulo, o cateto oposto a um ângulo de 60°, vale a metade da hipotenusa multiplicada por $\sqrt{3}$.

$$c = \frac{a}{2} . \sqrt{3}$$

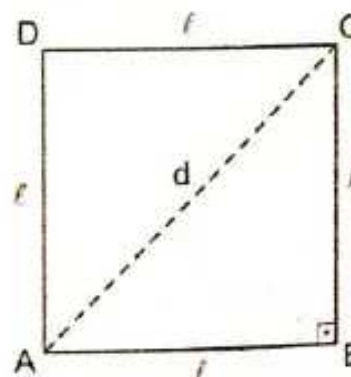
Triângulo Retângulo Isósceles

"Em um triângulo retângulo, o cateto oposto a um ângulo de 45°, vale a metade da hipotenusa multiplicada por $\sqrt{2}$.

$$b = c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Aplicações

Cálculo da altura de um triângulo equilátero

No triângulo retângulo AHB, a altura h é um cateto oposto a 60°, logo:

$$h = \frac{\ell}{2} . \sqrt{3}$$

Cálculo da diagonal de um quadrado

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2$

$d^2 = 2\ell^2$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

"Em um triângulo retângulo, o cateto oposto a um ângulo de 30°, vale a metade da hipotenusa."

$$b = \frac{a}{2}$$

Exercícios

1) Determine o valor de x em cada uma das figuras abaixo.

a)

b)

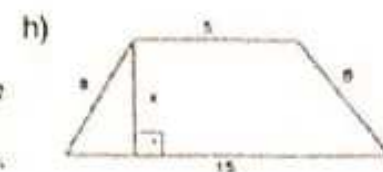
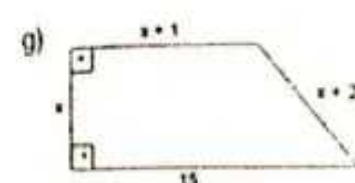
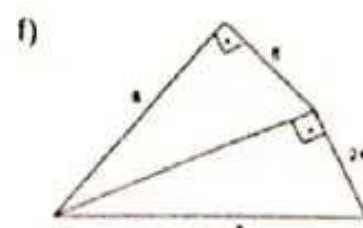
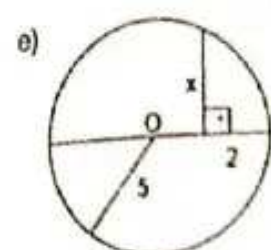
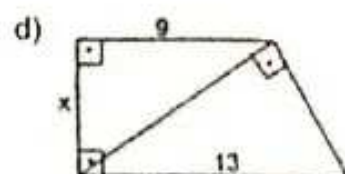
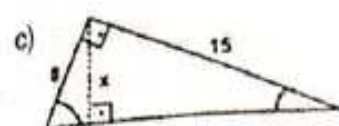
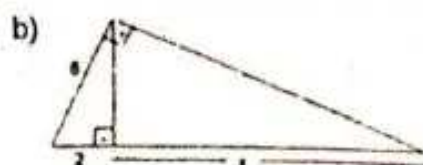
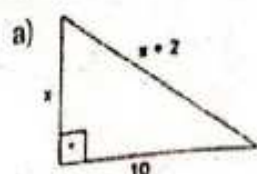
c)

d)

e)

f)

g)

h)

2) O pé de uma escada de 13 m de comprimento está afastado 5 m de um muro. A escada toca o muro, portanto, a uma altura de

a) 18 m.
b) 15 m.
c) 12 m.
d) 10 m.
e) 9 m.

3) **(PUC)** Uma bicicleta saiu de um ponto que estava a 8 metros a leste de um hidrante, andou 6 metros na direção norte e parou.

Assim, a distância entre a bicicleta e o hidrante passou a ser:

a) 8 metros
b) 10 metros
c) 12 metros
d) 14 metros
e) 16 metros

4) Duas rodovias retilíneas A e B se cruzam formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia A, a 4 km do cruzamento. Determine a distância do posto de gasolina à rodovia B.

5) O maior lado de um triângulo retângulo, de perímetro 90 cm, mede 39 cm. Determine as medidas dos outros lados.

6) A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 7,2 cm e o menor segmento que ela determina sobre a hipotenusa mede 5,4 cm. Determine o perímetro desse triângulo.

7) **(PUC)** A hipotenusa de um triângulo retângulo vale 20 cm, e o perímetro ...

8) **(PUC)** A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 17 cm. A diferença entre os comprimentos dos outros dois lados é de 7 cm. Qual o perímetro do triângulo?

9) **(PUC)** Considere um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c. Sejam m e n as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Então a soma $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ é igual a:

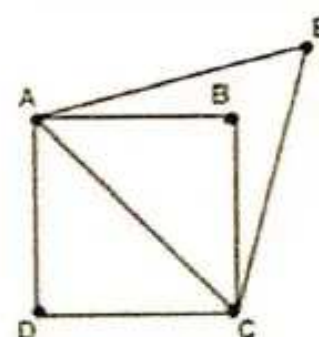
a) $\frac{1}{a}$
b) $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
c) $\frac{1}{b+c}$
d) $\frac{a^3}{b^2+c^2}$
e) $\frac{a^3}{b^2c^2}$

10) Determine a medida da diagonal de um quadrado de perímetro 20 cm.

11) **(PUC)** A altura de um triângulo equilátero de lado a 4 cm é:

a) 4 cm
b) 2 cm
c) 1 cm
d) $4\sqrt{3}$ cm
e) $2\sqrt{3}$ cm

12) Um quadrado, cuja diagonal mede $6\sqrt{6}$ cm, é isoperímetro de um triângulo equilátero. Determine a altura desse triângulo.

13) **(UERJ)** Na figura, o triângulo AEC é equilátero e ABCD é um quadrado de lado 2 cm. Calcule a distância BE.

14) Determine a altura de um triângulo isósceles em que dois lados medem 4 cm e 10 cm.

15) Um cliente foi a uma loja interessado na compra de um monitor para seu computador. Porém, estava preocupado que ele não coubesse em sua estante. Assim, de posse de uma fita métrica, verificou que suas dimensões eram 24 cm de altura por 45 cm de comprimento. Quando chegou à casa constatou que as medidas eram perfeitas para o espaço disponível. Sua esposa perguntou: "Quantas polegadas tem esse monitor?" Ele havia esquecido esse detalhe e não fez essa pergunta ao vendedor que o atendeu. Felizmente, havia aprendido em sua escola que 1 polegada equivalia a aproximadamente 2,54 cm e que o número de polegadas de uma televisão é igual ao número de polegadas da diagonal de sua tela. Com essas informações ele determinou o número aproximado de polegadas do monitor. Que número ele deve ter encontrado?

16) **(ENEM)** Diariamente, uma residência consome 20.160 ...

...metro vale 48 cm. A medida da maior altura do triângulo, em centímetros, é:

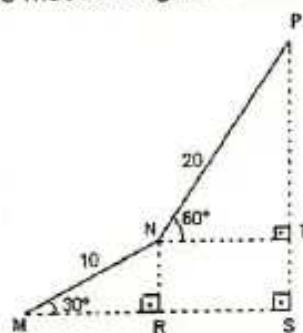
a) 4,8
b) 9,6
c) 12
d) 16
e) 19,2

...Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

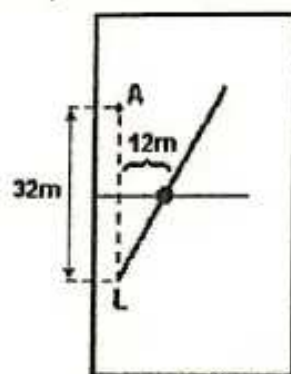
Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

a) Retirar 16 células.
b) Retirar 40 células.
c) Acrescentar 5 células.
d) Acrescentar 20 células.
e) Acrescentar 40 células.

17) **(PUC)** Um balão está no solo a 10 m de distância de um observador. O observador começa a andar em direção ao balão com velocidade de 2 m/s no exato instante em que o balão começa a subir com velocidade de 1 m/s. Determine a distância d, em metros, entre o observador e o balão após t segundos em que o balão começou a subir.

18) Ao se tentar fixar as extremidades de um pedaço de arame reto, de 30 m de comprimento, entre os pontos M e P de um plano, o arame, por ser maior do que o esperado, entortou, como mostra a figura abaixo.

A partir desses dados, determine

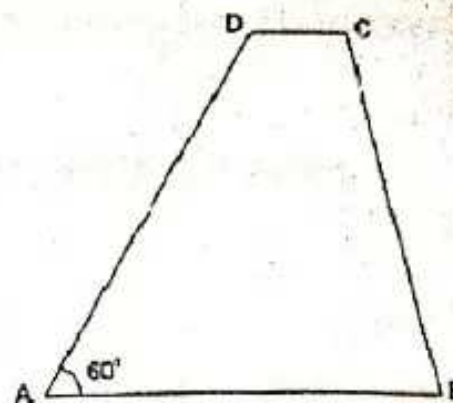
a) o comprimento dos segmentos MS e SP;
b) quanto o arame deveria medir para que tivesse o mesmo tamanho do segmento MP.

19) **(FUVEST)** Um lateral L faz um lançamento para um atacante A, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante.

Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola, será de:

a) 18,8m
b) 19,2 m
c) 19,6 m
d) 20 m
e) 20,4 m

20) Determine a medida do segmento AD, da figura abaixo, sabendo que BC = 5 cm.

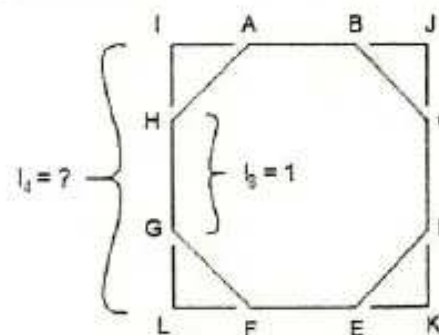
A

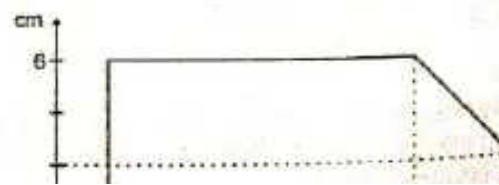
21) Na figura abaixo, o trapézio ABCD tem altura $2\sqrt{3}$ e bases AB = 4 e DC = 1. Determine a medida do lado BC.

22) Determine a altura de um trapézio de bases 6 cm e 21 cm, sabendo-se que seus lados oblíquos medem 9 cm e 12 cm.

23) As perpendiculares DM e CN, baixadas dos vértices da base menor de um trapézio ABCD sobre a base maior, dividem-na nos segmentos AM, MN e NB que, nessa ordem, têm medidas expressas por múltiplos consecutivos de 4. Determine a medida da base maior, sabendo-se que as contrabases medem 30 e 26.

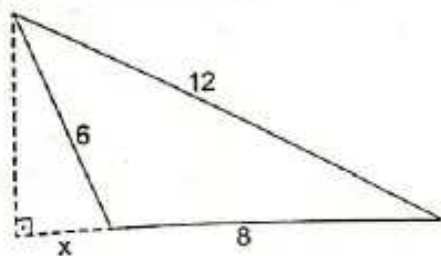
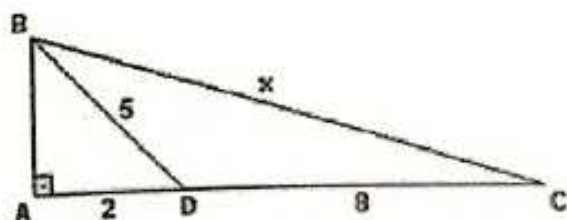
24) Em um losango de perímetro 48 cm, um dos ângulos internos equivale ao dobro do outro. Determine as medidas das diagonais desse losango.

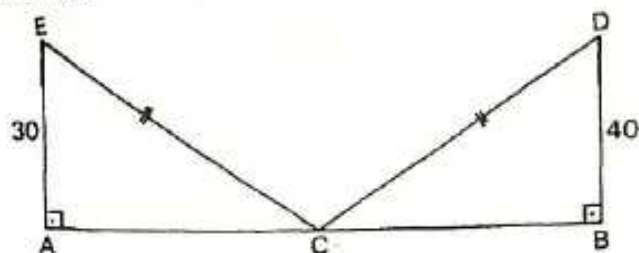
25) Determine o perímetro e a altura de um losango cujas diagonais medem 18 cm e 24 cm.

26) **(PUC)** A figura mostra um octógono regular de lado $\overline{GH} = l_8 = 1$. Prolongamos os lados AB, CD, EF e GH para obter o quadrado IJKL. Quanto mede o lado $\overline{IL} = l_4$?

a) 2
b) $1+\sqrt{2}$
c) $1-\sqrt{2}$
d) $\frac{12}{5}$
e) 3

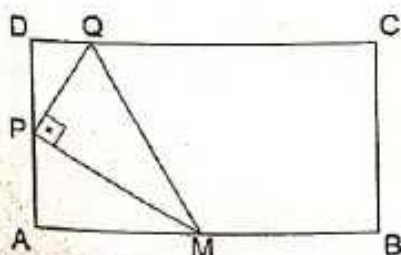
27) **(ENEM)** Um construtor pretende murar um terreno e, para isso, precisa calcular o seu perímetro. O terreno está representado no plano cartesiano, conforme a figura, no qual foi usada a escala 1 : 500. Use 2,8 como aproximação para $\sqrt{8}$.

De acordo com essas informações, o perímetro do terreno, em metros, é

a) 110.
b) 120.
c) 124.
d) 130
e) 144.

28) Determine o valor de x na figura abaixo.

29) **(ENEM)** Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A. Sabendo-se que AD = 2, CD = 8 e BD = 5, a medida do lado BC é

a) 11.
b) 12.
c) 13.
d) 14.
e) 15.

30) **(PUC)** Na figura, sabendo que AE = 30 m, BD = 40 m, AB = 50 m, EC = CD, então AC e CB medem, respectivamente:

a) 25 m e 25 m
b) 32 m e 18 m
c) 38 m e 12 m
d) 40 m e 10 m
e) 42 m e 8 m

31) O triângulo retângulo MPQ está inscrito num retângulo, como mostra a figura abaixo.

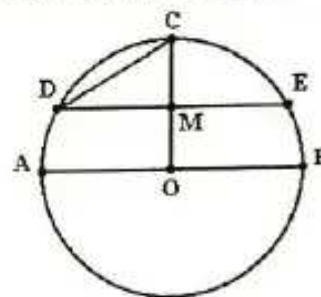
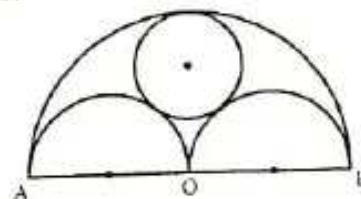
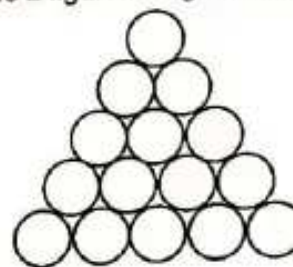
Sabe-se que: med(AP)<med(PD), med(AD) = 4 cm, med(AM) = med(MB) = 3 cm e med(CQ) = 5 cm. Então, a altura do triângulo MPQ relativa à hipotenusa, mede, em centímetros

32) Determine o raio do círculo inscrito em um trapézio isósceles cujas bases medem 2 cm e 32 cm.

33) Determine a soma das medidas dos raios dos círculos inscrito e circunscrito a um triângulo de lados 9 cm, 40 cm e 41 cm.

34) Os centros de duas circunferências, de raios 3 cm e 15 cm, distam 20 cm. Determine as medidas dos segmentos das tangentes comuns interna e externa compreendidos entre os pontos de tangência.

35) As rodas de uma bicicleta, de modelo antigo, têm diâmetros de 110 cm e 30 cm e seus centros distam 202 cm. Determine a distância entre os pontos de contato das rodas com o chão.

36) Em um triângulo ABC, retângulo em A, inscreve-se um círculo que tangencia o lado AB em T. Determine o perímetro desse triângulo, sabendo que AT = 4 cm e TB = 36 cm.

37) Na figura abaixo, sabe-se que: AB é o diâmetro da circunferência de centro O e raio 12, o segmento OC é perpendicular ao segmento AB, o segmento DE é paralelo ao segmento AB e M é ponto médio do segmento OC. Determine a medida do segmento DC.

38) Na figura abaixo, determine o raio do círculo tangente aos semicírculos de diâmetros AB, AO e OB, sabendo que AO = OB = 6.

39) Quinze toras de madeira de 1,5 m de diâmetro são empilhadas segundo a figura a seguir. Calcule a altura da pilha.

40) Na figura abaixo, PB = 5 cm é tangente à circunferência e PA = 1 cm é perpendicular a PB. Determine a medida do raio do círculo.

a) $\sqrt{2}$.
b) $\sqrt{5}$.
c) $\sqrt{10}$.
d) $3\sqrt{2}$.
e) $\sqrt{20}$.

41) Determine a medida do raio do círculo da figura abaixo, em que MNPQ é um quadrado de lado 2 cm e T é o ponto médio do lado MN.

42) Em um triângulo retângulo, as medianas não relativas à hipotenusa medem 10 cm e $\sqrt{70}$ cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

43) Duas placas metálicas, com os comprimentos indicados, são soldadas formando um ângulo reto, como mostra a figura a seguir.

Uma formiga, situada inicialmente no vértice A, move-se ao longo das placas, em direção ao vértice B, seguindo o caminho de menor comprimento. Calcule, em centímetros, o comprimento desse caminho.

44) **(FUVEST)** No quadrilátero ABCD da figura a seguir, E é um ponto sobre o lado AD tal que o ângulo ABE mede 60° e os ângulos EBC e BCD são retos. Sabe-se ainda que AB = CD = $\sqrt{3}$ e BC = 1.

Determine a medida de AD.

45) **(UERJ)** Para construir a pipa representada na figura abaixo pelo quadrilátero ABCD, foram utilizadas duas varetas, linha e papel.

As varetas estão representadas pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. A linha utilizada liga as extremidades A, B, C e D das varetas, e o papel reveste a área total da pipa.

Os segmentos ...

46) **(UERJ)** Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, AMN e BMN, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base MN possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura:

Considere as seguintes medidas: AM = AN = BM = BN = 4 dm; MN = x dm; AB = y dm.

O valor, em decímetros, de y em função de x corresponde a:

a) $\sqrt{16-4x^2}$

b) $\sqrt{64-x^2}$

c) $\dfrac{\sqrt{16-4x^2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{64-2x^2}}{2}$

47) **(UERJ)** Um ciclista pedala uma bicicleta em trajetória circular de modo que as direções dos deslocamentos das rodas mantêm sempre um ângulo de 60°. O diâmetro da roda traseira dessa bicicleta é igual à metade do diâmetro de sua roda dianteira.

O esquema a seguir mostra a bicicleta vista de cima em um dado instante do percurso.

Admita que, para uma volta completa da bicicleta, N_1 é o número de voltas dadas pela roda traseira e N_2 o número de voltas dadas pela roda dianteira em torno de seus respectivos eixos de rotação.

A razão $\dfrac{N_1}{N_2}$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

48) **(UERJ)** Na figura a seguir, estão representados o triângulo retângulo ABC e os retângulos semelhantes I, II e III, de alturas h_1, h_2 e h_3 respectivamente proporcionais às bases $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

... $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares em E, e os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são retos.

Se os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ medem, respectivamente, 18 cm e 32 cm, determine o comprimento total da linha, representada por $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$.

41) Determine a medida do raio do círculo da figura abaixo, em que MNPQ é um quadrado de lado 2 cm e T é o ponto médio do lado MN.

42) Em um triângulo retângulo, as medianas não relativas à hipotenusa medem 10 cm e $\sqrt{70}$ cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

43) Duas placas metálicas, com os comprimentos indicados, são soldadas formando um ângulo reto, como mostra a figura a seguir.

Uma formiga, situada inicialmente no vértice A, move-se ao longo das placas, em direção ao vértice B, seguindo o caminho de menor comprimento. Calcule, em centímetros, o comprimento desse caminho.

44) **(FUVEST)** No quadrilátero ABCD da figura a seguir, E é um ponto sobre o lado AD tal que o ângulo ABE mede 60° e os ângulos EBC e BCD são retos. Sabe-se ainda que $AB = CD = \sqrt{3}$ e $BC = 1$.

Determine a medida de AD.

45) **(UERJ)** Para construir a pipa representada na figura abaixo pelo quadrilátero ABCD, foram utilizadas duas varetas, linha e papel.

As varetas estão representadas pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. A linha utilizada liga as extremidades A, B, C e D das varetas, e o papel reveste a área total da pipa.

Os segmentos ...

46) **(UERJ)** Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, AMN e BMN, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base MN possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura:

Considere as seguintes medidas: AM = AN = BM = BN = 4 dm; MN = x dm; AB = y dm.

O valor, em decímetros, de y em função de x corresponde a:

a) $\sqrt{16 - 4x^2}$

b) $\sqrt{64 - x^2}$

c) $\dfrac{\sqrt{16 - 4x^2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{64 - 2x^2}}{2}$

47) **(UERJ)** Um ciclista pedala uma bicicleta em trajetória circular de modo que as direções dos deslocamentos das rodas mantêm sempre um ângulo de 60°. O diâmetro da roda traseira dessa bicicleta é igual à metade do diâmetro de sua roda dianteira.

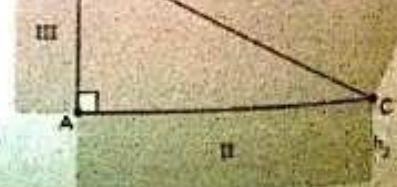
O esquema a seguir mostra a bicicleta vista de cima em um dado instante do percurso.

Admita que, para uma volta completa da bicicleta, N_1 é o número de voltas dadas pela roda traseira e N_2 o número de voltas dadas pela roda dianteira em torno de seus respectivos eixos de rotação.

A razão $\dfrac{N_1}{N_2}$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

48) **(UERJ)** Na figura a seguir, estão representados o triângulo retângulo ABC e os retângulos semelhantes I, II e III, de alturas h_1, h_2 e h_3 respectivamente proporcionais às bases $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

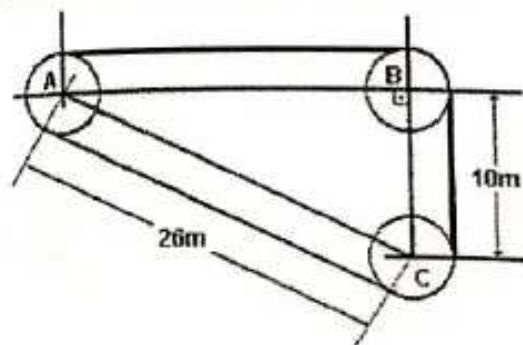
Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, são perpendiculares em E, e os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são retos.

Se os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ medem, respectivamente, 18 cm e 32 cm, determine o comprimento total da linha, representada por $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$.

Se $\overline{AC} = 4m$ e $\overline{AB} = 3m$, a razão $\dfrac{4h_2 + 3h_3}{h_1}$ é igual a:

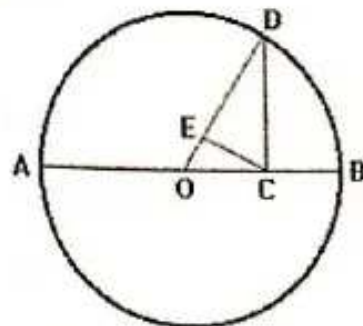
a) 5
b) 4
c) 3
d) 2

49) Em um círculo de raio 2 cm, está inscrito um quadrilátero convexo ABCD. Sabendo que AB = $\sqrt{7}$ cm, AD = 1 cm e CD = 3 cm, determine a medida do lado BC.

50) **(PUC)** Um ponto P, interior a um retângulo ABCD, é tal que AP = 4 cm, BP = 5 cm e CP = 6 cm. Determine a medida de DP.

51) Uma correia esticada passa em torno de três discos de 5 m de diâmetro, conforme a figura a seguir.

Os pontos A, B e C representam os centros dos discos. A distância AC mede 26 m e a distância BC mede 10 m. O comprimento da correia é

a) 60 m.
b) $(60 + 5\pi)$ m.
c) 65 m.
d) $(60 + 10\pi)$ m.
e) 65π m.

52) **(FUVEST)** Na figura a seguir, AC = a e BC = b, O é centro da circunferência, CD é perpendicular a AB e CE é perpendicular a OD.

a) Mostre que ED é a média harmônica entre a e b.

b) Mostre que $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > ED$.

53) **(ENEM)** Uma pessoa possui um espaço retangular de lados 11,5 m e 14 m no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhadas paralelamente ao lado de maior extensão.

O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é

Gabarito

1)
a) 24
b) 16
c) $\dfrac{120}{17}$
d) 6
e) 4
f) 26
g) 8
h) 4,8

2) c
3) b
4) $2\sqrt{2}$ km
5) 15 cm e 36 cm
6) 36 cm
7) d
8) 40 cm
9) e
10) $5\sqrt{2}$ cm
11) e
12) 12 cm
13) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$cm
14) $4\sqrt{6}$ cm
15) 20 pol
16) a
17) $d = \sqrt{5t^2 - 40t + 100}$
18)
a) $MS = 5(\sqrt{3} + 2)m$
$SP = 5(2\sqrt{3} + 1)m$
b) $MP = 10\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\ m$

19) b
20) $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$cm
21) $\sqrt{13}$
22) 7,2 cm
23) 42
24) 12 cm e $12\sqrt{3}$ cm
25) 60 cm e 14,4 cm
26) b
27) c
28) 2,75
29) a
30) b
31) b
32) 4 cm
33) 24,5 cm
34) $2\sqrt{19}$cm e 16 cm
35) a
36) 90 cm
37) e
38) 2
39) $\dfrac{3(2\sqrt{3}+1)}{2}$m
40) 13 cm
41) 1,25 cm
42) $2\sqrt{34}$ cm
43) 65 cm
44) $\sqrt{7}$
45) 140 cm
46) b
47) a
48) a
49) $\sqrt{15}$cm
50) $3\sqrt{3}$cm
51) b
52) Demonstrações
53) c

Anotações

a) 4.
b) 8.
c) 9.
d) 12.
e) 20.

Capítulo IX

RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER

Introdução

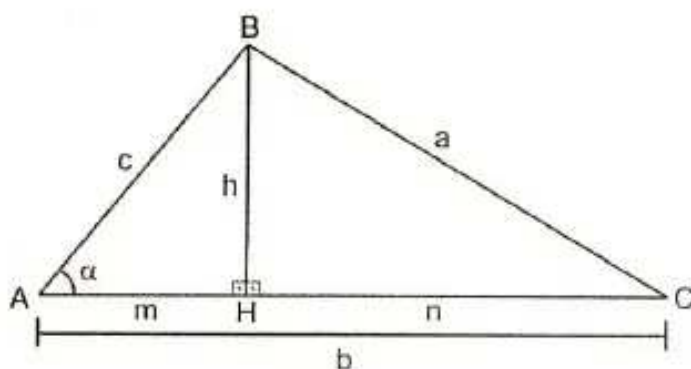
Já estudamos em capítulo anterior as relações métricas no triângulo retângulo. Neste capítulo vamos analisar as relações em triângulos não retângulos.

Lei dos Co-senos

"Em todo triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o duplo produto destes dois pelo co-seno do ângulo oposto ao primeiro lado."

Demonstração: Considere o triângulo ABC da figura de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, no qual destacamos o ângulo $\hat{\alpha}$. Tracemos a altura $\overline{BH} = h$ que divide o lado $\overline{AC}$ nos segmentos $\overline{AH} = m$ e $\overline{HC} = n$.

Apliquemos o Teorema de Pitágoras no triângulo AHB:

$$c^2 = h^2 + m^2$$
$$h^2 = c^2 - m^2 \quad (I)$$

É sabido que, em um triângulo retângulo, o co-seno de um ângulo agudo é igual ao comprimento do cateto adjacente ao ângulo, dividido pelo comprimento da hipotenusa. Assim no triângulo AHB temos que:

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{m}{c}$$
$$m = c \cdot \cos \hat{\alpha} \quad (II)$$

No triângulo BHC, aplicando-se o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = n^2 + h^2$$

Como m + n = b, temos que n = b – m, e daí:

$$a^2 = (b - m)^2 + h^2$$
$$a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot m + m^2 + h^2 \qquad (III)$$

Substituindo-se (I) em (III):

$$a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot m + m^2 + c^2 - m^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot m \qquad (IV)$$

Substituindo-se (II) em (IV):

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\alpha}} \qquad \text{c.q.d}$$

1. O triângulo é acutângulo

Neste caso $0° < \hat{\alpha} < 90°$, logo $\cos \hat{\alpha} > 0$ e o termo $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\alpha}$ é negativo, então:

$$\mathbf{a^2 < b^2 + c^2}$$

2. O triângulo é retângulo

Temos $\hat{\alpha} = 90°$, e como $\cos \hat{\alpha} = \cos 90° = 0$, o termo $2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\alpha}$ é nulo, logo:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

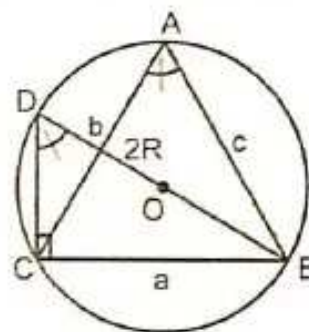
3. O triângulo é obtusângulo

Como neste caso $90° < \hat{\alpha} < 180°$, $\cos \hat{\alpha} < 0$ e o termo $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\alpha}$ é positivo, vem que:

$$\mathbf{a^2 > b^2 + c^2}$$

Lei dos Senos

"Em todo triângulo, a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo."

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, inscrito em um círculo de raio R.

Tracemos o diâmetro que passa pelo vértice B e tem a outra extremidade em D. Em seguida liguemos D a C. O triângulo BCD é retângulo em C. O ângulo $\hat{D}$ é inscrito e congruente ao ângulo $\hat{A}$, logo:

$$\text{sen}\hat{A} = \text{sen}\hat{D} = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = 2R$$

Analogamente, podemos mostrar que $\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = 2R$ e $\frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2R$. Daí, temos a lei dos senos:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen}\ \hat{\mathbf{A}}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen}\ \hat{\mathbf{B}}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen}\ \hat{\mathbf{C}}} = \mathbf{2R} \quad \text{(c.q.d.)}$$

O quadro abaio pode ser útil na resolução dos exercícios deste capítulo.

	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
sen	1 [illegible]	$\sqrt{2}$ [illegible]	$\sqrt{3}$ [illegible]	1	$\sqrt{3}$ [illegible]	$\sqrt{2}$ [illegible]	1 [illegible]

Corolário: Uma consequência da lei dos co-senos é a **SÍNTESE DE CLAIRAUT**, que serve para classificar um triângulo quanto aos ângulos, dados os lados. Sendo $\hat{\alpha}$ o maior ângulo de um triângulo, **a** o lado oposto a este ângulo e **b** e **c** os outros lados, temos três casos a considerar:

sen	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemplos:

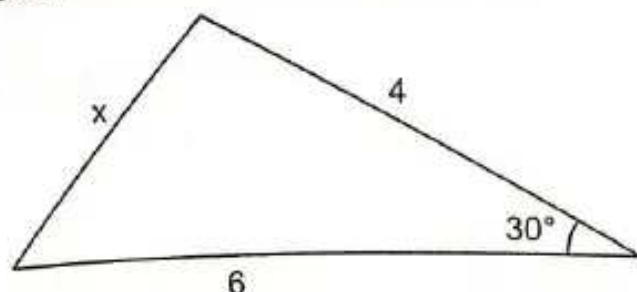
1) Classifique o triângulo de lados 5, 9 e 8 quanto aos ângulos.

Solução:
Pela síntese de Clairaut, devemos elevar o maior lado ao quadrado e compará-lo à soma dos quadrados dos outros dois:

$9^2 = 81$

$5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

Como: $9^2 < 5^2 + 8^2$, o triângulo é acutângulo.

2) Determine o valor de x na figura abaixo:

Solução:
Aplicando a lei dos cossenos:

$x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 . 4 . 6 . \cos 30°$

$x^2 = 16 + 36 - 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 = 52 - 24\sqrt{3}$

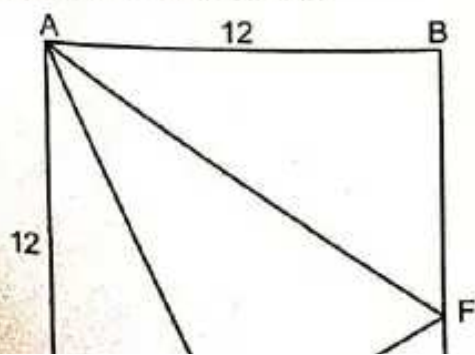
$x = \sqrt{52 - 24\sqrt{3}}$

$x = \sqrt{4 . (13 - 6\sqrt{3})}$

$x = 2\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$

Exercícios

1) Classifique, quanto aos ângulos e quanto aos lados, os triângulos de lados:
   a) 4, 5 e 6
   b) 5, 5 e 8
   c) 9, 41 e 40

2) **(FUVEST)** No quadrado ABCD de lado 12, da figura abaixo, temos que: AE = 13 e CF = 3.

3) Considerando os números inteiros a e b, tais que $a > b > 0$, classifique quanto aos ângulos o triângulo de lados $2ab$, $a^2 + b^2$ e $a^2 - b^2$.

4) **(PUC)** Determine a quantidade de valores inteiros de x, para os quais existe um triângulo acutângulo de lados 10, 24 e x.

5) Em um triângulo ABC, as medidas dos ângulos internos, em graus, nos vértices A, B e C formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Determine a medida do lado AC, sabendo que AB = 8 cm e BC = 6 cm.

6) **(PUC)** No triângulo ABC, o ângulo Â vale 60°, o lado oposto mede 7 cm e um dos lados adjacentes mede 3 cm. O outro lado do triângulo mede:
   a) 5 cm
   b) 6 cm
   c) 7 cm
   d) 8 cm
   e) 10 cm

7) Em um triângulo ABC, os ângulos internos nos vértices A e B medem, respectivamente, 120° e 15°. Determine a medida do lado BC, sabendo que AB = 12 cm.

8) Em um triângulo ABC, AB = 4 cm, AC = $2\sqrt{6}$ cm e o ângulo interno no vértice B mede 60°. Determine a medida do ângulo Â desse triângulo.

9) Em um círculo, inscreve-se um triângulo ABC, em que Â= 150° e BC = 6 cm. Determine a medida do raio desse círculo.

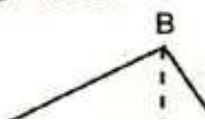
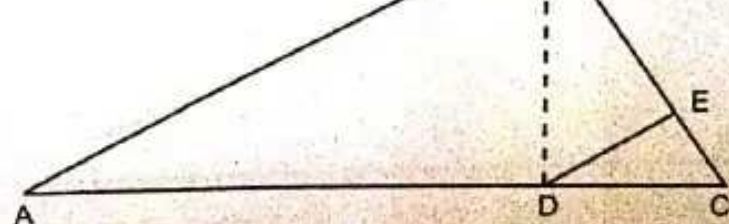
10) Quanto vale a soma dos senos dos ângulos internos de um triângulo cujos lados medem 8 cm, 15 cm e 17 cm.

11) **(FUVEST)** Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O cosseno do maior ângulo de T é:
   a) 5/6
   b) 4/5
   c) 3/4
   d) 2/3
   e) 1/8

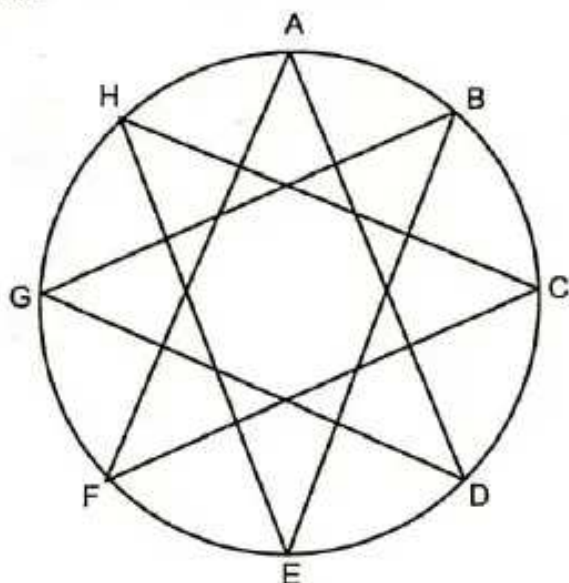
12) Determine a medida da menor diagonal de um losango em que um ângulo é o quíntuplo do outro e cujo perímetro vale 24 cm.

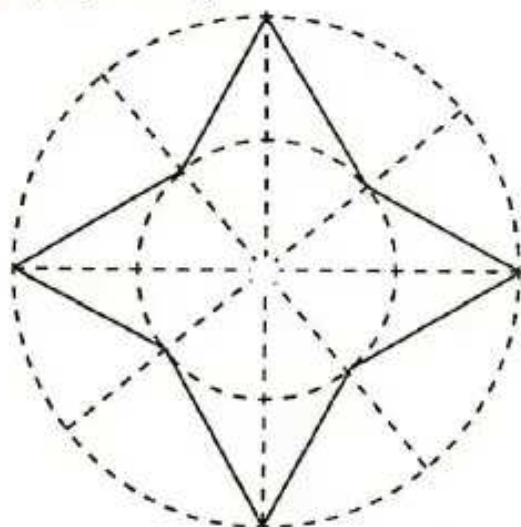
13) A menor diagonal de um paralelogramo, cujos lados medem 4 e 5, mede $\sqrt{31}$. Determine a medida da maior diagonal desse quadrilátero.

14) Determine a medida da diagonal de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo, cujas bases medem 5 cm e 15 cm.

15) O triângulo ABC, da figura a seguir, tem ângulo reto em B. O segmento BD é a altura relativa a AC. Os segmentos AD e DC medem 12 cm e 4 cm, respectivamente. O ponto E pertence ao lado BC e BC = 4 EC.

O ângulo AÊF é agudo, reto ou obtuso? Justifique sua resposta.

Determine o comprimento do segmento DE.

16) Determine o perímetro de um dodecágono regular inscrito em um círculo de raio 6 cm.

17) Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H dividem uma circunferência de raio R, em oito partes iguais, conforme a figura abaixo.

Calcule a medida do lado AD do octógono estrelado em função de R.

18) No centro de uma praça deve ser pintada uma linha com o formato de um polígono equilátero, não convexo, como mostra o projeto a seguir.

Se os vértices pertencem a circunferências de raios 4 m e 2 m, respectivamente, o comprimento total da linha a ser pintada, em metros, é igual a:

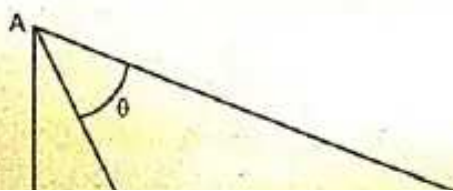
a) $5 - \sqrt{2}$

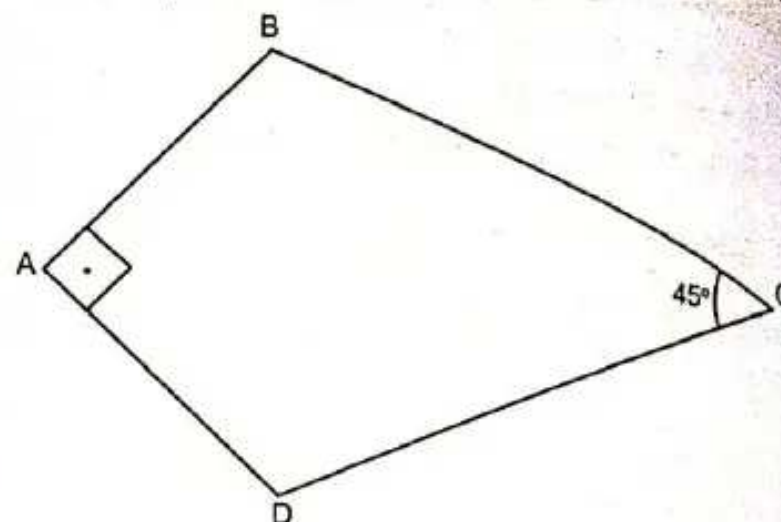
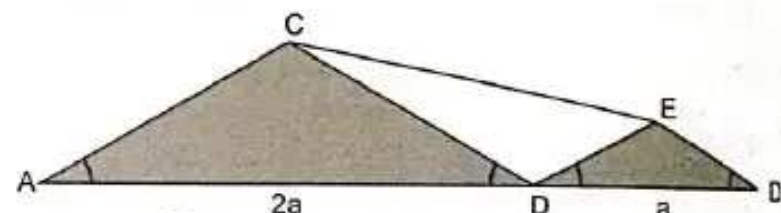
b) $8\sqrt{5-\sqrt{2}}$

c) $16\sqrt{5-\sqrt{2}}$

d) $4\sqrt{5-2\sqrt{2}}$

e) $16\sqrt{5-2\sqrt{2}}$

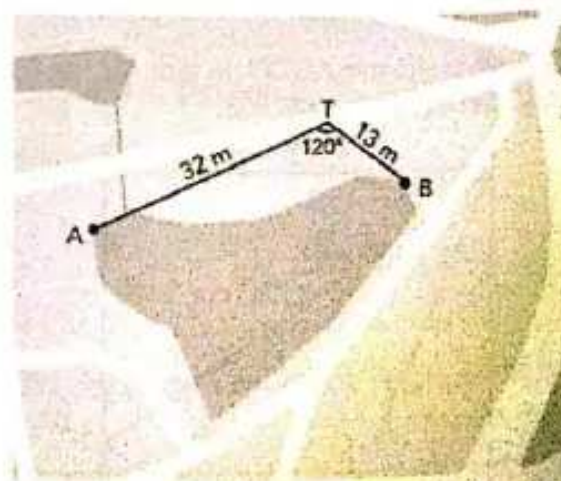
19) **(UNICAMP)** Considere o triângulo retângulo ABD exibido na figura abaixo, em que AB = 2 cm, BC = 1 cm e CD = 5 cm. Então, o ângulo θ é igual a

a) 15°.
b) 30°.
c) 45°.
d) 60°.

20) **(UNICAMP)** A figura abaixo exibe um quadrilátero ABCD, onde AB = AD e BC = CD = 2 cm. Determine o perímetro desse quadrilátero.

21) **(UNICAMP)** Na figura a seguir, ABC e BDE são triângulos isósceles semelhantes de bases 2a e a, respectivamente, e o ângulo CÂB = 30°. Portanto, o comprimento do segmento CE é:

a) $a\sqrt{\frac{5}{3}}$.

b) $a\sqrt{\frac{8}{3}}$.

c) $a\sqrt{\frac{7}{3}}$.

d) $a\sqrt{2}$.

22) **(UERJ)** Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas AT = 32 m; BT = 13 m e $A\hat{T}B = 120°$, representadas no esquema abaixo.

Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B.

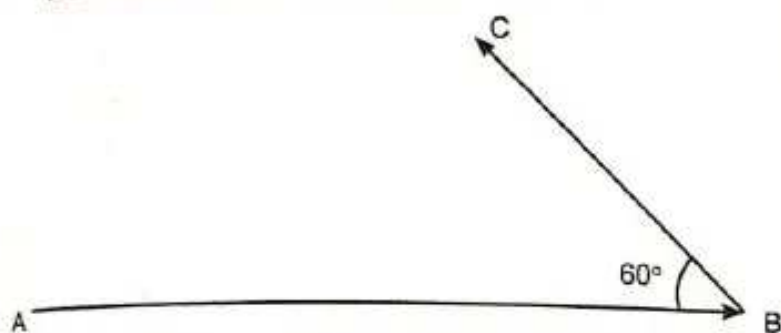
definidos pelo técnico nas margens desse lago.

168

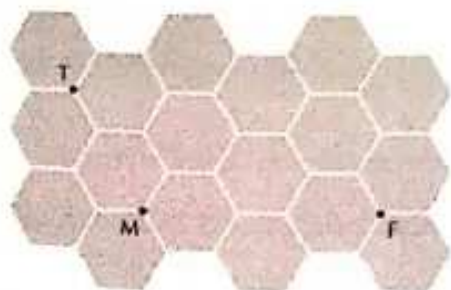
23) **(UNICAMP)** A água utilizada, utilizada na casa de um sítio, é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções caixa d'água-bomba e caixa d'água-casa é de 60°. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento, no mínimo, serão necessários?

24) **(UERJ)** Duas partículas, X e Y, em movimento retilíneo uniforme, têm velocidades respectivamente iguais a 0,2 km/s e 0,1 km/s.

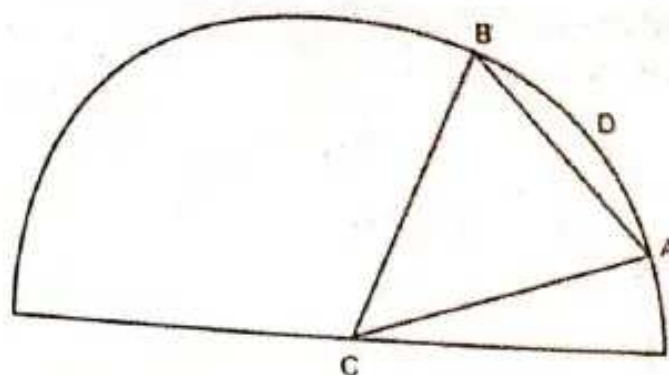
Em certo instante t_1, X está na posição A e Y na posição B, sendo a distância entre ambas de 10 km.

As direções e os sentidos dos movimentos das partículas são indicadas pelos segmentos orientados e o ângulo ABC mede 60, conforme o esquema abaixo.

Sabendo-se que a distância mínima entre X e Y vai ocorrer em um instante t_2, o valor inteiro mais próximo de $t_2 - t_1$, em segundos, equivale a:

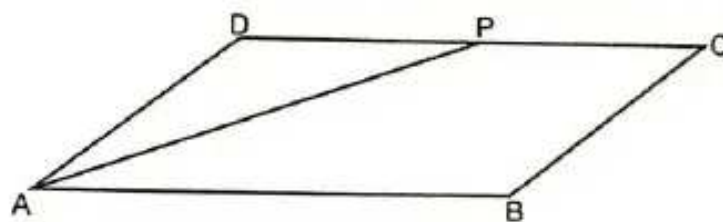
a) 24
b) 36
c) 50
d) 72

25) **(UERJ)** Um piso plano é revestido de hexágonos regulares congruentes cujo lado mede 10 cm. Na ilustração de parte desse piso, T, M e F são vértices comuns a três hexágonos e representam os pontos nos quais se encontram, respectivamente, um torrão de açúcar, uma mosca e uma formiga.

Ao perceber o açúcar, os dois insetos partem no mesmo instante com velocidades constantes, para alcançá-lo. Admita que a mosca leve 10 segundos para atingir o ponto T. Despreze o espaçamento entre os hexágonos e as dimensões dos animais. A menor velocidade, em centímetros por segundo, necessária para que a formiga chegue no ponto T no mesmo instante em que a mosca é igual a:

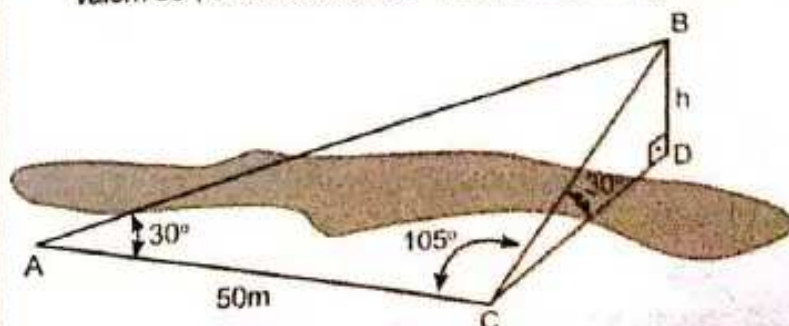
a) 3,5
b) 5,0
c) 5,5
d) 7,0

26) **(FUVEST)** Em uma semicircunferência de centro C e raio R, inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Seja D o

O comprimento da corda AD é:

a) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
b) $R\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3}}$
c) $R\sqrt{\sqrt{2}-1}$
d) $R\sqrt{\sqrt{3}-1}$
e) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$

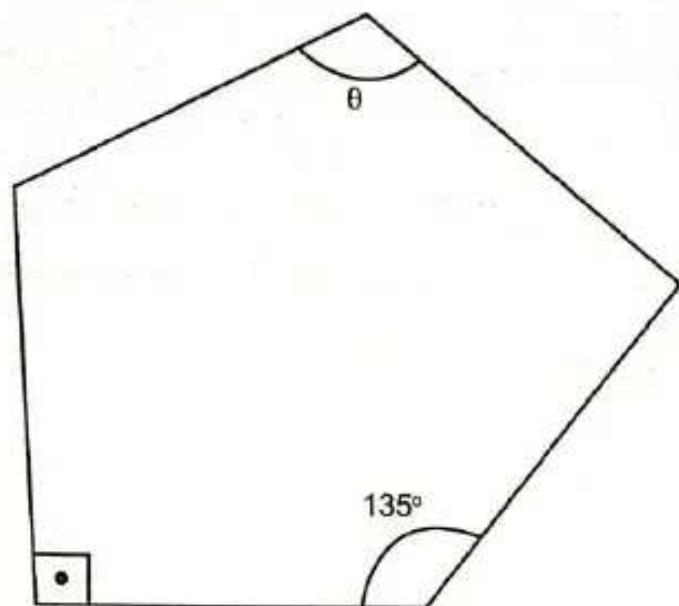
27) **(FUVEST)** No paralelogramo ABCD abaixo, tem-se que AD = 3 e DÂB = 30°. Além disso, sabe-se que o ponto P pertence ao lado DC e à bissetriz do ângulo DÂB.

A medida do segmento AP é igual a:

a) $6\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
b) $\dfrac{2(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}$.
c) $\dfrac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$.
d) $\dfrac{2(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3}$.
e) $\dfrac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$.

28) Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, o ponto B. com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos BÂC e BCD valem 30°, e o ACB vale 105°, como mostra a figura.

ponto onde a bissetriz do ângulo ACB intercepta a circunferência.

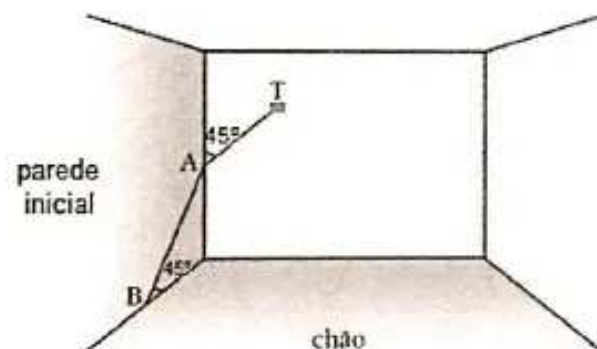
A medida, em metros, de h é igual a:

a) 12,5. b) $12,5\sqrt{2}$. c) 25,0. d) $25,0\sqrt{2}$. e) 35,0.

29) **(UNICAMP)** A figura exibe um pentágono com todos os lados com o mesmo comprimento.

A medida do ângulo θ é igual a

a) 105°.
b) 120°.
c) 135°.
d) 150°.

30) **(UERJ)** Uma sala tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Para levar fios a uma tomada T, um cano foi instalado tangente a duas paredes dessa sala. A primeira parte reta do cano, BA, faz um ângulo de 45° com o chão e a segunda parte, AT, congruente com a primeira, forma um ângulo de 45° com a parede inicial.

Observe a ilustração:

Desprezando a espessura do cano, calcule o ângulo BÂT, formado por suas duas partes.

31) Os ponteiros de um relógio circular medem, do centro às extremidades, 2 metros, o dos minutos, e 1 metro, o das horas. Determine a distância entre as extremidades dos ponteiros quando o relógio marca:

a) 4 h;
b) 2 h 35 min $27\frac{3}{11}$ seg.

Gabarito

1)

a) Acutângulo e escaleno
b) Obtusângulo e isósceles
c) Retângulo e escaleno

7) $6\sqrt{6}$cm
8) 75º
9) 6 cm
10) $\frac{40}{17}$
11) e
12) $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm ou $3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ cm
13) $\sqrt{51}$
14) $5\sqrt{7}$cm
15) $2\sqrt{3}$cm
16) $48\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm ou $24\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ cm
17) $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$
18) e
19) c
20) $\left(4+2\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)$ cm
21) c
22) 40 m
23) 70 m
24) b
25) d
26) a
27) e
28) b
29) b
30) 120º
31)

a) $\sqrt{7}$m
b) $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$m

Anotações

2) Agudo, pois $\overline{AF}^2 < \overline{AE}^2 + \overline{EF}^2$
3) Retângulo
4) 4
5) $2\sqrt{13}$cm
6) d

Capítulo X

POLÍGONOS REGULARES

Introdução

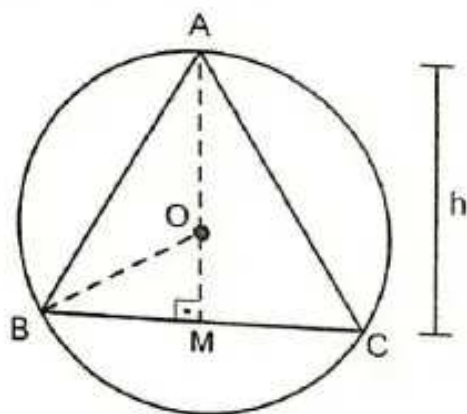
Como vimos anteriormente no capítulo de polígonos, um polígono é regular quando é EQUILÁTERO (lados iguais) e EQUIÂNGULO (ângulos iguais). Neste capítulo vamos estudar os principais polígonos regulares, relacionando-os com os círculos inscrito e circunscrito. Assim, vamos dividir tal análise nos itens que se seguem.

Polígonos Regulares Inscritos

Todos os vértices estão na circunferência.

1. Triângulo equilátero

Antes de iniciarmos as demonstrações das relações acima aludidas, cabe-nos ressaltar o conceito de **raio de um polígono regular**, que é a distância do centro do polígono a qualquer um dos seus vértices, sendo igual ao raio do círculo no qual o polígono é inscrito, e o de **apótema de um polígono regular**, que é a distância do centro do polígono a qualquer um de seus lados, sendo igual ao raio do círculo ao qual o polígono é circunscrito.

Observe que o apótema divide o lado ao meio. A partir de agora chamemos o lado do polígono regular inscrito de ℓ, seu apótema **a**, o lado do polígono regular circunscrito de **L**, seu apótema de **A** e o raio do círculo de **R**.

Na figura acima, temos OB= R, OM= a e BM= $\frac{\ell}{2}$. Como no triângulo retângulo OMB o ângulo $\hat{B}$= 30° e o ângulo $\hat{O}$= 60°, OM e BM são respectivamente catetos opostos a ângulos de 30° e 60°, então:

$\overline{OM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \rightarrow a = \frac{R}{2}$

$\overline{BM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{3} \rightarrow \frac{\ell}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \rightarrow \ell = R\sqrt{3}$

$\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} \rightarrow h = R + \frac{R}{2} \rightarrow h = \frac{3R}{2}$

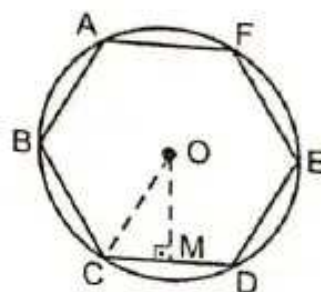
2. Quadrado

No triângulo OMB da figura acima, temos OB = R, OM= a, BM= $\frac{\ell}{2}$, $\hat{B}$= 45° e $\hat{O}$= 45°. Como OM e BM são catetos opostos a ângulos de 45°, vem que:

$\overline{OM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{2} \rightarrow a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

$\overline{BM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{2} \rightarrow \frac{\ell}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \rightarrow \ell = R\sqrt{2}$

$\overline{BD} = 2R \rightarrow d = 2R$

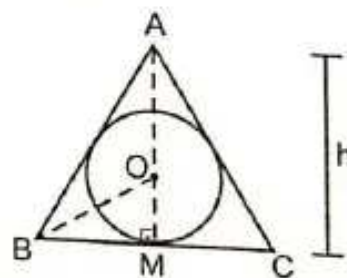
3. Hexágono regular

Devemos lembrar que o ângulo interno de um hexágono regular vale 120°. Então no triângulo OMC temos OC= R, OM= a, CM= $\frac{\ell}{2}$, C= 60° e $\hat{O}$= 30°. Daí, OM e CM são respectivamente catetos opostos a ângulos de 60° e 30°, logo:

$\overline{OM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{3} \rightarrow a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$\overline{CM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \rightarrow \frac{\ell}{2} = \frac{R}{2} \rightarrow \ell = R$

Polígonos Regulares Circunscritos

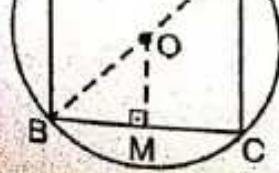
Todos os lados tangenciam a circunferência.

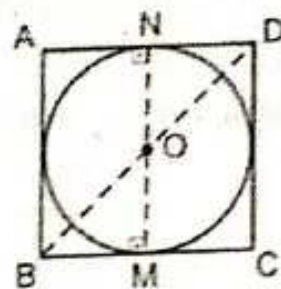
1. Triângulo equilátero

No triângulo OMB, OM = A, BM = L/2, $\hat{B}$= 30° e $\hat{O}$= 60°. Note que:

OM = R, daí **A = R**

Como OM e BM são catetos opostos, respectivamente, a ângulos de 30° e 60°:

$\overline{OM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \rightarrow R = \frac{\overline{OB}}{2} \rightarrow \overline{OB} = 2R$

$\overline{BM} = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{2} \cdot \sqrt{3} \rightarrow \frac{L}{2} = \frac{2R}{2} \cdot \sqrt{3} \rightarrow L = 2R\sqrt{3}$

$H = \overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} = 2R + R \rightarrow$ **H=3R**

2. Quadrado

Na figura, observe que ABMN é um retângulo, logo AB = NM. Como AB = L = NM = 2R, temos que:

$$\mathbf{L = 2R}$$

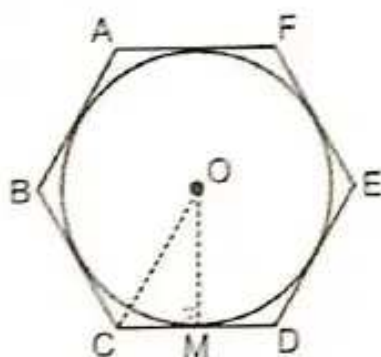
Observemos que OM = A e OM = R, logo:

$$\mathbf{A = R}$$

Como visto no capítulo VIII, calculemos a diagonal **D**:

$$D = L.\sqrt{2}$$

$$\mathbf{D = 2R\sqrt{2}}$$

3. Hexágono regular

No triângulo OMC temos OM = A, CM = L/2, $\hat{C} = 60°$ e $\hat{O} = 30°$. Observe que: OM = R, e daí:

$$\mathbf{A = R}$$

O cateto OM está oposto a 60°, então:

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OC}}{2}.\sqrt{3}$$

$$R = \frac{\overline{OC}}{2}.\sqrt{3}$$

$$\overline{OC} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{OC} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

O cateto CM está oposto a 30°, logo:

$$\overline{CM} = \frac{\overline{OC}}{2}$$

$$\frac{L}{2} = \frac{\frac{2R\sqrt{3}}{3}}{2}$$

$$L = 2R\sqrt{3}$$

Quadros de Resumo

Polígonos regulares inscritos

	ℓ	a	
△	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\rightarrow h = \frac{3R}{2}$
□	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\rightarrow d = 2R$
⬡	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	

Polígonos regulares circunscritos

	L	A	
△	$2R\sqrt{3}$	R	$\rightarrow H = 3R$
□	2R	R	$\rightarrow D = 2R\sqrt{2}$
⬡	$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$	R	

Exercícios

1) Em um círculo de raio 12 cm, determine:

a) o lado do triângulo equilátero inscrito;
b) o apótema do triângulo equilátero inscrito;
c) a altura do triângulo equilátero inscrito;
d) o lado do quadrado inscrito;
e) o apótema do quadrado inscrito;
f) a diagonal do quadrado inscrito;
g) o lado do hexágono regular inscrito;
h) o apótema do hexágono regular inscrito;
i) a maior diagonal do hexágono regular inscrito;
j) a menor diagonal do hexágono regular inscrito;
k) o lado do triângulo equilátero circunscrito;
l) o apótema do triângulo equilátero circunscrito;
m) a altura do triângulo equilátero circunscrito;
n) o lado do quadrado circunscrito;
o) o apótema do quadrado circunscrito;
p) a diagonal do quadrado circunscrito;
q) o lado do hexágono regular circunscrito;
r) o apótema do hexágono regular circunscrito;

2) O ângulo central de um polígono regular é o ângulo obtido quando unimos o seu centro a dois vértices consecutivos. Determine a medida do ângulo central de cada um dos polígonos a seguir.

a) Triângulo equilátero
b) Quadrado
c) Pentágono regular
d) Hexágono regular
e) Octógono regular
f) Decágono regular
g) Dodecágono regular
h) Pentadecágono regular
i) Icoságono regular

3) O lado de um quadrado inscrito em círculo mede $8\sqrt{2}$ cm. Determine a medida do apótema do hexágono inscrito nesse mesmo círculo.

4) A altura de um triângulo equilátero inscrito em um círculo mede 6 cm. Determine o perímetro do quadrado circunscrito a esse círculo.

5) Determine o perímetro de um hexágono regular circunscrito a um círculo cuja circunferência tem 18π cm de comprimento.

6) Um triângulo equilátero e um quadrado estão circunscritos a um mesmo círculo. Sabendo que a soma dos perímetros desses dois polígonos vale $14\left(3\sqrt{3}+4\right)$ cm, determine a medida da diagonal do quadrado inscrito nesse círculo.

7) Em um círculo estão inscritos um triângulo equilátero, cuja altura mede $\frac{17\pi\sqrt{11}}{39}$ cm, e um hexágono regular. Determine a medida do lado do triângulo obtido quando unimos os pontos médios de lados alternados do hexágono.

8) Determine a altura de um trapézio inscrito em um semicírculo, de raio 16 cm, cujas bases são o lado do triângulo equilátero e o lado do quadrado inscritos nesse semicírculo.

9) Determine a altura de um trapézio inscrito em um círculo, de raio 10 cm, cujas bases são o lado do hexágono regular e o lado do triângulo equilátero inscritos nesse círculo.

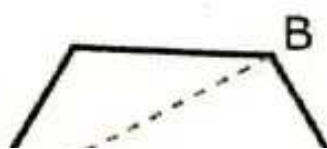
10) Determine a medida da menor diagonal de um octógono regular inscrito em um círculo de raio 16 cm.

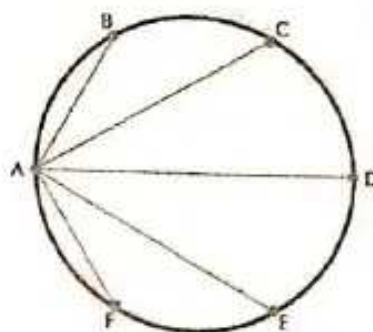
11) A menor diagonal de um dodecágono regular inscrito em um círculo mede 10 cm. Determine a medida da maior diagonal desse polígono.

12) Um artesão dispõe de um arame de comprimento $15\left(3+\sqrt{2}\right)$ cm e vai utilizá-lo integralmente, sem sobras, para construir uma obra de arte composta por três polígonos regulares. Para começar, ele constrói o hexágono regular ABCDEF, depois o quadrado ABGH e, por último, o triângulo equilátero BHI. Determine a medida do lado do primeiro polígono que ele construiu nessa obra.

13) **(PUC)** Qual a razão entre os raios dos círculos circunscrito e inscrito em um triângulo equilátero de lado a?

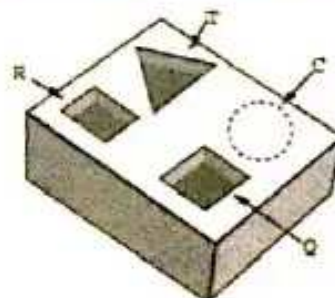
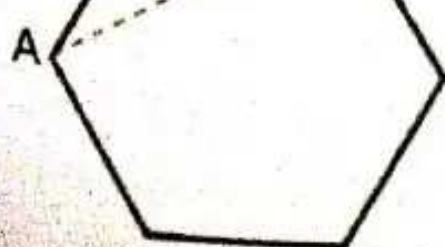
a) 2
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{2}$
d) 3a
e) $\sqrt{3}.a^2$

14) **(PUC)** A figura mostra um hexágono regular de lado a. A diagonal AB mede:

a) 2a
b) $a\sqrt{2}$
c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
d) $a\sqrt{3}$
e) $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

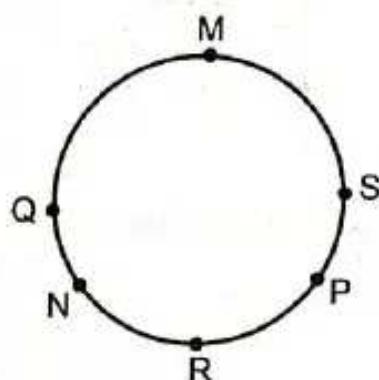
15) **(UERJ)** Um atleta faz seu treinamento de corrida em uma pista circular que tem 400 metros de diâmetro. Nessa pista, há seis cones de marcação indicados pelas letras A, B, C, D, E e F, que dividem a circunferência em seis arcos, cada um medindo 60 graus. Observe o esquema:

O atleta partiu do ponto correspondente ao cone A em direção a cada um dos outros cones, sempre correndo em linha reta e retornando ao cone A. Assim, seu percurso correspondeu a ABACADAEAFA.

Considerando que $\sqrt{3} = 1,7$, o total de metros percorridos pelo atleta nesse treino foi igual a:

a) 1 480
b) 2 960
c) 3 080
d) 3 120

16) **(ENEM)** Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada (Q), de lado 4 cm, uma retangular (R), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (T), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (C). O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm; (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.

Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente. Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

17) Na figura abaixo, os pontos M, N e P são vértices de um triângulo equilátero e os pontos M, Q, R e S são vértices de um quadrado.

QN corresponde ao lado do

a) hexágono regular;
b) octógono regular;
c) eneágono regular;
d) decágono regular;
e) dodecágono regular.

18) **(ITA)** Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio R e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre essas arestas paralelas será

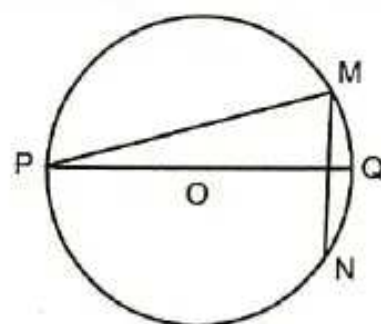
a) $\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})R}{2}$

b) $\frac{(\sqrt{2}+1)R}{2}$

c) $\frac{(\sqrt{3}+1)R}{2}$

d) $\frac{(\sqrt{2}-1)R}{2}$

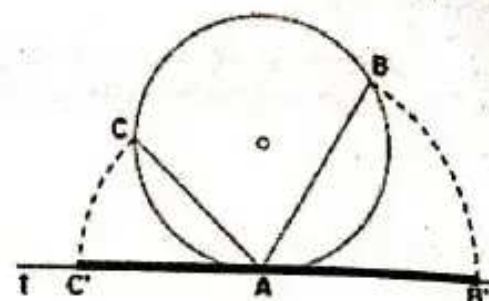
e) $\frac{(\sqrt{3}-1)R}{2}$

19) A figura a seguir representa uma circunferência de centro O e diâmetro $PQ = 4\sqrt{3}$ cm. Se MN é o lado do hexágono regular inscrito na circunferência e MN é perpendicular a PQ, a medida do segmento PM, em cm, é:

a) $2\sqrt{3(2+\sqrt{3})}$

b) $2\sqrt{3(2-\sqrt{3})}$

c) $\sqrt{\sqrt{3}(12-\sqrt{3})}$

d) $\sqrt{\sqrt{3}(12+\sqrt{3})}$

20) **(UERJ)** Na figura, AB e AC são, respectivamente, lados do triângulo equilátero e do quadrado inscritos na circunferência de raio R. Com centro em A, traçam-se os arcos BB' e CC', que interceptam a reta t em B' e C'. A medida que está mais próxima do comprimento do segmento B'C' é:

a) o perímetro do quadrado de lado AC.
b) o comprimento da semicircunferência de raio R.
c) o dobro do diâmetro da circunferência de raio R.
d) o semiperímetro do triângulo equilátero de lado AB.

21) Determine a medida da diagonal AD de um decágono regular ABCDEFGHIJ, inscrito em um círculo de raio R.

22) O apótema de um dodecágono regular inscrito em um círculo de raio unitário tem medida

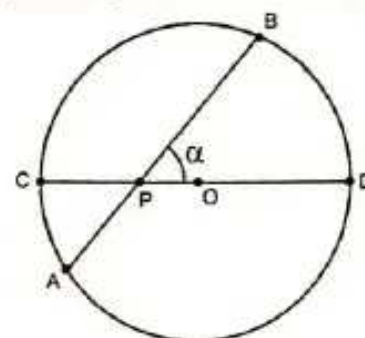
a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

23) Considere que na figura abaixo AP = m e PB = n.

Determine a medida do raio do círculo, em função de m e n, nos casos em que o ângulo mede:

a) 30°
b) 45°
c) 60°

e) $\sqrt{2(12-\sqrt{3})}$

Gabarito

1)
a) $12\sqrt{3}$ cm
b) 6 cm
c) 18 cm
d) $12\sqrt{2}$ cm
e) $6\sqrt{2}$ cm
f) 24 cm
g) 12 cm
h) $6\sqrt{3}$ cm
i) 24 cm
j) $12\sqrt{3}$ cm
k) $24\sqrt{3}$ cm
l) 12 cm
m) 36 cm
n) 24 cm
o) 12 cm
p) $24\sqrt{2}$ cm
q) $8\sqrt{3}$ cm
r) 12 cm

2)
a) 120°
b) 90°
c) 72°
d) 60°
e) 45°
f) 36°
g) 30°
h) 24°
i) 18°

3) $4\sqrt{3}$ cm
4) 32 cm
5) $36\sqrt{3}$ cm
6) $7\sqrt{2}$ cm
7) $\frac{17\pi\sqrt{11}}{39}$ cm
8) $8(\sqrt{2}-1)$ cm
9) $5(\sqrt{3}-1)$cm ou $5(\sqrt{3}+1)$cm
10) $16\sqrt{2}$ cm
11) 20 cm
12) 5 cm
13) a
14) d
15) b
16) b
17) e
18) a
19) a
20) b
21) $\frac{R(\sqrt{5}+1)}{2}$
22) e

23)
a) $\sqrt{\frac{m^2+n^2+mn}{3}}$
b) $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$
c) $\sqrt{m^2+n^2-mn}$

Anotações

Capítulo XI

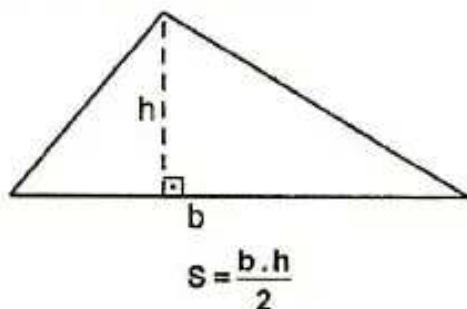
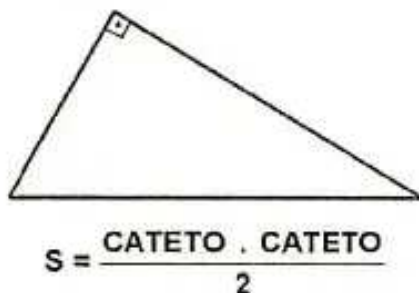
ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS

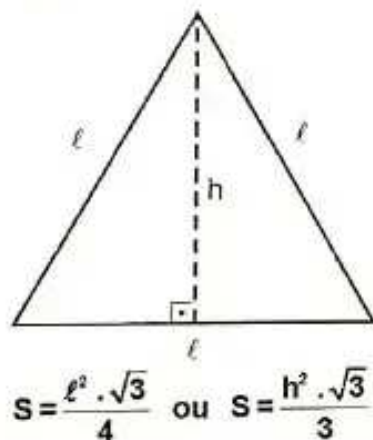
Enumeramos a seguir as fórmulas que nos permitem determinar as áreas das figuras planas mais utilizadas em questões de concursos.

1. Triângulo (fórmula geral)

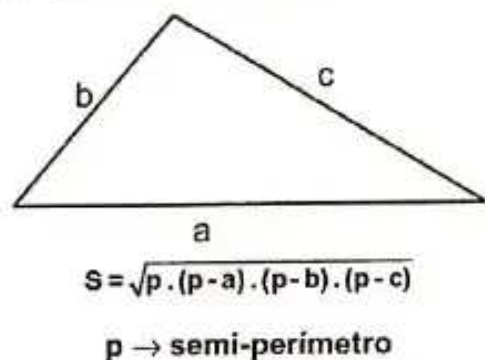
$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

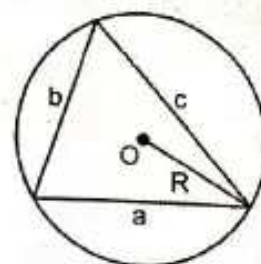
2. Triângulo retângulo

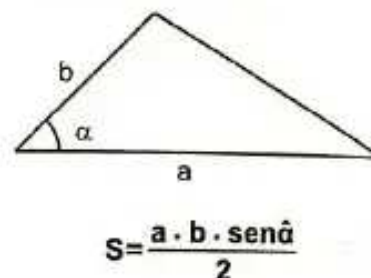
$$S = \frac{\text{CATETO} \cdot \text{CATETO}}{2}$$

3. Triângulo equilátero

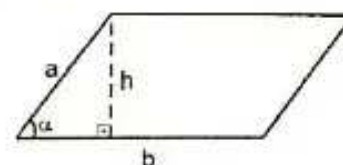
$$S = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \text{ou} \quad S = \frac{h^2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

4. Triângulo, dados os lados (fórmula de Heron)

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

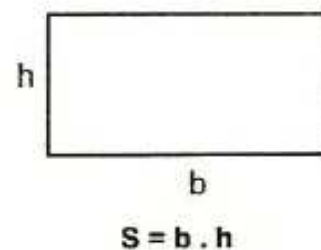
$p \rightarrow$ semi-perímetro

5) Triângulo circunscrito

6. Triângulo inscrito

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

7. Triângulo, dado um ângulo

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\hat{\alpha}}{2}$$

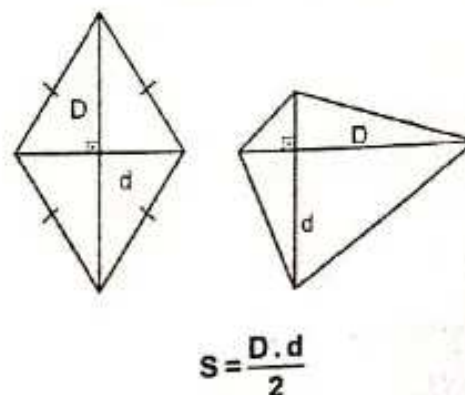
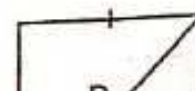
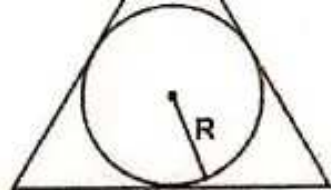
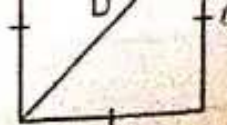
8. Paralelogramo

$S = b \cdot h$ ou $S = a \cdot b \cdot \text{sen}\alpha$

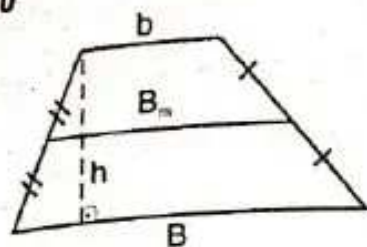
9. Retângulo

$$S = b \cdot h$$

10. Losango (vale também para todo quadrilátero convexo de diagonais perpendiculares)

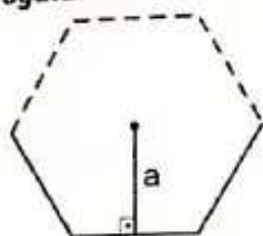
$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

11. Quadrado

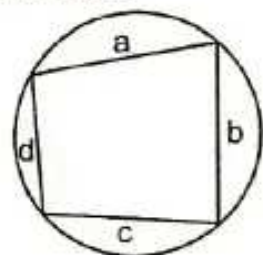
$S = p \cdot R$

$S = \ell^2$ ou $S = \dfrac{D^2}{2}$

12. Trapézio

$S = \dfrac{(B + b)}{2} \cdot h$ ou $S = B_m \cdot h$

$B_m \rightarrow$ base média

13. Polígonos regulares

$S = p \cdot a$

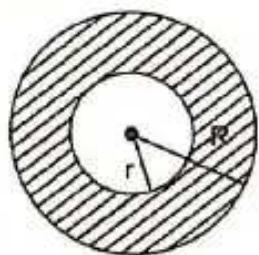
$a \rightarrow$ apótema

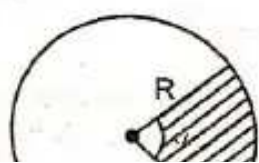
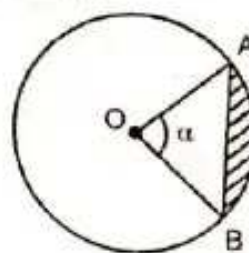
14. Quadrilátero inscrito

$S = \sqrt{(p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c) \cdot (p - d)}$

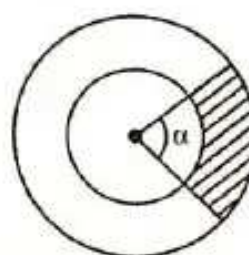
15. Círculo

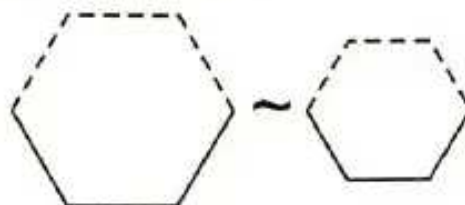
$S = \pi R^2$

$\pi \cong 3{,}14$

16. Coroa circular

$S = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

17. Setor circular

18. Segmento circular

$S = S_{\underset{OAB}{Setor}} - S_{\Delta OAB}$

19. Trapézio circular

$S = \dfrac{\pi (R^2 - r^2) \cdot \alpha}{360°}$

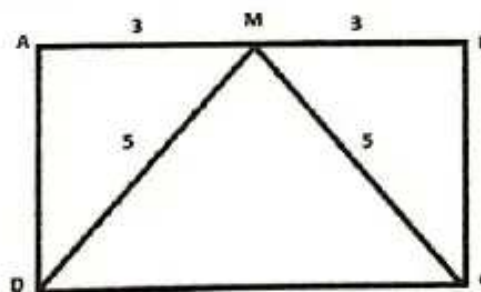
20. Figuras semelhantes

Razão de semelhança = k

↓

Razão das áreas = k^2

Exercícios

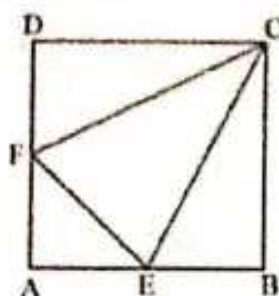
1) Considere um retângulo ABCD, em que AB = 10 cm, BC = 6 cm e M é um ponto pertinente ao lado CD. Determine a área do MAB.

2) **(PUC)** Considere o retângulo ABCD.

Seja M o ponto médio do lado AB. Sabemos que AM = MB = 3 e que DM = MC = 5.

Quanto vale a área do triângulo AMD?

a) 4
b) 6
c) 15/2
d) 10
e) 15

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

3) **(PUC)** Considere o quadrado ABCD de lado 4 cm. O ponto médio do lado AD é F, e o ponto médio do lado AB é E. Calcule a área do triângulo EFC.

a) 6
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{18}$
d) $4\sqrt{2}$
e) $4 + \sqrt{2}$

4) Determine a área de um triângulo retângulo cujas maiores alturas medem 4 cm e 7 cm.

5) Determine a área de um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $6\sqrt{2}$ m.

6) Determine a área de um triângulo retângulo em que uma das alturas determina sobre a hipotenusa projeções que medem 4 cm e 25 cm.

7) **(PUC)** A área de um triângulo retângulo é 30 cm². Sabendo que um dos catetos mede 5 cm, quanto vale a hipotenusa?

a) 5 cm
b) 8 cm
c) 12 cm
d) 13 cm
e) 25 cm

8) A área de um triângulo mede 48 cm². Determine a altura desse triângulo sabendo que ela equivale a 3/4 da base.

9) Determine a área de um triângulo equilátero de lado 4 cm.

10) Determine a área de um triângulo equilátero cuja altura mede 6 cm.

11) Em um triângulo ABC, temos que AB = 8 cm, AC = 5 cm e $B\hat{A}C = 150^\circ$. Determine a área desse triângulo.

12) Determine a área do triângulo de lados 15 cm, 41 cm e 52 cm.

13) Determine a área de um triângulo de perímetro 28 cm, sabendo que o raio do círculo inscrito nesse triângulo mede 6 cm.

14) Determine o raio do círculo circunscrito a um triângulo cujos lados medem 13 cm, 14 cm e 15 cm.

15) Um retângulo tem perímetro 180 cm e seus lados são proporcionais a 3 e 6. Determine a área desse retângulo.

16) **(PUC)** Se um retângulo tem diagonal medindo 10 e lados cujas medidas somam 14, qual sua área?

17) **(PUC)** Um retângulo de lados 3 cm e 4 cm está inscrito em um círculo C.

Quanto vale, em cm², a área deste círculo?

a) $\frac{22}{3}\pi$
b) $\frac{25}{4}\pi$
c) π
d) 9π
e) 25π

18) Determine a área de um quadrado de perímetro 12 cm.

19) A soma das medidas do lado e da diagonal de um quadrado vale $3(2 + \sqrt{2})$ cm. Determine a área do quadrado.

20) **(PUC)** A medida da área, em cm², de um quadrado que pode ser inscrito em um círculo de raio igual a 5 cm é:

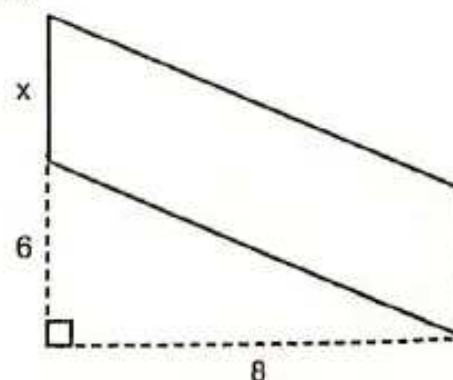
a) 20
b) $25\sqrt{2}$
c) 25
d) $50\sqrt{2}$
e) 50

21) Quando aumentamos a base de um retângulo de 50% e diminuímos sua altura de 20%, qual a variação percentual de sua área?

22) Qual o percentual de aumento da área de um círculo quando aumentamos seu raio de 30%?

23) De quantos por cento diminui a área de um quadrado quando diminuímos seu lado de 40%?

24) Determine a área de um paralelogramo de lados 6 cm e 15 cm, sabendo que um de seus ângulos internos é o triplo do outro.

25) O paralelogramo da figura tem área 24 cm². Determine o valor de x.

26) Determine a área de um losango de perímetro 52 cm, sabendo que uma de suas diagonais mede 10 cm.

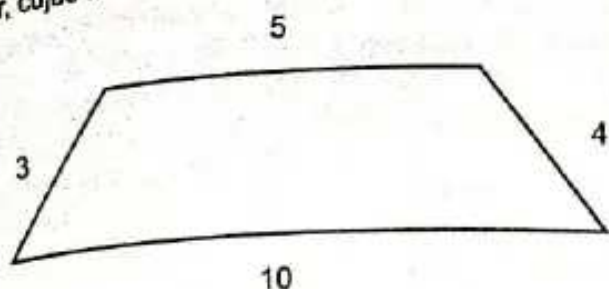
27) Determine as medidas das diagonais de um losango de área 600 cm², sabendo que sua altura mede 24 cm.

28) Determine a área de um trapézio isósceles cujos lados oblíquos medem 12 cm, a base menor mede 5 cm e um dos ângulos vale 120°.

29) Determine a área de um trapézio retângulo cujas diago- ... cujas bases medem 9 e 16.

a) 24
b) 32
c) 48
d) 54
e) 72

nais são perpendiculares e cujas bases me...

30) **(PUC)** Considere o trapézio representado na figura a seguir, cujas medidas dos lados são dadas em centímetros.

A área desse trapézio, em centímetros quadrados, é:

a) 18
b) 24
c) 30
d) 32
e) 36

31) Determine a área de um círculo de raio 8 cm.

32) Determine a área de uma coroa circular de raios 7 cm e 13 cm.

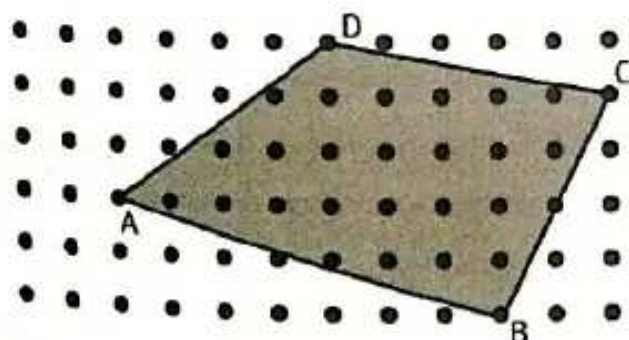
33) Determine a área de uma coroa circular, sabendo que uma corda do maior círculo, tangente ao menor, mede 14 cm.

34) Determine o raio de um círculo em que um setor de 150° mede 15π cm².

35) Determine a área do círculo inscrito em um setor circular de 60° em um círculo de raio 15 cm.

36) Determine a área de um segmento circular de 120° em um círculo de raio 12 m.

37) **(UERJ)** Um tabuleiro retangular com pregos dispostos em linhas e colunas igualmente espaçadas foi usado em uma aula sobre área de polígonos.

A figura abaixo representa o tabuleiro com um elástico fixado em quatro pregos indicados pelos pontos A, B, C e D.

Considere u a unidade de área equivalente ao menor quadrado que pode ser construído com vértices em quatro pregos do tabuleiro.

Calcule, em u, a área do quadrilátero ABCD formado pelo elástico.

38) **(PUC)** Um show de rock foi realizado em um terreno retangular de lados 120 m e 60 m.
Sabendo que havia, em média, um banheiro para cada 100 ...

39) **(ENEM)** Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4 h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2 000 pessoas faz-se necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10 h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupada equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120 000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público. Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

a) 360
b) 485
c) 560
d) 740
e) 860

40) **(ENEM)** O prefeito de uma cidade deseja promover uma festa popular no parque municipal para comemorar o aniversário de fundação do município. Sabe-se que esse parque possui formato retangular, com 120 m de comprimento por 150 m de largura. Além disso, para segurança das pessoas presentes no local, a polícia recomenda que a densidade média, num evento dessa natureza, não supere quatro pessoas por metro quadrado.

Seguindo as recomendações de segurança estabelecidas pela polícia, qual é o número máximo de pessoas que poderão estar presentes na festa?

a) 1 000
b) 4 500
c) 18 000
d) 72 000
e) 120 000

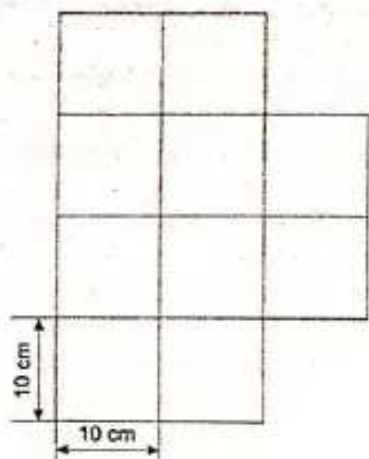
41) **(ENEM)** O governo, num programa de moradia, tem por objetivo construir 1 milhão de habitações, em parceria com estados, municípios e iniciativa privada. Um dos modelos de casa popular proposto por construtoras deve apresentar 45 m² e deve ser colocado piso de cerâmica em toda sua a área interna.

Supondo que serão construídas 100 mil casas desse tipo, desprezando-se as larguras das paredes e portas, o número de peças de cerâmica de dimensões 20 cm x 20 cm utilizadas será

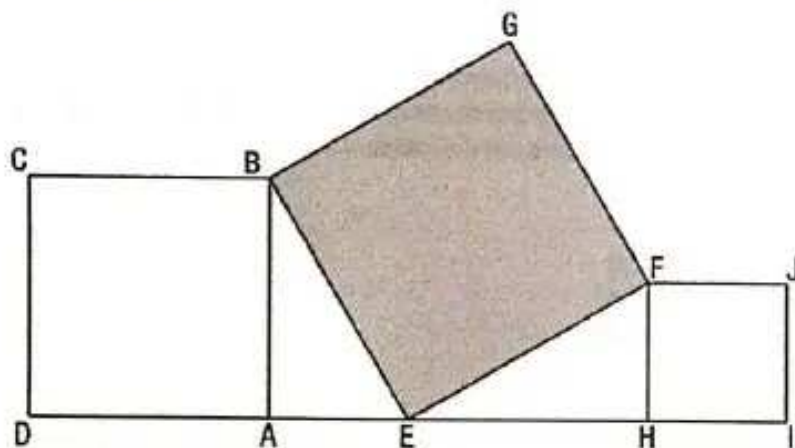
a) 11,25 mil.
b) 180 mil.
c) 225 mil.
d) 22 500 mil.
e) 112 500 mil.

42) **(ENEM)** Um conjunto residencial será construído em um terreno que está representado no mapa a seguir na escala 1 : 1 000. O terreno está dividido em lotes quadrados iguais ao indicado na figura. No local, será construído um centro comunitário, quiosques e praças de lazer e alimentação, de tal forma que a soma total dessas áreas não ultrapasse $\frac{2}{5}$ da área total do terreno.

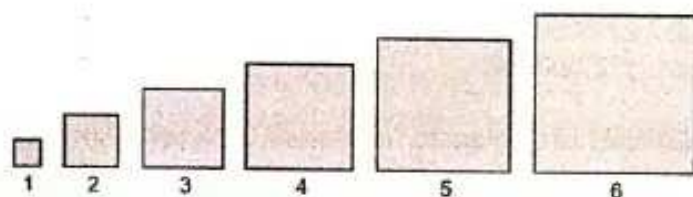
... metros quadrados, havia no show:

a) 20 banheiros
b) 36 banheiros
c) 60 banheiros
d) 72 banheiros
e) 120 banheiros.

A área total, a ser disponibilizada para a construção do centro comunitário, dos quiosques e das praças de lazer e alimentação, não poderá ultrapassar

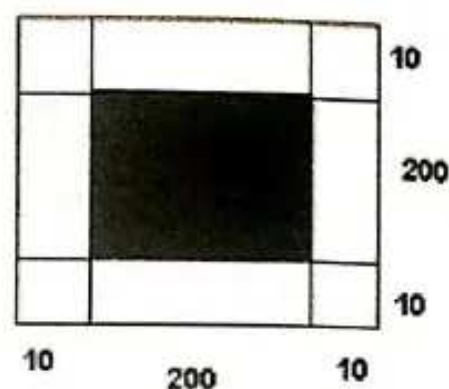
a) 40 000 m².
b) 4 000 m².
c) 400 m².
d) 40 m².
e) 4 m².

43) **(CEFET)** Na figura abaixo, o quadrado ABCD tem área 3 e o quadrado FHIJ tem área 2. Os pontos A, D, E, H e I são colineares.

Qual a área do quadrado BEFG?

a) 13
b) 10
c) 5
d) 4

44) **(ENEM)** Em um trabalho escolar, João foi convidado a calcular as áreas de vários quadrados diferentes, dispostos em sequência, da esquerda para direita, como mostra a figura.

O primeiro quadrado da sequência tem lado medindo 1 cm, o segundo quadrado tem lado medindo 2 cm, o terceiro quadrado tem lado medindo 3 cm e assim por diante. O objetivo do trabalho é identificar em quanto a área de cada quadrado da sequência excede a área do quadrado anterior. A área do quadrado que ocupa a posição n, na sequência, foi representada por A_n.

Para $n \geq 2$, o valor da diferença ...

45) **(PUC)** Na mais alta torre do mais alto castelo, dorme uma princesa, mas o castelo é rodeado por um fosso cheio de terríveis monstros. A ilha, na qual fica o castelo, é um quadrado de lado igual a 200 m, e a largura do fosso é de 10 m, com margem exterior também quadrada, conforme o diagrama (o castelo é indicado em preto, e o fosso, em branco). Você foi encarregado de encomendar a ração para os monstros que habitam o fosso (os ocasionais príncipes que caem dentro do fosso têm valor nutritivo desprezível). Sabendo que há uma densidade de 0,01 monstro por metro quadrado e que, para uma alimentação saudável, cada monstro deve consumir um saco de 10 kg da ração Monstro Feliz por semana, quantos sacos de ração devem ser encomendados por semana?

a) 71
b) 94
c) 67
d) 84
e) 108

46) **(UERJ)** Considere uma placa retangular ABCD de acrílico, cuja diagonal AC mede 40 cm. Um estudante, para construir um par de esquadros, fez dois cortes retos nessa placa nas direções AE e AC, de modo que $D\hat{A}E = 45°$ e $B\hat{A}C = 30°$, conforme ilustrado a seguir:

Após isso, o estudante descartou a parte triangular CAE, restando os dois esquadros. Admitindo que a espessura do acrílico seja desprezível e que $\sqrt{3} = 1,7$, a área, em cm², do triângulo CAE equivale a:

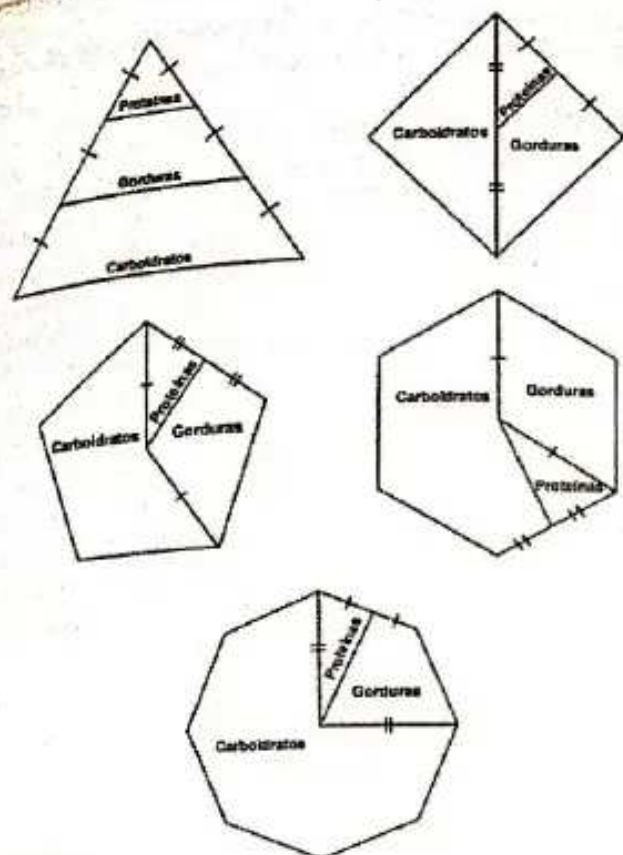
a) 80
b) 100
c) 140
d) 180

47) **(ENEM)** Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em ... porcentagens

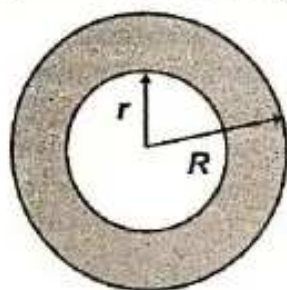
Para n ≥ 2, o valor da diferença $A_n - A_{n-1}$, em centímetro quadrado, é igual a

a) $2n - 1$.
b) $2n + 1$.
c) $-2n + 1$.
d) $(n - 1)^2$.
e) $n^2 - 1$.

regiões cujas áreas sejam proporcionais às porções mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:

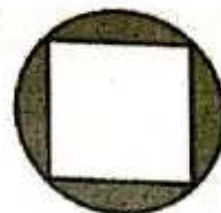
180

Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

a) triângulo.
b) losango.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) octógono.

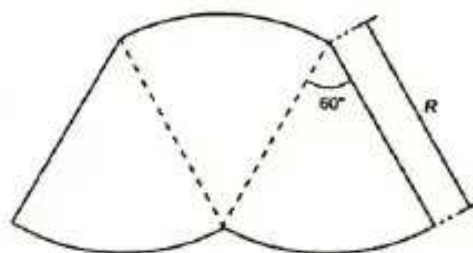
48) **(ENEM)** No projeto de arborização de uma praça está prevista a construção de um canteiro circular. Esse canteiro será constituído de uma área central e de uma faixa circular ao seu redor, conforme ilustra a figura.

Deseja-se que a área central seja igual à área da faixa circular sombreada.

A relação entre os raios do canteiro (R) e da área central (r) deverá ser

a) $R = 2r$
b) $R = r\sqrt{2}$
c) $R = \dfrac{r^2 + 2r}{2}$
d) $R = r^2 + 2r$
e) $R = \dfrac{3}{2}r$

49) **(ENEM)** Um arquiteto deseja construir um jardim circular de 20 m de diâmetro. Nesse jardim, uma parte do terreno será reservada para pedras ornamentais. Essa parte terá a forma de um quadrado inscrito na circunferência, como mostrado na figura. Na parte compreendida entre o contorno da circunferência e a parte externa ao quadrado será ...

O número mínimo de sacos de terra vegetal necessários para cobrir a parte descrita do jardim é

a) 100.
b) 140.
c) 200.
d) 800.
e) 1 000.

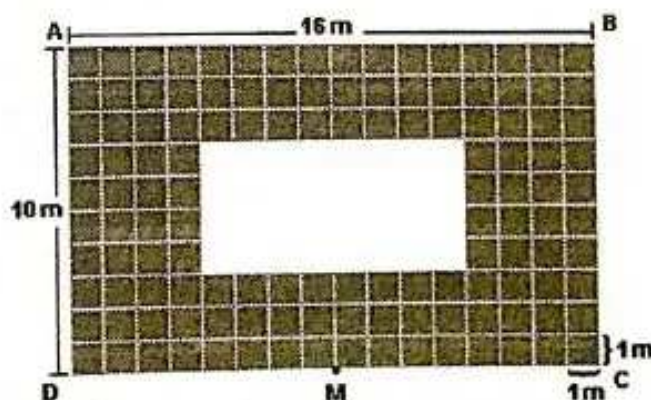
50) **(ENEM)** O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.

O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para R, em metros, deverá ser

a) 16.
b) 28.
c) 29.
d) 31.
e) 49.

51) **(UERJ)** Uma piscina, cujas dimensões são 4 metros de largura por 8 metros de comprimento, está localizada no centro de um terreno ABCD, retangular, conforme indica a figura abaixo.

Calcule a razão entre a área ocupada pela piscina e a área ABCD.

52) **(ENEM)** Tradicionalmente uma pizza média de formato circular tem diâmetro de 30 cm e é dividida em 8 fatias iguais (mesma área). Uma família, ao se reunir para o jantar, fará

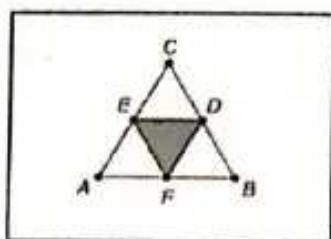
...ência é a parte externa ao quadrado, será colocada terra vegetal. Nessa parte do jardim, serão usados 15 kg de terra para cada m². A terra vegetal é comercializada em sacos com exatos 15 kg cada. Use 3 como valor aproximado para π.

... uma pizza de formato circular e pretende dividi-la em 10 fatias, também iguais. Entretanto, eles desejam que cada fatia dessa pizza tenha o mesmo tamanho (mesma área) de cada fatia da pizza média quando dividida em 8 fatias iguais.

Qual o valor mais próximo do raio com que deve ser feita a pizza, em centímetro, para que eles consigam dividi-la da forma pretendida?

Use 2,2 como aproximação para $\sqrt{5}$.

a) 15,00
b) 16,50
c) 18,75
d) 33,00
e) 37,50

53) **(ENEM)** Um artista deseja pintar em um quadro uma figura na forma de triângulo equilátero ABC de lado 1 metro. Com o objetivo de dar um efeito diferente em sua obra, o artista traça segmentos que unem os pontos médios D, E e F dos lados BC, AC e AB, respectivamente, colorindo um dos quatro triângulos menores, como mostra a figura.

Qual é a medida da área pintada, em metros quadrados, do triângulo DEF?

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{16}$

c) $\frac{1}{8}$

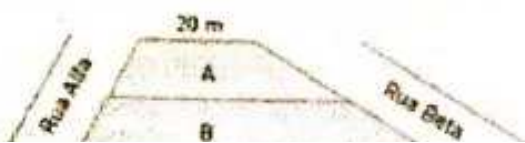
d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

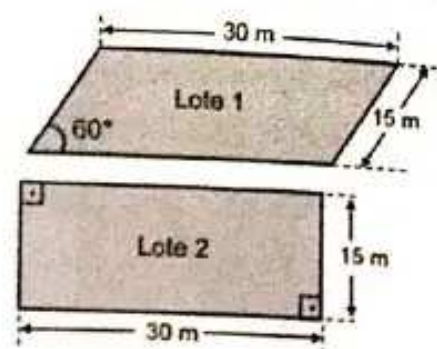
e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

54) **(ENEM)** A prefeitura de uma cidade detectou que as galerias pluviais, que possuem seção transversal na forma de um quadrado de lado 2 m, são insuficientes para comportar o escoamento da água em caso de enchentes. Por essa razão, essas galerias foram reformadas e passaram a ter seções quadradas de lado igual ao dobro do das anteriores, permitindo uma vazão de 400 m³/s. O cálculo da vazão V (em m³/s) é dado pelo produto entre a área por onde passa a água (em m²) e a velocidade da água (em m/s).

Supondo que a velocidade da água não se alterou, qual era a vazão máxima nas galerias antes das reformas?

a) 25 m³/s
b) 50 m³/s
c) 100 m³/s
d) 200 m³/s
e) 300 m³/s

55) **(UERJ)** Dois terrenos, A e B, ambos com a forma de trapézio, têm as frentes de mesmo comprimento voltadas para a Rua Alfa. Os fundos dos dois terrenos estão voltados para a Rua Beta. Observe o esquema:

Calcule o comprimento x, em metros, da lateral maior do terreno B.

56) **(ENEM)** Um casal e seus dois filhos saíram, com um corretor de imóveis, com a intenção de comprar um lote onde futuramente construiriam sua residência. No projeto da casa, que esta família tem em mente, irão necessitar de uma área de pelo menos 400 m². Após algumas avaliações, ficaram de decidir entre os lotes 1 e 2 da figura, em forma de paralelogramos cujos preços são R$ 100 000,00 e R$ 150 000,00, respectivamente.

Use $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 1,7 como aproximações, respectivamente, para sen(60°), cos(60°) e $\sqrt{3}$.

Para colaborarem na decisão, os envolvidos fizeram as seguintes argumentações:

Pai: Devemos comprar o Lote 1, pois como uma de suas diagonais é maior do que as diagonais do Lote 2, o Lote 1 também terá maior área;

Mãe: Se desconsiderarmos os preços, poderemos comprar qualquer lote para executar nosso projeto pois tendo ambos o mesmo perímetro, terão também a mesma área;

Filho 1: Devemos comprar o Lote 2, pois é o único que tem área suficiente para a execução do projeto;

Filho 2: Devemos comprar o Lote 1, pois como os dois lotes possuem lados de mesma medida, terão também a mesma área, porém o Lote 1 é mais barato;

Corretor: Vocês devem comprar o Lote 2, pois é o que tem menor custo por metro quadrado.

A pessoa que argumentou corretamente para a compra do terreno foi o(a)

a) pai.
b) mãe.
c) filho 1.
d) filho 2.
e) corretor.

57) **(ENEM)** Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

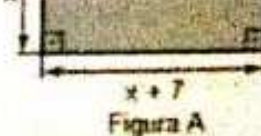
x + 7

Figura A

15 m

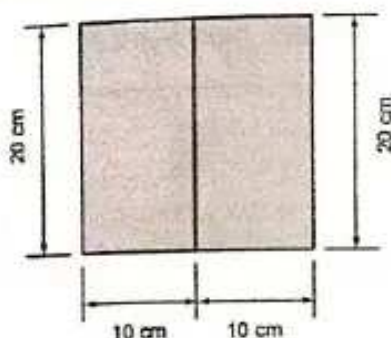
3 m

Figura B

As áreas de A e B são, respectivamente, proporcionais a 1 e 2, e a lateral menor do terreno A mede 20 m.

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

a) 7,5 e 14,5.
b) 9,0 e 16,0.
c) 9,3 e 16,3.
d) 10,0 e 17,0.
e) 13,5 e 20,5.

58) **(ENEM)** Um agricultor vive da plantação de morangos que são vendidos para uma cooperativa. A cooperativa faz um contrato de compra e venda no qual o produtor informa a área plantada.

Para permitir o crescimento adequado das plantas, as mudas de morango são plantadas no centro de uma área retangular, de 10 cm por 20 cm, como mostra a figura.

Atualmente, sua plantação de morangos ocupa uma área de 10 000 m², mas a cooperativa quer que ele aumente sua produção. Para isso, o agricultor deverá aumentar a área plantada em 20%, mantendo o mesmo padrão de plantio.

O aumento (em unidade) no número de mudas de morango em sua plantação deve ser de

a) 10 000.
b) 60 000.
c) 100 000.
d) 500 000.
e) 600 000.

59) **(ENEM)** Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura.

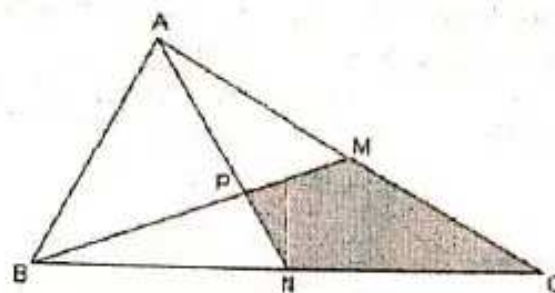
A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{7}{8}$

c) $\frac{8}{7}$

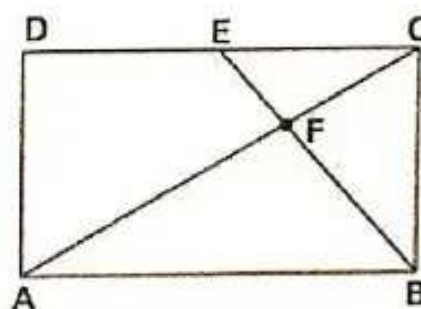
d) $\frac{8}{9}$

e) $\frac{9}{8}$

Assim, a área da região MPNC, em cm², vale:

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

61) **(PUC)** Seja ABC um triângulo equilátero de área 30 cm². Seja PQR um triângulo equilátero com P no lado BC, Q no lado CA e R no lado AB. Dado que o ângulo CPQ é igual a 90°, determine:

a) os ângulos AQR e BRP;
b) a área do triângulo PQR.

62) **(FUVEST)** A figura representa um retângulo ABCD, com AB = 5 e AD = 3. O ponto E está no segmento CD de maneira que CE = 1 e F é o ponto de interseção da diagonal AC com o segmento BE.

Então, a área do triângulo BCF vale:

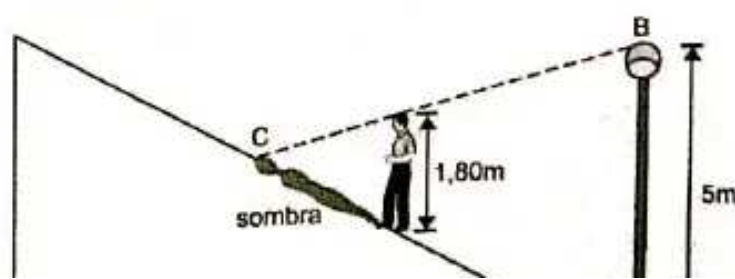
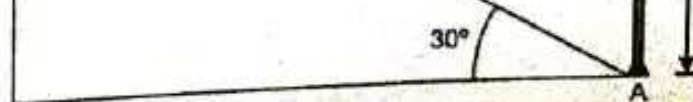
a) $\frac{6}{5}$

b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{4}{3}$

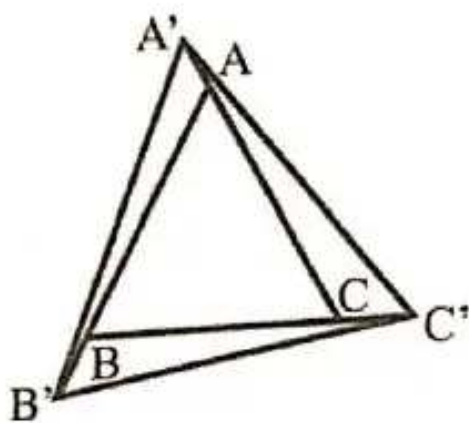
d) $\frac{7}{5}$

e) $\frac{3}{2}$

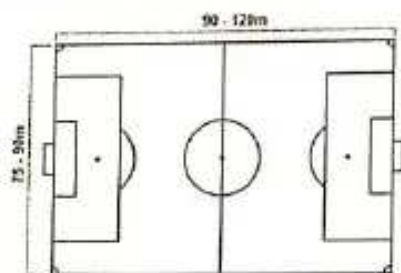
63) **(UNICAMP)** Um homem, de 1,80 m de altura, sobe uma ladeira com inclinação de 30°, conforme mostra a figura.

60) (IBMEC) O triângulo ABC da figura abaixo tem área igual a 36 cm². Os pontos M e N são pontos médios dos lados AC e BC.

No ponto A está um poste vertical de 5 m de altura, com uma lâmpada no ponto B. Pede-se para:

a) calcular o comprimento da sombra do homem depois que ele subiu 4 m ladeira acima;

b) calcular a área do triângulo ABC.

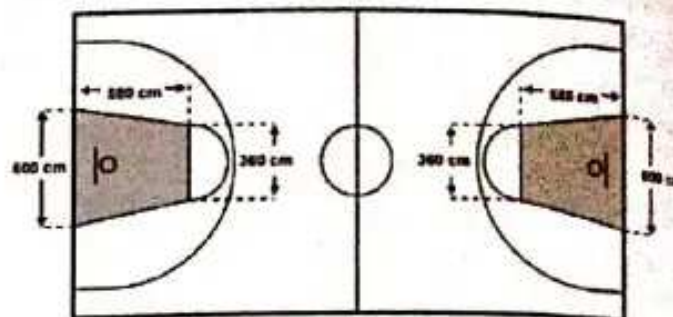
64) Os três lados do triângulo equilátero ABC foram prolongados de segmentos AA' = BB' = CC', de modo que a medida do segmento AA' corresponde a 20% da medida do lado AC, conforme indicado na figura a seguir.

Determine o percentual de aumento que a área do triângulo A'B'C' apresenta em relação à área do triângulo ABC.

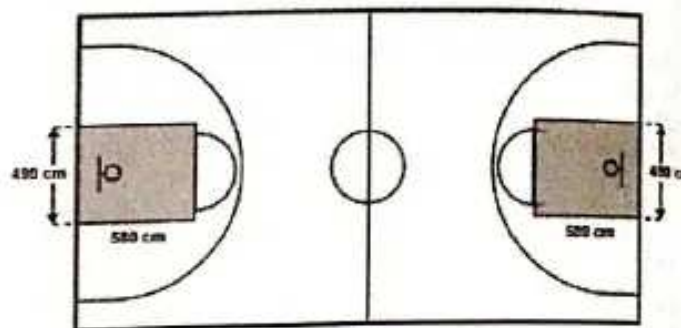
65) **(ENEM)** A forma e as dimensões de um campo de jogo para o futebol são estabelecidas pelo Instituto Nacional de Metrologia (INMETRO), definindo no documento Regras do Jogo que o campo seja retangular e que possua os limites máximos e mínimos para largura e comprimento apresentados na figura a seguir. Estabelece também que o campo deve ser dividido em duas metades iguais e que o ponto central deve estar localizado no centro do campo. Qualquer campo que atenda a estes requisitos é considerado oficial.

Para a irrigação da área gramada do campo de jogo em determinada região do país são gastos, em média, 6 litros de água por metro quadrado por dia.

Disponível em: www.inmetro.gov.br.
Acesso em: 30 jul. 2011 (adaptado).

Qual será a economia semanal de água de irrigação, em litros, de um campo de futebol oficial que possua as dimensões mínimas de comprimento e de largura, em relação a um campo construído com as dimensões as máximas?

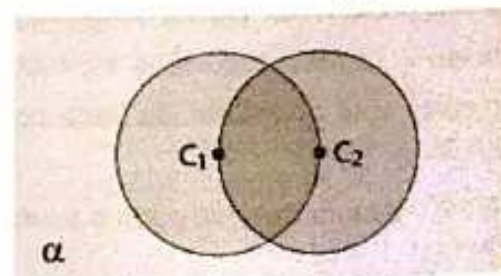
a) 24 300
b) 64 800
c) 170 100
d) 283 500
e) 453 600

66) **(ENEM)** O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.

Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.

Esquema II: área restritiva a partir de 2010

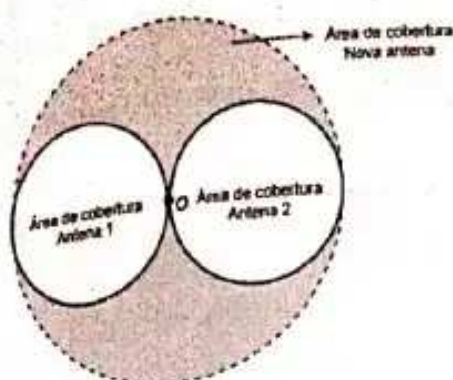
Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a uma)

a) aumento de 5 800 cm².
b) aumento de 75 400 cm².
c) aumento de 214 600 cm².
d) diminuição de 63 800 cm².
e) diminuição de 272 600 cm².

67) **(UERJ)** Na figura abaixo, estão representados dois círculos congruentes, de centros C_1 e C_2, pertencentes ao mesmo plano α. O segmento $\overline{C_1C_2}$ mede 6 cm.

A área da região limitada pelos círculos, em cm², possui valor aproximado de:

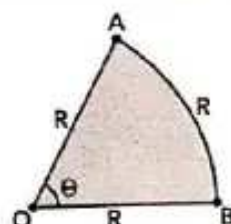
a) 108
b) 162
c) 182
d) 216

68) **(ENEM)** Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos cujas circunferências se

tituídas são círculos de raio 2 km, cujas circun... tangenciam no ponto O, como mostra a figura.

O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

a) 8π.
b) 12π.
c) 16π.
d) 32π.
e) 64π.

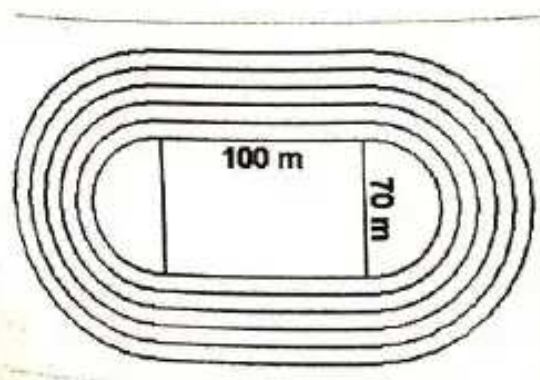
69) **(UERJ)** Uma chapa de aço com a forma de um setor circular possui raio R e perímetro 3R, conforme ilustra a imagem.

A área do setor equivale a:

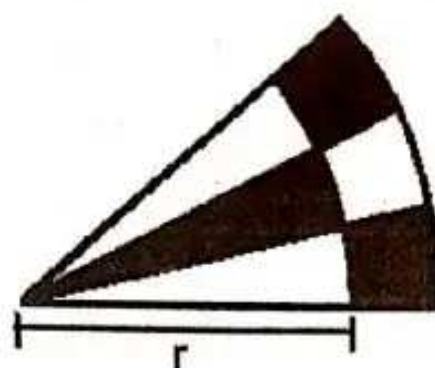
a) R^2

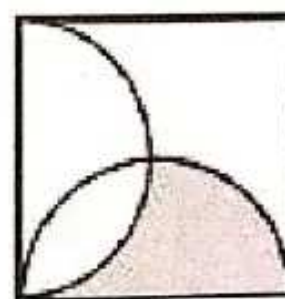
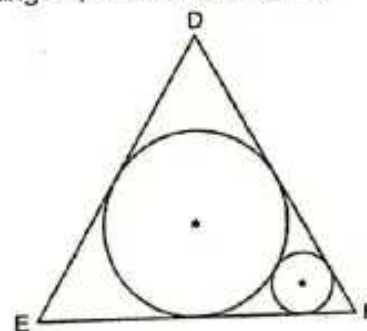
b) $\frac{R^2}{4}$

c) $\frac{R^2}{2}$

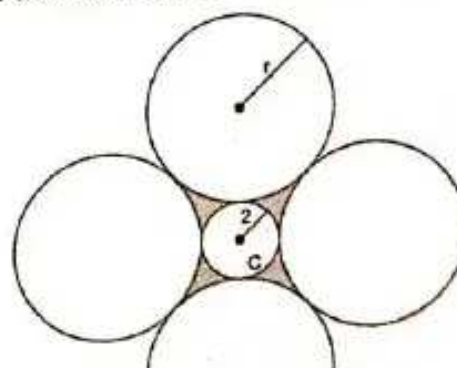
d) $\frac{3R^2}{2}$

70) A figura a seguir é o esboço de uma pista de atletismo, com cinco raias de 60 cm de largura cada. As raias são delimitadas por retas e circunferências concêntricas, sendo que a raia mais interna circunscreve um campo de futebol de 70 m por 100 m.

A pista será revestida com material para amortecimento de im...

71) Um setor circular, de ângulo θ e raio 1, foi dividido em três setores de mesmo ângulo. Cada um desses setores foi dividido em duas regiões por um arco de círculo concêntrico com o setor de raio r. Como ilustrado na figura.

Se A_1 é a soma das áreas das regiões sombreadas e A_2 é a soma das áreas das regiões claras, determine o valor de r que torna verdadeira a igualdade $A_1 = A_2$.

72) O quadrado da figura tem perímetro 12 cm. Determine a área hachurada.

73) **(FUVEST)** O círculo C, de raio R, está inscrito no triângulo equilátero DEF. Um círculo de raio r está no interior do triângulo DEF e é tangente externamente a C e a dois lados do triângulo, conforme a figura.

Assim, determine

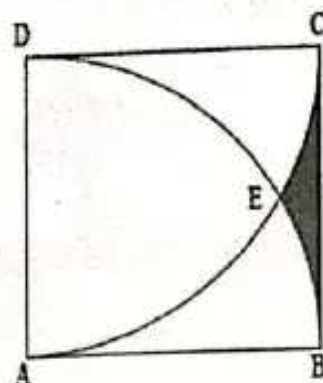
a) a razão entre R e r;
b) a área do triângulo DEF em função de r.

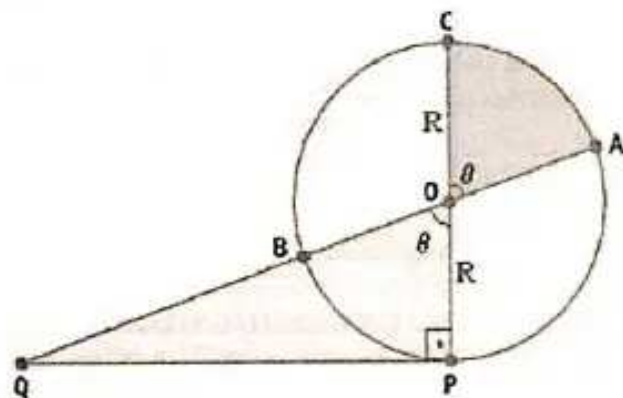
74) **(FUVEST)** Na figura abaixo, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C.

... impactos que custa R$ 15,00 o m². Qual é, aproximadamente, o valor a ser gasto com o material de revestimento da pista?

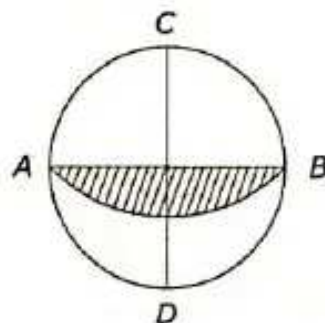
Se o raio de C é igual a 2, determinar

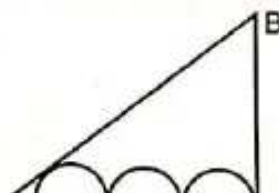
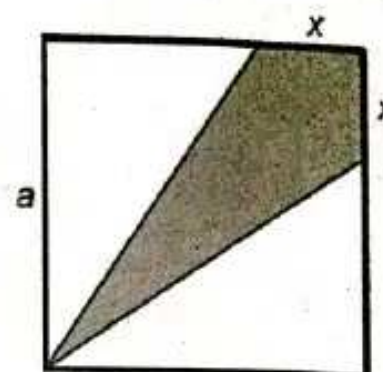
a) o valor de r;

b) a área da região hachurada.

75) **(FUVEST)** Na figura, ABCD é um quadrado é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferência de raio 1.

Determine a área da região hachurada.

76) **(UERJ)** Considere um setor circular AOC, cujo ângulo central θ é medido em radianos. A reta que tangencia o círculo no extremo P do diâmetro CP encontra o prolongamento do diâmetro AB em um ponto Q, como ilustra a figura.

Sabendo que o ângulo θ satisfaz a igualdade $tg\theta = 2\theta$, calcule a razão entre a área do setor AOC e a área do triângulo OPQ.

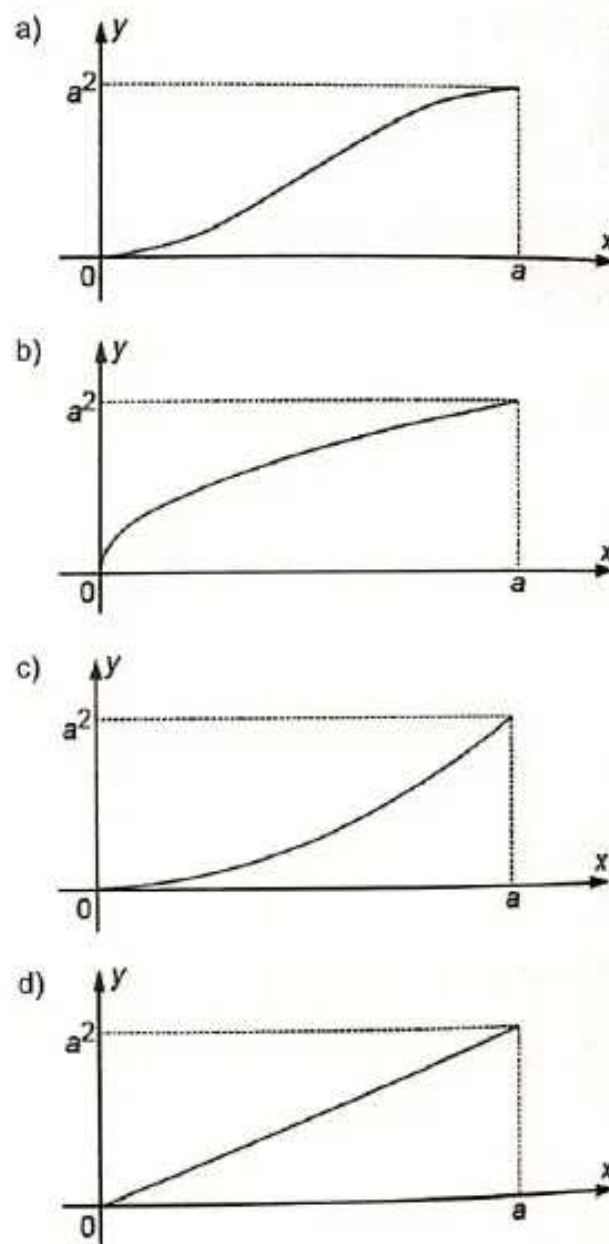
77) A circunferência representada abaixo tem raio 2 cm e os diâmetros AB e CD, perpendiculares. Com centro em C e raio CA foi traçado o arco AB.

Determine a área da região hachurada.

78) Na figura abaixo, o triângulo ABC possui catetos AB e AC, que medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm. Em seu interior há três circunferências de mesmo raio que se tangenciam entre si e também aos lados do triângulo.

79) **(UNICAMP)** Considere o quadrado de lado $a > 0$, exibido na figura abaixo. Seja $A(x)$ a função que associa a cada $0 \leq x \leq a$ a área da região indicada pela cor cinza.

O gráfico da função $y = A(x)$ no plano cartesiano é dado por

a)

b)

c)

d)

80) **(UERJ)** Um triângulo equilátero possui perímetro P, em metros, e área A, em metros quadrados. Os valores de P e A variam de acordo com a medida do lado do triângulo.

Desconsiderando as unidades de medida, a expressão $Y = P - A$ indica o valor da diferença entre os números P e A.

O maior valor de Y é igual a:

a) $2\sqrt{3}$

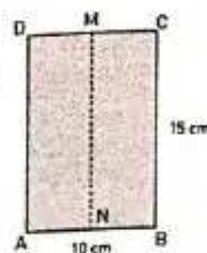
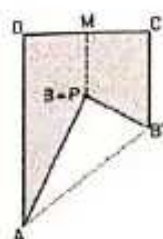
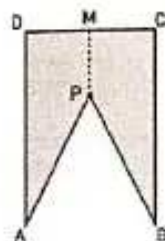
Determine o raio de cada circunferência.

b) $3\sqrt{3}$

c) $4\sqrt{3}$

d) $6\sqrt{3}$

81) **(UERJ)** Para confeccionar uma bandeirinha de festa junina, utilizou-se um pedaço de papel com 10 cm de largura e 15 cm de comprimento, obedecendo-se às instruções abaixo.

1 - Dobrar o papel ao meio, para marcar o segmento MN, e abri-lo novamente:

2 - Dobrar a ponta do vértice B no segmento AB', de modo que B coincida com o ponto P do segmento MN:

3 - Desfazer a dobra e recortar o triângulo ABP.

A área construída da bandeirinha APBCD, em cm^2, é igual a:

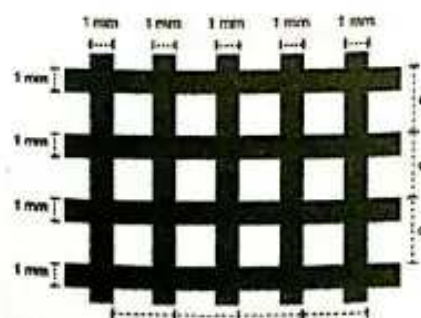
a) $25(4 - \sqrt{3})$

b) $25(6 - \sqrt{3})$

c) $50(2 - \sqrt{3})$

d) $50(3 - \sqrt{3})$

82) **(ENEM)** Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de (d - 1) milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.

a) 2

b) 1

c) $\frac{11}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{2}{3}$

83) Determine a medida da área do triângulo APC, mostrado na figura abaixo, em função da medida do lado AB.

Gabarito

1) 30 cm^2
2) b
3) a
4) 14 cm^2
5) 18 m^2
6) 145 cm^2
7) d
8) $6\sqrt{2}$cm
9) $4\sqrt{3}cm^2$
10) $12\sqrt{3}cm^2$
11) 10 cm^2
12) 234 cm^2
13) 84 cm^2
14) $\frac{65}{8}$cm
15) 1800 cm^2
16) c
17) b
18) 9 cm^2
19) 18 cm^2
20) e
21) aumenta de 20%
22) 69%
23) 64%
24) $45\sqrt{2}cm^2$
25) 3 cm
26) 120 cm^2
27) 30 cm e 40 cm
28) $66\sqrt{3}cm^2$
29) 150
30) a
31) 64π cm^2
38) d
39) e
40) d
41) e
42) a
43) c
44) a
45) d
46) c
47) c
48) b
49) a
50) b
51) $\frac{1}{5}$
52) b
53) b
54) c
55) 100 m
56) c
57) b
58) c
59) d
60) b
61)
a) 90° e 90°
b) 10 cm^2
62) b
63)
a) 2,25 m
b) $7,8125\sqrt{3}m^2$

Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento.

A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

32) $120\,\pi\,cm^2$

33) $49\,\pi\,cm^2$

34) 6 cm

35) $25\,\pi\,cm^2$

36) $48\,\pi\,m^2$

37) 25,5

64) 72%

65) c

66) a

67) c

68) a

69) c

70) $(3285\pi + 9000)$reais

71) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

72) $2{,}25\ cm^2$

73)

a) 3

b) $27\,r^2\sqrt{3}$

74)

a) $2(1+\sqrt{2})$ u·c.

b) $8(6+4\sqrt{2}-2\pi-\sqrt{2\pi})$ u·a.

75) $1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

76) $\frac{1}{2}$

77) $(2\pi - 4)cm^2$

78) 0,5 cm

79) d

80) b

81) b

82) a

83) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Anotações

Capítulo XII

POLIEDROS

Ângulo Poliédrico Convexo

Consideremos n (n ≥ 3) ângulos planos adjacentes, não coplanares, dois a dois, tais que o plano que contém qualquer um deles deixa todos os demais em um mesmo semi-espaço. A reunião desses ângulos planos é chamada **ângulo poliédrico convexo**.

Os ângulos que compõem o ângulo poliédrico são suas faces, enquanto os lados de tais ângulos são as **arestas**.

Quando o ângulo poliédrico for composto de três ângulos, será chamado triédrico; se tiver quatro faces (figura acima), será tetraédrico; se tiver cinco faces, será pentaédrico, e assim sucessivamente.

Poliedros convexos

Poliedro convexo é todo sólido geométrico limitado por polígonos convexos planos, em que qualquer segmento que une dois de seus pontos está totalmente contido no poliedro.

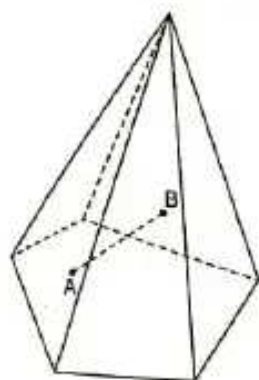



Figura 1

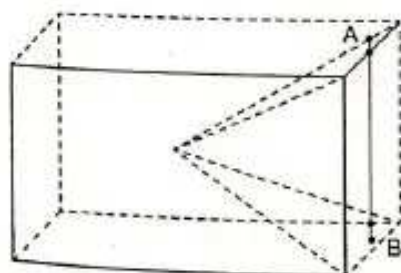
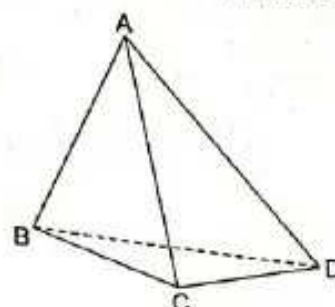



Figura 2

Na fig. 1, temos um exemplo de poliedro convexo, pois qualquer segmento **AB** que une dois de seus pontos está totalmente contido nele. Tal fato não ocorre na figura 2, onde temos um poliedro não convexo.

Elementos

Tais elementos são melhor visualizados na figura:

Faces: ABC, ABD, ACD e BCD
Arestas: AB, AC, AD, BC, BD e CD
Vértices: A, B, C e D

Nomenclatura

Os nomes dos poliedros são dados de acordo com o seu número de faces. Temos, assim:

Nº DE FACES	NOME
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
15	Pentadecaedro
20	Icosaedro

Os demais poliedros não recebem denominações especiais.

Relação de Euler

Os principais elementos de um poliedro convexo analisados anteriormente satisfazem a uma equação (**relação de Euler**) que vamos enunciar em seguida.

"Em todo poliedro convexo, o número de faces, mais o número de vértices, é igual ao número de arestas, acrescido de duas unidades".

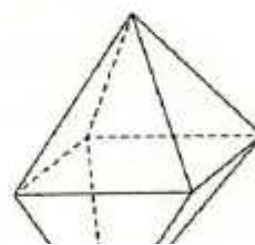
Noutras palavras, se chamarmos **F**, **V** e **A**, respectivamente, os números de faces, vértices e arestas de um poliedro convexo, temos que:

$$F + V = A + 2$$

Todo poliedro, convexo ou não, que satisfaz a relação de Euler é chamado **poliedro euleriano**.

Exemplo:

Na figura abaixo, temos um octaedro convexo.

Então: $F = 8$; $V = 6$; $A = 12$

Como elementos principais de um poliedro, podemos destacar:

a) **faces:** são os polígonos que o limitam;
b) **arestas:** são os lados desses polígonos;
c) **vértices:** são os vértices desses polígonos.

O que confirma a relação de Euler, pois:

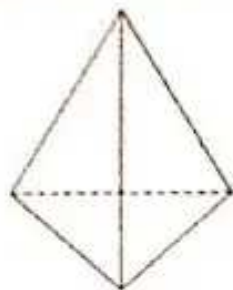
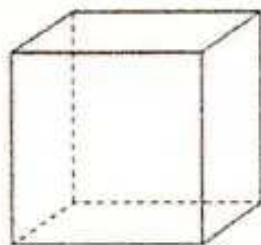
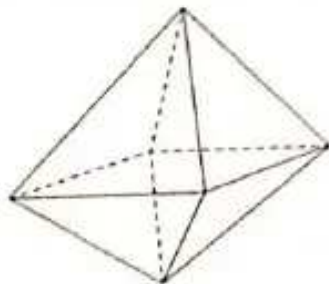
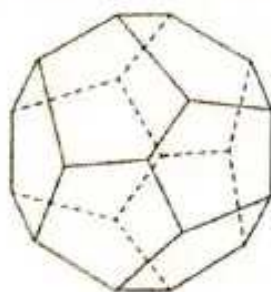
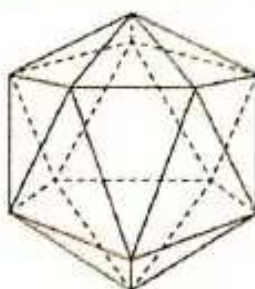
$F + V = A + 2$

$8 + 6 = 12 + 2$

Poliedros Regulares

Poliedro regular é aquele que possui todos os ângulos poliédricos congruentes e cujas faces são polígonos regulares congruentes.

Só existem cinco poliedros regulares não congruentes. São:

a) Tetraedro regular ($F = 4$; $V = 4$; $A = 6$)

b) Hexaedro regular ($F = 6$; $V = 8$; $A = 12$)

c) Octaedro regular ($F = 8$; $V = 6$; $A = 12$)

d) Dodecaedro regular ($F = 12$; $V = 20$; $A = 30$)

e) Icosaedro regular ($F = 20$; $V = 12$; $A = 30$)

Soma dos ângulos internos de todas as faces

As faces de um poliedro convexo são polígonos planos. A soma dos ângulos internos de todos esses polígonos é dada por:

Resolução: Daqui em diante, quando quisermos nos referir a faces triangulares, usaremos a notação F_3, para as faces quadrangulares, F_4, e assim sucessivamente.

Neste poliedro, temos $2F_5$ e $5F_4$. Como cada F_5 tem 5 lados e cada F_4 tem 4 lados:

$2\,F_5 \rightarrow 2 \times 5 = 10$ lados
$5\,F_4 \rightarrow 5 \times 4 = \underline{20}$ lados
30 lados

Sendo cada aresta obtida da união de dois lados dos polígonos que servem de faces, o número de arestas é sempre igual à metade do número total de lados de tais polígonos. No nosso caso:

$$A = \frac{n^o \text{ lados}}{2} = \frac{30}{2}$$

$$A = 15$$

Como $F = 7$ (heptaedro), usando-se a relação de Euler:

$$F + V = A + 2$$
$$7 + V = 15 + 2$$
$$V = 10$$

Então, a soma pedida é dada por:

$$S_F = 360^\circ \cdot (V - 2)$$
$$S_F = 360^\circ \cdot (10 - 2)$$
$$S_F = 2880^\circ$$

Número de Diagonais

Diagonal de um poliedro é um segmento de reta que une dois vértices não pertinentes a uma mesma face.
A quantidade total de diagonais de um poliedro convexo é dada por:

$$D = C_{v,2} - \sum d_f - A$$

Onde:
D é o número total de diagonais do poliedro;
$C_{v,2}$ é a combinação do número de vértices tomados 2 a 2;
$\sum d_f$ é o número total de diagonais de todas as faces;
A é o número de arestas.

Exemplo: Quantas diagonais possui um poliedro convexo composto de 3 faces pentagonais, 3 faces quadrangulares e uma face triangular?

Resolução:
$3\,F_5 \rightarrow$ 15 lados
$3\,F_4 \rightarrow$ 12 lados
$1\,F_3 \rightarrow$ $\underline{3}$ lados
30 lados $\xrightarrow{\div 2}$ $A = 15$

Como $F = 7$, pela relação de Euler:
$F + V = A + 2$
$7 + V = 15 + 2$
$V = 10$

$$S_F = 360^\circ . (V - 2)$$

Onde S_F é a soma dos ângulos internos de todas as faces e V o número de vértices do poliedro.

Exemplo: Seja determinar a soma dos ângulos internos de todas as faces de um heptaedro convexo que tem duas faces pentagonais e as demais quadrangulares.

$$C_{v,2} = C_{10,2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 . 9 . 8!}{2 . 1 . 8!} = 45$$

Da Geometria Plana, o número de diagonais de um polígono convexo é dado por:

$d = \frac{n . (n-3)}{2}$, onde n é o número de lados do polígono.

No nosso caso, cada F_5 tem:

$d = 5 . \frac{(5-3)}{2} = 5$ diagonais

Cada F_4 tem:

$d = 4 . \frac{(4-3)}{2} = 2$ diagonais

e F_3 não tem diagonais.

Portanto:

$\Sigma d_i = 3 . 5 + 3 . 2 + 0 = 21$

Daí:

$D = C_{v,2} - \Sigma d_i - A = 45 - 21 - 15$

$D = 9$

Exercícios

1) Quais afirmativas abaixo são verdadeiras?

(I) A projeção ortogonal de uma reta num plano é uma reta.

(II) Distância entre duas retas reversas é a perpendicular comum a essas retas.

(III) A distância entre dois planos só é definida se esses planos são paralelos.

(IV) Duas retas distintas determinam um plano.

(V) Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

(VI) Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.

2) Um matemático ao chegar a um bar temático notou que havia mesas com 3, 4, 5 e 6 pernas. Como não estava disposto a ficar colocando calços sob as pernas das mesas para que elas não balançassem, embora o chão fosse plano, usou seus conhecimentos geométricos e, sem pestanejar, escolheu uma mesa que tivesse exatamente

a) 3 pernas.
b) 4 pernas.
c) 5 pernas.
d) 6 pernas.

3) Em uma sala de aula, quantos diedros existem, formados por paredes, assoalho e teto?

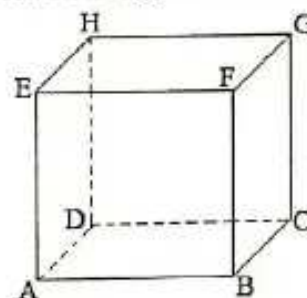
4) Quantas arestas possui o poliedro regular cuja soma dos ângulos internos de todas as faces vale 3600°?

5) A soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo é 4.320°. Sabendo que o número de arestas desse poliedro excede em duas unidades o dobro do número de faces, determine o número de vértices, faces e arestas desse poliedro.

6) Considere três poliedros regulares convexos distintos, com arestas de mesma medida, limitados apenas por faces triangulares. Se a soma das áreas de todas as faces desses poliedros é igual a 96 cm², a área total de um hexaedro...

7) Existem quatro poliedros regulares não convexos. São eles: o pequeno dodecaedro estrelado, o grande dodecaedro estrelado, o grande dodecaedro e o icosaedro estrelado. Assim sendo, contando-se os poliedros regulares não semelhantes, convexos e não convexos, obtemos um total de

a) 5.
b) 8.
c) 9.
d) 10.
e) 12.

8) Considere o hexaedro regular e as afirmativas abaixo.

I - As retas suportes das arestas $\overline{BF}$ e $\overline{AD}$ são perpendiculares.

II - As retas suportes das arestas $\overline{AE}$ e $\overline{EH}$ são ortogonais.

III - A retas suportes das diagonais $\overline{AH}$ e $\overline{BG}$ são reversas.

O número de afirmativas verdadeiras é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

9) Quantos pares de retas reversas contêm as arestas de um tetraedro regular? E de um hexaedro regular?

10) O cubo-octaedro é um poliedro convexo que possui 6 faces quadrangulares e 8 triangulares. Determine o número de arestas e vértices desse sólido.

11) **(PUC)** Um poliedro convexo possui duas faces pentagonais e cinco quadrangulares. O número de vértices desse poliedro é

a) 4
b) 6
c) 8
d) 9
e) 10

12) Quanto vale a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo formado por 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais?

13) **(PUC)** Um poliedro convexo é formado por faces quadrangulares e 4 faces triangulares. A soma dos ângulos de todas as faces é igual a 12 retos. Qual o número de arestas desse poliedro?

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

14) Considere um poliedro convexo formado por quatro trie...

...uro regular, com aresta congruente às deles, equivale, em cm^2, a

a) 14.
b) 16.
c) 21.
d) $24\sqrt{3}$
e) $36\sqrt{3}$

14) Conside... dros, dois ângulos tetraédricos e dois ângulos pentaédricos. Esse poliedro é um

a) octaedro.
b) eneaedro.
c) decaedro.
d) undecaedro.
e) dodecaedro.

15) Um poliedro convexo tem 15 faces. De dois de seus vértices partem 5 arestas, de quatro outros, partem 4 arestas e dos restantes, partem 3 arestas. Quantas arestas possui esse poliedro?

16) Numa publicação científica, de 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares, como numa bola de futebol. Essa molécula foi denominada "fulereno", em homenagem ao arquiteto norte-americano B. Fuller. Quantos são os átomos de carbono dessa molécula e qual o número de ligações entre eles?

17) **(ENEM)** Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

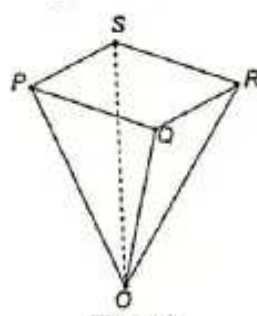
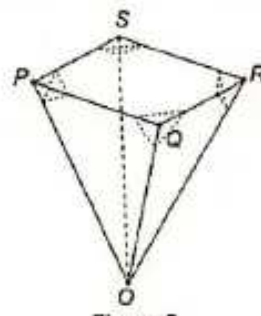



Figura 1

Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) 9, 20 e 13.
b) 9, 24 e 13.
c) 7, 15 e 12.
d) 10, 16 e 5.
e) 11, 16 e 5.

18) **(ENEM)** Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces. Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6
b) 8
c) 14
d) 24
e) 30

19) **(ENEM)** Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler $V - A + F = 2$, em que V, A e F são os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número ...

20) **(UERJ)** Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.

Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo.

A soma $V + F + A$ é igual a:

a) 102
b) 106
c) 110
d) 112

21) Quantas diagonais possui o dodecaedro regular?

22) Quantas diagonais possui um poliedro convexo que possui exatamente 10 faces triangulares e 10 faces pentagonais?

23) **(IME)** Calcule o número de diagonais do "poliedro de Leonardo da Vinci". O poliedro da figura (uma invenção de Leonard da Vinci, utilizado modernamente na fabricação de bolas de futebol) tem como faces 20 hexágonos e 12 pentágonos.

24) **(ITA)** Um poliedro convexo de 16 arestas é formado de faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido, dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo m e n, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:

a) $m = 9$ e $n = 7$
b) $m = 9$ e $n = 9$
c) $m = 8$ e $n = 10$
d) $m = 10$ e $n = 8$
e) $m = 7$ e $n = 9$

25) **(UERJ)** Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a um terço da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras.

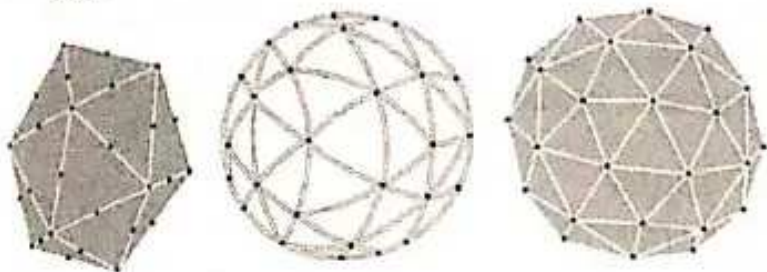
de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces?

a) $2V - 4F = 4$
b) $2V - 2F = 4$
c) $2V - F = 4$
d) $2V + F = 4$
e) $2V + 5F = 4$

Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha.

Depois de pronta, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

a) 7,0 cm
b) 6,3 cm
c) 4,9 cm
d) 2,1 cm

26) **(UERJ)** Considere o icosaedro abaixo, construído em plástico inflável, cujos vértices e pontos médios de todas as arestas estão marcados.

A partir dos pontos médios, quatro triângulos equiláteros congruentes foram formados em cada face do icosaedro.

Admita que o icosaedro é inflado até que todos os pontos marcados fiquem sobre a superfície de uma esfera, e os lados dos triângulos tornem-se arcos de circunferências.

Observe agora que, substituindo-se esses arcos por segmentos de reta, obtém-se uma nova estrutura poliédrica de faces triangulares, denominada geodésica.

O número de arestas dessa estrutura é igual a:

a) 90
b) 120
c) 150
d) 180

27) **(UERJ)** Para construir um poliedro convexo, um menino dispõe de folhas retangulares de papel de seda, cada uma com 56 cm de comprimento por 32 cm de largura, e de 9 varetas de madeira, cada uma com 40 cm de comprimento.

Na construção da estrutura desse poliedro, todas as faces serão triangulares e cada aresta corresponderá a uma vareta.

Admita que o menino usará as 9 varetas e que todas as faces serão revestidas com o papel de seda.

Determine o número mínimo de folhas do papel de seda necessárias para revestir o poliedro.

28) Um artista plástico deseja, a partir de um icosaedro regular convexo de aresta 30 cm, criar um sólido que será utilizado em uma exposição. Para essa construção foram seguidas algumas etapas:

1ª) Selecionou um vértice qualquer do icosaedro.

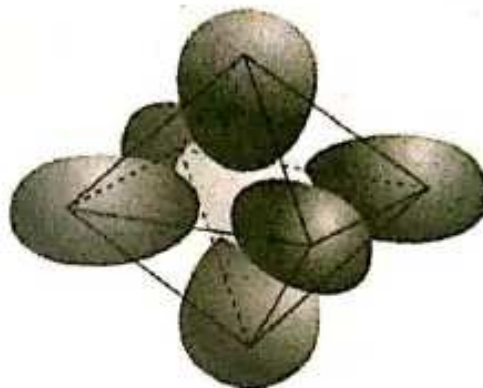
2ª) A partir desse vértice marcou, sobre todas as arestas que nele concorrem, pontos distantes 10 cm dele.

3ª) Fez uma secção plana passando por todos os pontos marcados, dividindo o poliedro original em dois sólidos.

4ª) Descartou o poliedro que continha o vértice escolhido.

Ele repetiu esse procedimento para todos os vértices do icosaedro e obteve um sólido cujo número de diagonais era igual a

29) **(UERJ)** A molécula de hexafluoreto de enxofre (SF_6) tem a forma geométrica de um octaedro regular.

Os centros dos átomos de flúor correspondem aos vértices do octaedro, e o centro do átomo de enxofre corresponde ao centro desse sólido, como ilustra a figura abaixo.

Considere que a distância entre o centro de um átomo de flúor e o centro do átomo de enxofre seja igual a 1,53 angstrom.

Assim, a medida da aresta desse octaedro, em angstrom, é aproximadamente igual a:

a) 1,53
b) 1,79
c) 2,16
d) 2,62

Gabarito

1) II, III e VI
2) a
3) 12
4) 30
5) V = 14, F = 10 e A = 22
6) d
7) c
8) a
9) 3 e 24
10) A = 24 e V = 12
11) e
12) 2880°
13) a
14) b
15) 31
16) 60 átomos e 90 ligações
17) a
18) c
19) c
20) d
21) 100
22) 141
23) 1440
24) b
25) b
26) b
27) 3
28) c
29) c

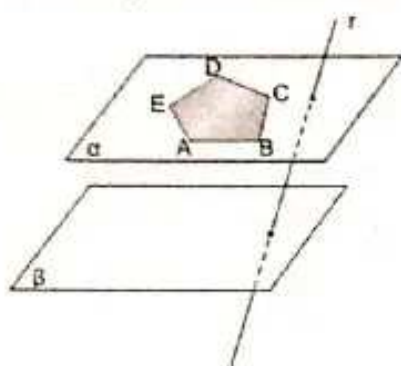
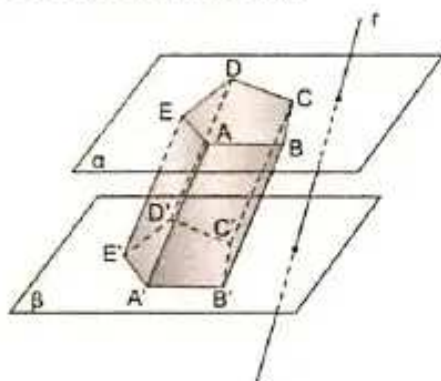
Anotações

a) 1.770.
b) 1.560.
c) 1.440.
d) 1.320.
e) 1.260.

Capítulo XIII

PRISMAS

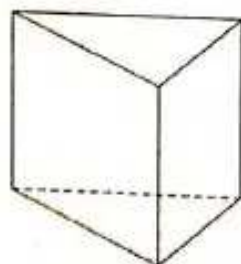
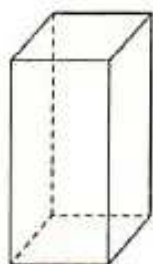
Definição

Consideremos dois planos paralelos e distintos α e β, um polígono *P* pertinente ao plano α e uma reta **r** não paralela a α.

Denominamos **prisma** à reunião de todos os segmentos paralelos a **r** que possuem um dos extremos em um ponto qualquer de *P* e outro extremo em β.

As **bases** de um prisma são os polígonos congruentes *P* e *P'*, enquanto as **arestas das bases** são os lados desses polígonos.

A reunião dos segmentos paralelos a **r** que tenham um dos extremos num dos lados de *P* é chamada **superfície lateral**, a qual é constituída de paralelogramos chamados **faces laterais**. Os lados desses paralelogramos paralelos à reta **r** são as **arestas laterais**.

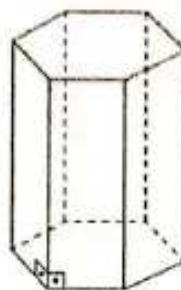
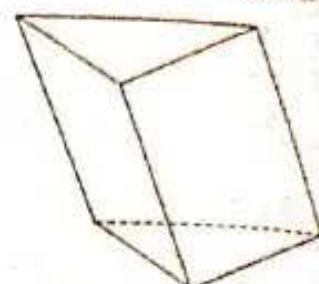
A distância entre os planos α e β que contêm as bases é a **altura** do prisma.

Nomenclatura

O prisma tem sua nomenclatura relacionada ao gênero dos polígonos que servem como bases. Assim, um prisma que tem como bases triângulos é um **prisma triangular**; será **quadrangular**, se as bases forem quadriláteros; **pentagonal**, se tiver pentágonos como bases, e, assim, sucessivamente.

Prisma Triangular

Prisma Quadrangular

Prisma Reto

Todo prisma cujas arestas laterais são perpendiculares às bases é chamado **prisma reto**. Caso contrário, será dito **oblíquo**.

As faces laterais de um prisma reto são retângulos.

Prisma Reto Prisma Triangular Oblíquo

Quando as bases de um prisma reto são polígonos regulares, o prisma é chamado prisma regular.

Seções

A interseção de um prisma com um plano que intercepte todas as suas arestas laterais é chamada **seção**. Quando a seção for paralela às bases do prisma, ela será chamada **seção transversal**. Se a seção for perpendicular às arestas laterais, ela se denominará **seção reta**.

Áreas de um prisma

A **área lateral** (S_L) de um prisma é a soma das áreas de suas faces laterais, enquanto a área total (S_T) é a soma da área lateral com as áreas das bases (S_B).

> **NOTA:** Por achar desnecessário, não vamos mostrar fórmulas para o cálculo das áreas acima mencionadas, pois elas podem ser determinadas, utilizando-se os conceitos aprendidos no capítulo de áreas da Geometria Plana.

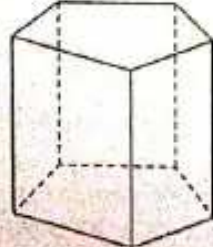
Exemplo:

Determine as áreas da base, lateral e total de um prisma triangular regular de 6 cm de altura e aresta da base igual a 8 cm.

Resolução:

Devemos lembrar que, pelo fato de o prisma triangular do exemplo ser regular, sua base é um triângulo equilátero de 8 cm de lado. Então:

$$S_B = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \therefore \quad S_B = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

A superfície lateral compõe-se de 3 retângulos congruentes:

Prisma Pentagonal　　Prisma Hexagonal

$S_L = 3 \times b \cdot h = 3 \times 8 \cdot 6 \therefore S_L = 144\ cm^2$

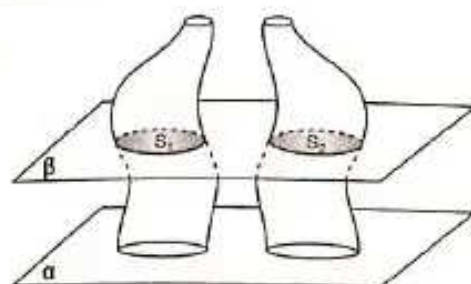
A área total é a soma das áreas de todas as faces:

$S_T = S_L + 2 \cdot S_B = 144 + 2 \cdot 16\sqrt{3} \therefore$

$S_T = 144 + 32\sqrt{3}\,cm^2$

Princípio de Cavalieri

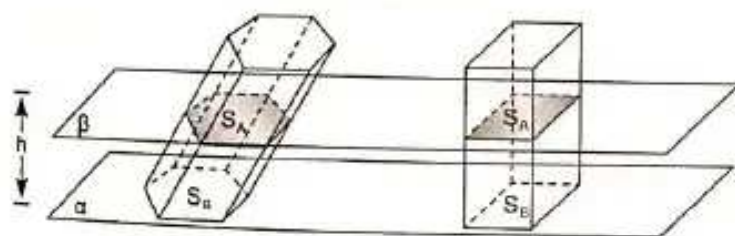
A seguir, vamos enunciar o **princípio de Cavalieri**, que será de grande valia no entendimento da obtenção do volume de um prisma.

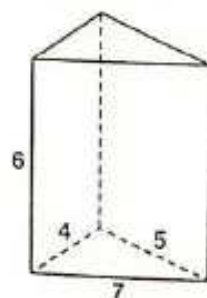
"Dados dois sólidos apoiados num mesmo plano a, se todo plano paralelo a a determinar nos sólidos seções transversais equivalentes, então tais sólidos terão o mesmo volume".

$\forall \beta // \alpha, S_1 = S_2 \rightarrow V_1 = V_2$

Volume de um prisma

Dado um prisma de área de base S_B e altura **h**, apoiado num plano α, é sempre possível construir um paralelepípedo de área de base S_B e altura **h**. Pelo princípio de Cavalieri, aludido anteriormente, temos que:

$$V_{PRISMA} = V_{PARALELEPÍPEDO}$$

$$\boxed{V_{PRISMA} = S_B \cdot h}$$

Exemplo:

Determinar o volume de um prisma triangular reto cujas arestas da base medem 4 cm, 7 cm e 5 cm, e cuja altura mede 6 cm.

Resolução:

A base é um triângulo de lados 4, 5 e 7. Podemos determinar sua área, usando a fórmula de Heron:

$S_B = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} =$

$= \sqrt{8 \cdot (8-4) \cdot (8-5) \cdot (8-7)}$

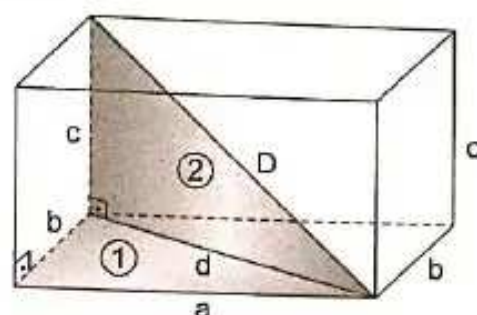
Paralelepípedo

Todo prisma cujas bases são paralelogramos é chamado **paralelepípedo**. Os principais paralelepípedos são:

a) **paralelepípedo retângulo**: é o prisma reto, cujas bases são retângulos;

b) **cubo**: paralelepípedo retângulo cujas faces são quadrados.

Estudo dos paralelepípedos retângulos

Um paralelepípedo retângulo possui 12 arestas, congruentes 4 a 4. Assim:

$$S_T = 2 \cdot (ab + bc + ac)$$

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras nos triângulos (1) e (2), obtemos:

$d^2 = a^2 + b^2$　　(I)

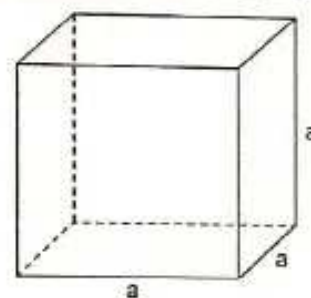
$D^2 = d^2 + c^2$　　(II)

Substituindo-se (I) em (II):

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$V = a \cdot b \cdot c$　　ou　　$V = S_B \cdot h$

Sabemos que o cubo é um paralelepípedo retângulo, com todas as arestas congruentes. Assim, podemos aplicar as fórmulas anteriores, fazendo-se b = c = a.

$S_L = 4a^2$

$S_T = 6a^2$

$D = a\sqrt{3}$

$V = a^3$

Exemplos:

1) Dado um paralelepípedo retângulo de arestas iguais a 3 cm, 4 cm e 12 cm, determine a sua área total, a diagonal e o volume.

Resolução: a = 3; b = 4; c = 12

$S_T = 2\,(ab + bc + ac) = 2\,(3 \cdot 4 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 12)$

$S_b = 4\sqrt{6}m^2$

$V = S_b \cdot h = 4\sqrt{6} \cdot 6$

$V = 24\sqrt{6}cm^3$

$S_T = 192 \text{ cm}^2$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$

$D = 13 \text{ cm}$

$V = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 12$

$V = 144 \text{ cm}^3$

2) A soma de todas as arestas de um cubo vale 72 cm. Determine a área total, a diagonal e o volume.

Resolução:

Sabe-se que o cubo tem as 12 arestas iguais a **a**. Então:

$12 \cdot a = 72$

$a = 6 \text{ cm}$

$S_T = 6a^2 = 6 \cdot 6^2$

$\mathbf{S_T = 216 \text{ cm}^2}$

$D = a\sqrt{3}$

$\mathbf{D = 6\sqrt{3} \text{ cm}}$

$V = a^3 = 6^3$

$\mathbf{V = 216 \text{ cm}^3}$

Exercícios

1) Determine a área total, o volume e a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões 3 cm, 4 cm e 12 cm.

2) Determine a área total, o volume e a medida da diagonal de um cubo em que a soma das medidas de todas as suas arestas vale 48 cm.

3) Considerando que, em um paralelepípedo retângulo, a soma das medidas de todas as arestas é igual a S, a área total é igual a A e a diagonal mede D, é correto afirmar que:

a) $S^2 - D^2 = 16A$.
b) $S^2 + D^2 = 16A$.
c) $S^2 - D^2 + A = 16$.
d) $S^2 = 16(D^2 - A)$.
e) $S^2 = 16(D^2 + A)$.

4) Determine a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo em que a soma das medidas de todas as arestas vale 56 cm e a área total vale 118 cm².

5) Determine a área total e o volume de um cubo cuja diagonal mede 12 cm.

6) A medida do volume de um cubo, expressa em m³, é igual à medida de sua área total, expressa em m². Determine a medida da diagonal desse sólido.

7) **(PUC)** Um cubo de aresta **a** tem volume 24.

Assinale o valor do volume de um cubo de aresta $\frac{a}{3}$.

a) $\frac{8}{9}$

b) $\frac{9}{3}$

c) 8

d) 24

e) 72

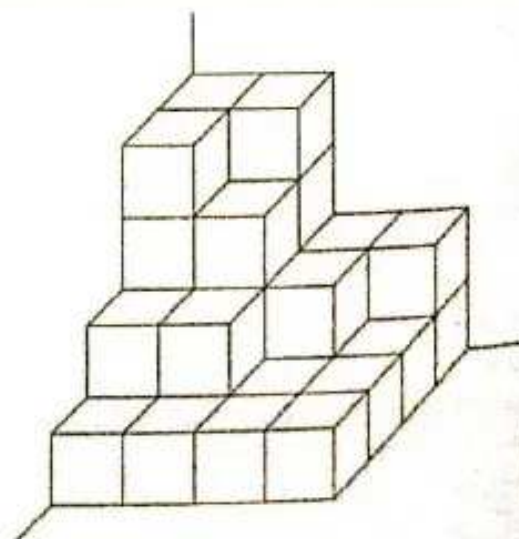
8) **(ENEM)** Em uma confeitaria, um cliente comprou um cupcake (pequeno bolo no formato de um tronco de cone regular mais uma cobertura, geralmente composta por um creme), semelhante ao apresentado na figura:

Como o bolinho não seria consumido no estabelecimento, o vendedor verificou que as caixas disponíveis para embalar o doce eram todas em formato de blocos retangulares. Cujas medidas estão apresentadas no quadro:

Embalagem	Dimensões (comprimento × largura × altura)
I	8,5 cm × 12,2 cm × 9,0 cm
II	10 cm × 11 cm × 15 cm
III	7,2 cm × 8,2 cm × 16 cm
IV	7,5 cm × 7,8 cm × 9,5 cm
V	15 cm × 8 cm × 9 cm

A embalagem mais apropriada para armazenar o doce, de forma a não deformá-lo e com menor desperdício de espaço na caixa, é

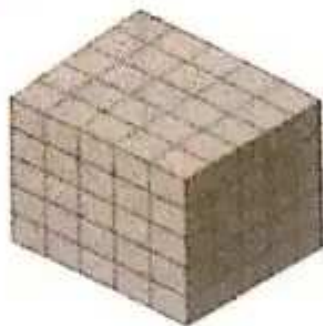
a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

9) **(PUC)** O diagrama abaixo mostra uma pilha de caixas cúbicas iguais, encostadas no canto de um depósito.

Se a aresta de cada caixa é de 30 cm, então o volume

e) 72

total dessa pilha, em metros cúbicos, é de:

a) 0,513
b) 0,729
c) 0,810
d) 0,837
e) 0,864

10) **(ENEM)** Uma fábrica de rapadura vende seus produtos empacotados em uma caixa com as seguintes dimensões: 25 cm de comprimento; 10 cm de altura e 15 cm de profundidade. O lote mínimo de rapaduras vendido pela fábrica é um agrupamento de 125 caixas dispostas conforme a figura.

Qual é o volume do lote mínimo comercializado pela fábrica de rapaduras?

a) $3\,750\text{ cm}^3$
b) $18\,750\text{ cm}^3$
c) $93\,750\text{ cm}^3$
d) $468\,750\text{ cm}^3$
e) $2\,343\,750\text{ cm}^3$

11) **(ENEM)** Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

Figura 1

Figura 2

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada. Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

a) 12,5 m.
b) 17,5 m.
c) 25,0 m.
d) 22,5 m.
e) 32,5 m.

12) **(ENEM)** Uma fábrica que trabalha com matéria-prima de fibra...

Em relação ao antigo modelo, o volume do novo modelo é

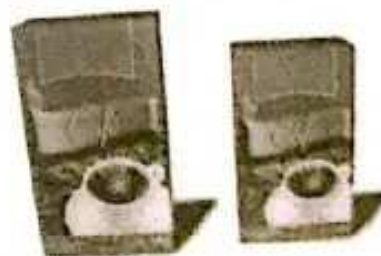
a) oito vezes maior.
b) quatro vezes maior.
c) duas vezes maior.
d) a metade.
e) a quarta parte.

13) **(ENEM)** Um agricultor possui em sua fazenda um silo para armazenar sua produção de milho. O silo, que na época da colheita é utilizado em sua capacidade máxima, tem a forma de um paralelepípedo retângulo reto, com os lados da base medindo L metros e altura igual a h metros. O agricultor deseja duplicar a sua produção para o próximo ano e, para isso, irá comprar um novo silo, no mesmo formato e com o dobro da capacidade do atual. O fornecedor de silos enviou uma lista com os tipos disponíveis e cujas dimensões são apresentadas na tabela:

Tipo de silo	Lado (em metros)	Altura (em metros)
I	L	2h
II	2L	h
III	2L	2h
IV	4L	h
V	L	4h

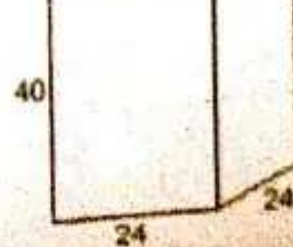
Para entender às suas necessidades, o agricultor deverá escolher o silo de tipo

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

14) **(UERJ)** As figuras a seguir mostram dois pacotes de café em pó que têm a forma de paralelepípedos retângulos semelhantes.

Se o volume do pacote maior é o dobro do volume do menor, a razão entre a medida da área total do maior pacote e a do menor é igual a:

a) $\sqrt[3]{3}$
b) $\sqrt[3]{4}$
c) $\sqrt{6}$
d) $\sqrt{8}$

15) **(ENEM)** Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostrada na figura.

...ria de vidro possui diversos modelos e tamanhos de caixa-d'água. Um desses modelos é um prisma reto com base quadrada. Com objetivo de modificar a capacidade de armazenamento de água, está sendo construído um novo modelo, com as medidas das arestas da base duplicadas, sem a alteração da altura, mantendo a mesma forma.

Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

a) 14,4%
b) 20,0%
c) 32,0%
d) 36,0%
e) 64,0%

16) **(ENEM)** Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

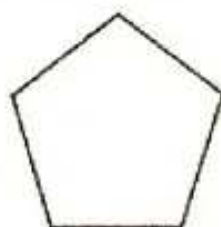
Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

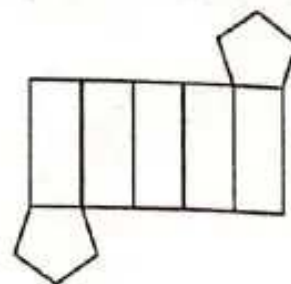
O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

a) 450.
b) 500.
c) 600.
d) 750.
e) 1 000.

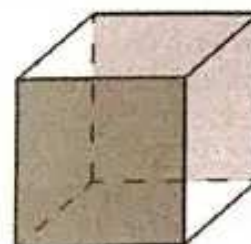
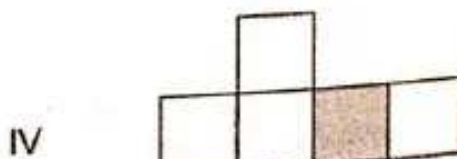
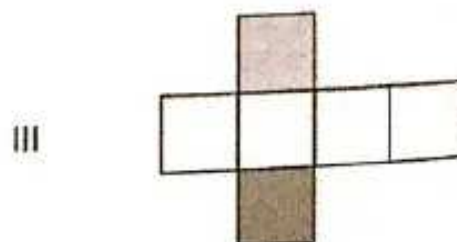
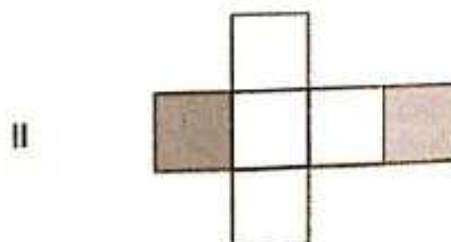
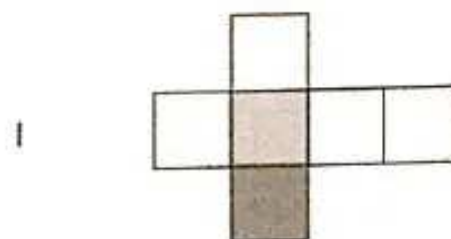
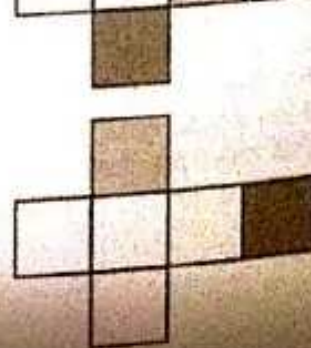
17) **(PUC)** O que acontece com o volume de um paralelepípedo quando aumentamos a largura e a altura em 10% e diminuímos a profundidade em 20%?

a) Não se altera.
b) Aumenta aproximadamente 3%.
c) Diminui aproximadamente 3%.
d) Aumenta aproximadamente 8%.
e) Diminui aproximadamente 8%.

18) **(ENEM)** Um jogo entre dois jogadores tem as seguintes regras: a) o primeiro jogador pensa em uma forma geométrica, desenha apenas uma parte da forma e fornece uma dica para que o segundo jogador termine o desenho; b) se o segundo jogador conseguir concluir o desenho, ganha um ponto; caso contrário, quem ganha um ponto é o primeiro jogador. Dois amigos, Alberto e Dora, estão jogando o referido jogo. Alberto desenhou a figura a seguir e deu a seguinte dica a Dora: "a forma em que pensei é a planificação de um prisma reto".

Dora completou o desenho com

19) **(ENEM)** Um lojista adquiriu novas embalagens para presentes que serão distribuídas aos seus clientes. As embalagens foram entregues para serem montadas e têm forma dada pela figura.

Após montadas, as embalagens formarão um sólido com quantas arestas?

a) 10
b) 12
c) 14
d) 15
e) 16

20) **(ENEM)** Uma empresa que embala seus produtos em caixas de papelão, na forma de hexaedro regular, deseja que seu logotipo seja impresso nas faces opostas pintadas de cinza, conforme a figura:

A gráfica que fará as impressões dos logotipos apresentou as seguintes sugestões planificadas:

a) um pentágono e um retângulo.
b) um pentágono e quatro retângulos.
c) um pentágono e cinco retângulos.
d) dois pentágonos e quatro retângulos.
e) dois pentágonos e cinco retângulos.

Que opção sugerida pela gráfica atende ao desejo da empresa?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

21) **(ENEM)** Uma empresa necessita colorir parte de suas embalagens, com formato de caixas cúbicas, para que possa colocar produtos diferentes em caixas distintas pela cor, utilizando para isso um recipiente com tinta, conforme Figura 1. Nesse recipiente, mergulhou-se um cubo branco, tal como se ilustra na Figura 2. Desta forma, a parte do cubo que ficou submersa adquiriu a cor da tinta.

Figura 1

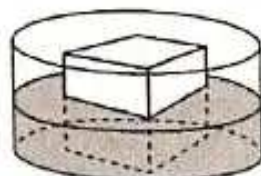
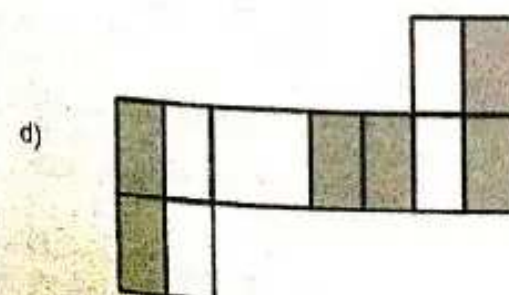
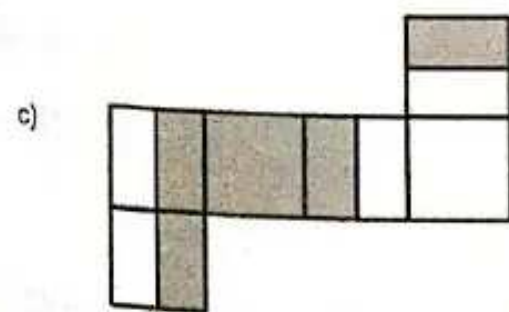
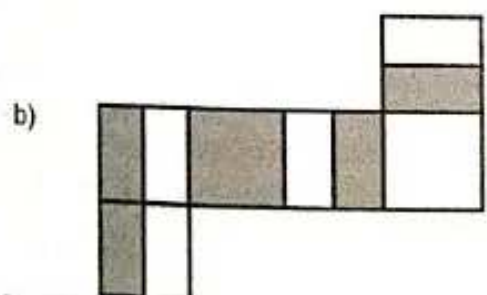
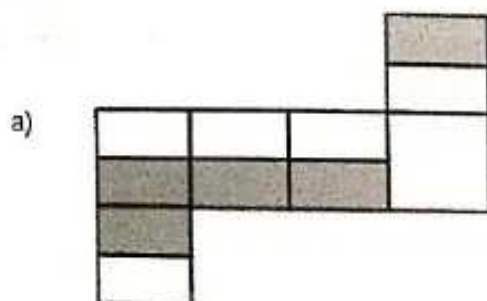
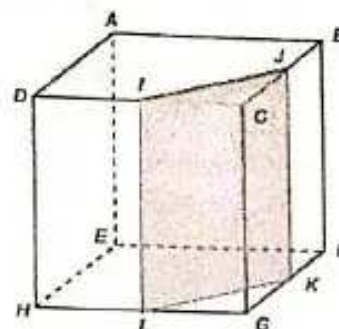
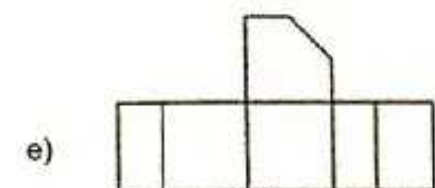
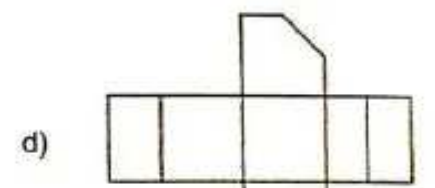
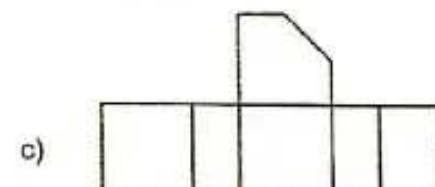
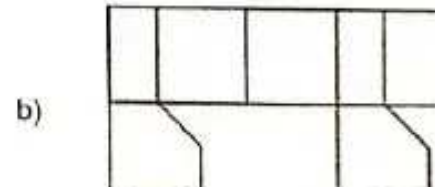
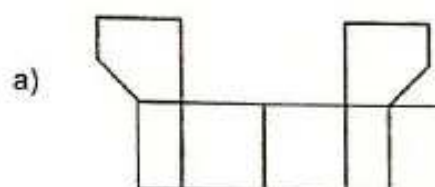
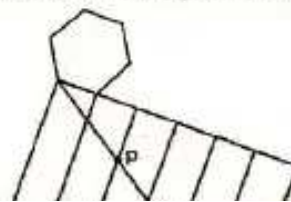
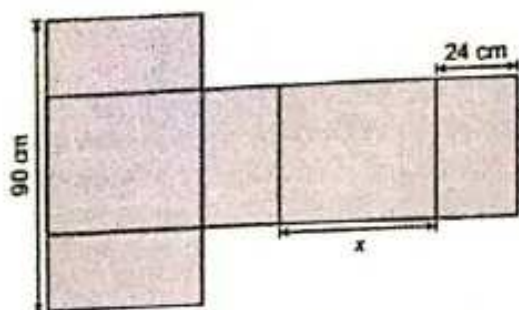



Figura 2

Qual é a planificação desse cubo após submerso?

22) **(ENEM)** Corta-se um cubo ABCDEFGH por um plano ortogonal às faces ABCD e EFGH que contém os pontos médios I e J das arestas CD e BC e elimina-se, em seguida, o prisma IJCLKG, obtendo-se o prisma ABJIDEFKLH.

A planificação da superfície do prisma resultante ABJIDEFKLH corresponde à figura

23) A figura abaixo corresponde à planificação de um prisma regular hexagonal de altura 2a e perímetro da base igual a 3a.

e)

Determine a distância entre os pontos P e Q no prisma.

24) **(ENEM)** Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.

O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é

a) 25.
b) 33.
c) 42.
d) 45.
e) 49.

25) **(ENEM)** O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

a) 18.
b) 26.
c) 30.
d) 35.
e) 60.

26) **(ENEM)** O banheiro de uma escola pública, com paredes e piso em formato retangular, medindo 5 metros de largura, 4 metros de comprimento e 3 metros de altura, precisa de revestimento no piso e nas paredes internas, excluindo a área da porta, que mede 1 metro de largura por 2 metros de altura. Após uma tomada de preços com cinco fornecedores, foram verificadas as seguintes combinações de azulejos para as paredes e de lajotas para o piso, com os preços dados em reais por metro quadrado, conforme a tabela.

Fornecedor	Azulejo (R$/m²)	Lajota (R$/m²)
A	31,00	31,00
B	33,00	30,00
C	29,00	39,00
D	30,00	33,00

27) **(ENEM)** A caixa-d'água de uma casa tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e possui dimensões externas (comprimento, largura e altura) de, respectivamente, 4,0m, 3,0m e 2,5m. É necessária a impermeabilização de todas as faces externas dessa caixa, incluindo a tampa. O fornecedor do impermeabilizante informou ao dono da casa que seu produto é fornecido em galões, de capacidade igual a 4,0 litros. Informou, ainda, que cada litro impermeabiliza uma área de 17 700 cm² e são necessárias 3 demãos de produto para garantir um bom resultado.

Com essas informações, para obter um bom resultado no trabalho de impermeabilização, o dono da casa precisará comprar um número mínimo de galões para a execução desse serviço igual a

a) 9.
b) 13.
c) 19.
d) 25.
e) 45.

28) **(ENEM)** O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1:100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será

a) 6.
b) 600.
c) 6 000.
d) 60 000.
e) 6 000 000.

29) **(ENEM)** Uma pessoa comprou um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 40 cm de comprimento, 15 cm de largura e 20 cm de altura. Chegando a casa, colocou no aquário uma quantidade de água igual à metade de sua capacidade. A seguir, para enfeitá-lo, irá colocar pedrinhas coloridas, de volume igual a 50 cm³ cada, que ficarão totalmente submersas no aquário.

Após a colocação das pedrinhas, o nível da água deverá ficar a 6 cm do topo do aquário.

O número de pedrinhas a serem colocadas deve ser igual a

a) 48.
b) 72.
c) 84.
d) 120.
e) 168.

30) **(ENEM)** Uma caixa-d'água em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 4 m de comprimento, 3 m de largura e 2 m de altura, necessita de higienização. Nessa operação, a caixa precisará ser esvaziada em 20 min, no máximo. A retirada da água será feita com o auxílio de uma bomba de vazão constante, em que vazão é o volume do líquido que passa pela bomba por unidade de tempo.

A vazão mínima, em litro por segundo, que essa bomba deverá ter para que a caixa seja esvaziada no tempo estipulado é

E	40,00	29,00

Desejando-se efetuar a menor despesa total, deverá ser escolhido o fornecedor

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

a) 2.
b) 3.
c) 5.
d) 12.
e) 20.

31) **(UERJ)** Para transportar areia, uma loja dispõe de um caminhão cuja caçamba tem 1 m de altura e a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada. A maior distância entre dois pontos desse paralelepípedo é igual a 3 m.

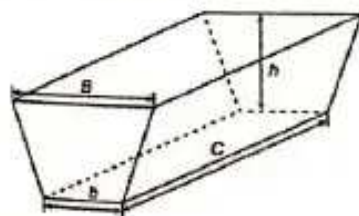
Determine a capacidade máxima, em metros cúbicos, dessa caçamba.

32) **(ENEM)** O recinto das provas de natação olímpica utiliza a mais avançada tecnologia para proporcionar aos nadadores as condições ideais. Isso passa por reduzir o impacto da ondulação e das correntes provocadas pelos nadadores no seu deslocamento. Para conseguir isso, a piscina de competição tem uma profundidade uniforme de 3 m, que ajuda a diminuir a "reflexão" da água (o movimento contra uma superfície e o regresso no sentido contrário, atingindo os nadadores), além dos já tradicionais 50 m de comprimento e 25 m de largura. Um clube deseja reformar sua piscina de 50 m de comprimento, 20 m de largura e 2 m de profundidade de forma que passe a ter as mesmas dimensões das piscinas olímpicas.

Disponível em: http://desporto.publico.pt.
Acesso em: 6 ago. 2012.

Após a reforma, a capacidade dessa piscina superará a capacidade da piscina original em um valor mais próximo de

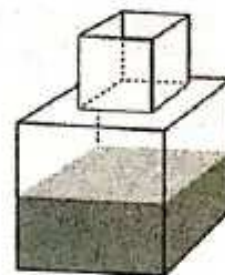
a) 20%.
b) 25%.
c) 47%.
d) 50%.
e) 88%.

33) **(ENEM)** Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.

Legenda:
b - largura do fundo
B - largura do topo
C - comprimento do silo
h - altura do silo

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

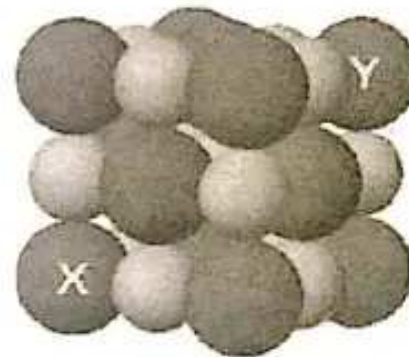
EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br.
Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

a) 110.
b) 125.
c) 130.
d) 220.
e) 260.

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

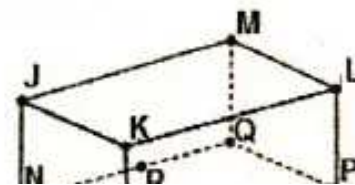
a) 8
b) 10
c) 16
d) 18
e) 24

35) **(UERJ)** As esferas da figura abaixo representam os íons formadores de um cristal de cloreto de sódio.

Considere que o íon com maior número de camadas eletrônicas é representado pela esfera de maior raio e que a distância entre os núcleos dos íons X e Y vale $10\sqrt{3}$ unidades de comprimento.

O símbolo do elemento formador do íon de menor tamanho e a menor distância, na mesma unidade de comprimento, entre o núcleo de um cátion e o núcleo de um ânion, são:

a) Cl, $\sqrt{3}$
b) Cl, 5
c) Na, $\sqrt{3}$
d) Na, 5

36) Uma formiga encontra-se no vértice A da diagonal AB de um cubo de aresta a. Andando sempre em linha reta sobre a superfície do cubo, qual a menor distância a ser percorrida por ela até alcançar o ponto B?

37) **(ENEM)** Muitas pessoas, de modo descuidado, armazenam em caixas plásticas restos de alimentos em locais não apropriados, criando condições para o aparecimento de formigas e roedores. Suponha que uma formiga, localizada no vértice J de uma caixa plástica que ficou destampada, avista um torrão de açúcar no vértice P da caixa, conforme ilustra a figura seguinte. Caminhando sobre a superfície da caixa (arestas e lados) ela poderá seguir várias trajetórias até ele:

34) **(ENEM)** Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.

Observação: Considere que R é o ponto médio da aresta NQ.

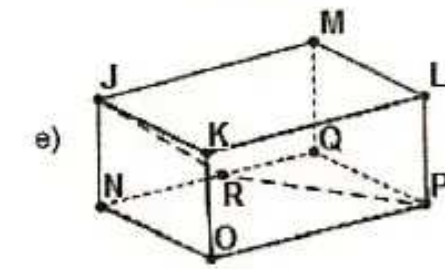
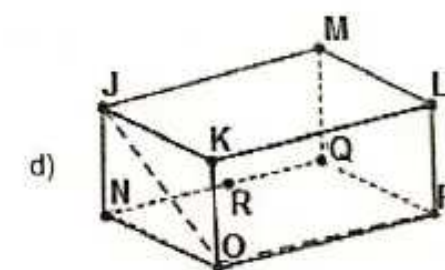
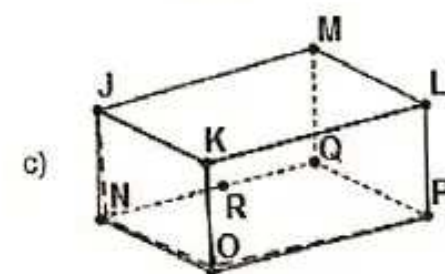
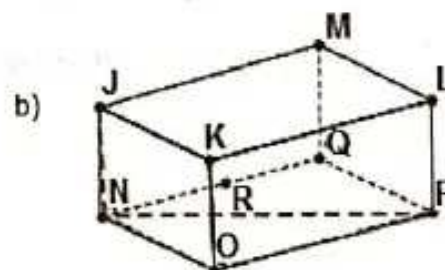
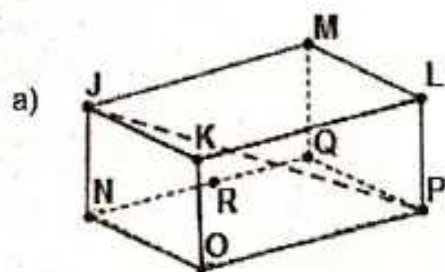
Para que o caminho percorrido pela formiga tenha o menor comprimento possível, ela deve seguir o caminho

a)

b)

c)

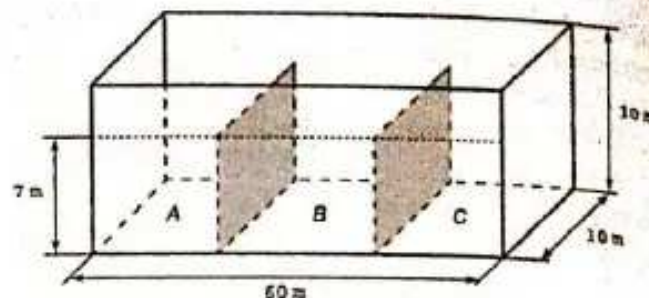
d)

e)

38) **(UERJ)** Um fabricante produz embalagens de volume igual a 8 litros no formato de um prisma reto com base quadrada de aresta a e altura h. Visando à redução de custos, a área superficial da embalagem é a menor possível. Nesse caso, o valor de a corresponde, em decímetros, à raiz real da seguinte equação:

$$4a - \frac{32}{a^2} = 0$$

As medidas da embalagem, em decímetros, são:

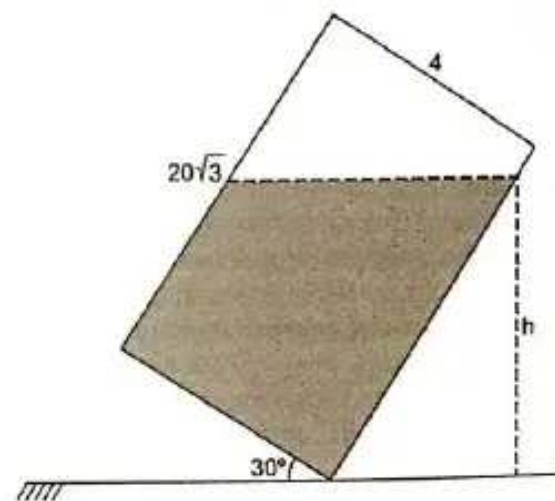
a) $a = 1 ; h = 2$
b) $a = 1 ; h = 4$
c) $a = 2 ; h = 4$
d) $a = 2 ; h = 2$

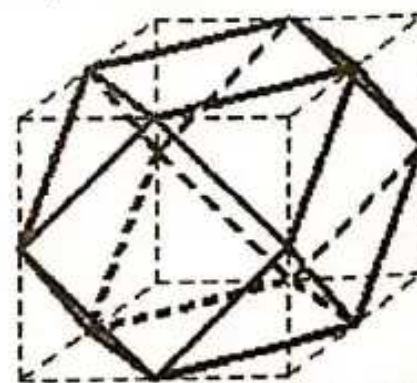
39) **(ENEM)** Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas

Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

a) $1,4 \times 10^3$ m³
b) $1,8 \times 10^3$ m³
c) $2,0 \times 10^3$ m³
d) $3,2 \times 10^3$ m³
e) $6,0 \times 10^3$ m³

40) **(FUVEST)** Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4 cm e altura $20\sqrt{3}$ cm, com $\frac{2}{3}$ de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de 30° com o solo (ver seção lateral a seguir).

Determine a altura h do nível da água em relação o solo.

41) **(CEFET)** Um cuboctaedro é um sólido cujas arestas se obtêm unindo os pontos médios das arestas adjacentes de um cubo (observe a figura).

Se V, F, A e S_T representam, respectivamente, o número de vértices, o número de faces, o número de arestas e a

de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.

superfície total do cuboctaedro, e se x é a ... ta do cubo original, indique a alternativa que representa corretamente a soma V + F + A e S_T (em função de x).

a) 40 e $x^2(4 + 0,75\sqrt{3})$
b) 50 e $x^2(4 + 0,75\sqrt{3})$
c) 40 e $x^2(3 + \sqrt{3})$
d) 50 e $x^2(3 + \sqrt{3})$

42) **(UERJ)** A embalagem de papelão de um determinado chocolate, representada na figura abaixo, tem a forma de um prisma pentagonal reto de altura igual a 5 cm.

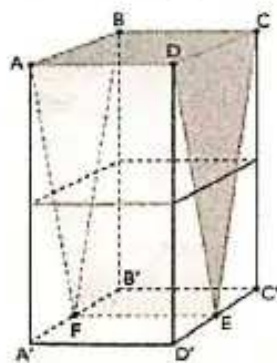
Em relação ao prisma, considere:

- cada um dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$ da base superior mede 120°;
- as arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ medem 10 cm cada.

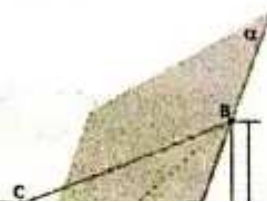
Considere, ainda, que o papelão do qual é feita a embalagem custa R$10,00 por m² e que $\sqrt{3} = 1,73$.

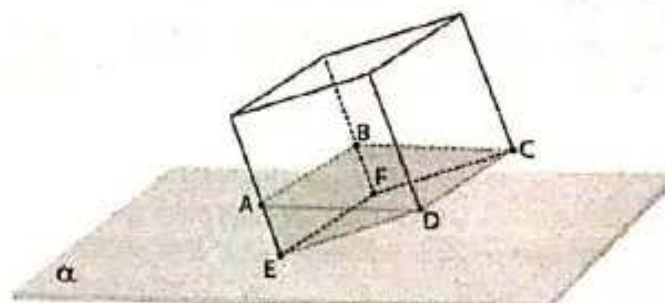
Na confecção de uma dessas embalagens, o valor, em reais, gasto somente com o papelão é aproximadamente igual a:

a) 0,50
b) 0,95
c) 1,50
d) 1,85

43) **(UERJ)** Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo ABCDA'B'C'D'. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos ADEF e BCEF, que passam pelos pontos médios F e E das arestas A'B' e C'D', respectivamente. A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o sólido ABCDEF, conforme indica a figura a seguir.

O volume do sólido ABCDEF, em cm³, é igual a:

a) 4
b) 6
c) 8
d) 12

44) **(UERJ)** Um prisma triangular reto ABCDEF foi dividido em duas partes por um plano α, de acordo com a imagem abaixo. Os ângulos $B\hat{A}C$ e $E\hat{D}F$ das bases do prisma são retos, e o plano α contém os pontos A, B e G, sendo que G pertence à aresta CF e dista 4 cm de C.

Calcule o volume, em cm³, do maior sólido definido pela separação estabelecida no prisma pelo plano α.

45) **(UERJ)** Um cubo de aresta EF medindo 8 dm contém água e está apoiado sobre um plano α de modo que apenas a aresta EF esteja contida nesse plano. A figura abaixo representa o cubo com a água.

Considere que a superfície livre do líquido no interior do cubo seja um retângulo ABCD com área igual a $32\sqrt{5}$ dm². Determine o volume total, em dm³, de água contida nesse cubo.

Gabarito

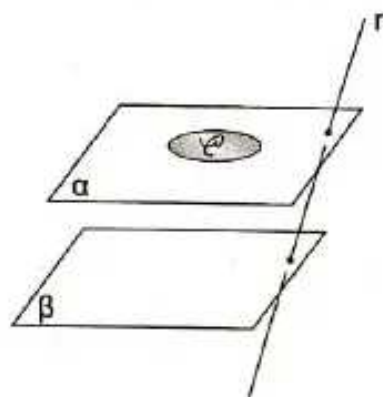
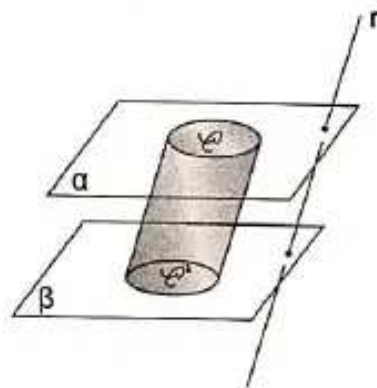
1) 192 cm², 144 cm³ e 13 cm
2) 96 cm², 64 cm³ e $4\sqrt{3}$cm
3) e
4) $\sqrt{78}$ cm
5) 288 cm² e 192 $\sqrt{3}$cm³
6) $6\sqrt{3}$ cm
7) a
8) d
9) e
10) d
11) a
12) b
13) a
14) b
15) d
16) c
17) c
18) c
19) d
20) c
21) c
22) e
23) $a\sqrt{2}$
24) e
25) a
26) d
27) d
28) e
29) a
30) e
31) 4 m²
32) e
33) a
34) b
35) d
36) $a\sqrt{5}$
37) e
38) d
39) d
40) 21 cm
41) d
42) b
43) c
44) 65 cm³
45) 128 dm³

Anotações

Capítulo XIV

CILINDROS

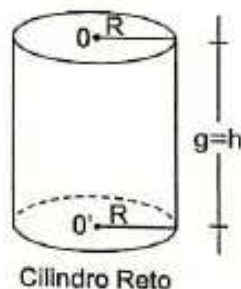
Definição

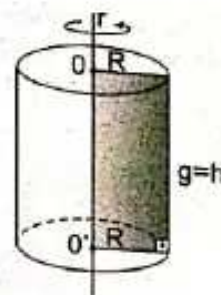
Consideremos dois planos paralelos distintos α e β, um círculo *C*, pertencente ao plano a e uma reta **r** não paralela a α.

Denominamos **cilindro circular** ou simplesmente **cilindro** à reunião de todos os segmentos paralelos a r que possuem um dos extremos num ponto qualquer de ***C*** e outro extremo em β.

As **bases** de um cilindro são os círculos **C** e **C'**.

Chamamos **geratriz** qualquer um dos segmentos paralelos a **r** que possuem um extremo na circunferência de *C*. A reunião de todas as geratrizes constitui a **superfície lateral** do cilindro.

A distância entre os planos α e β que contêm as bases é a **altura** do cilindro.

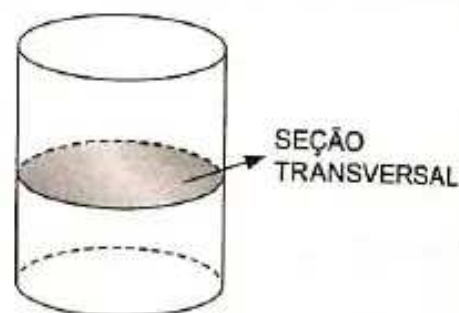
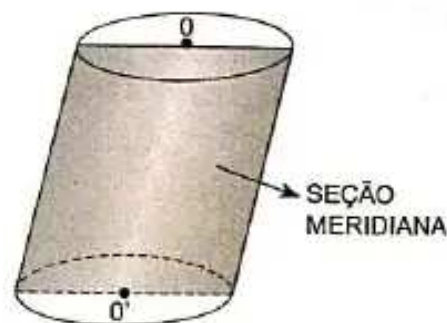
Cilindro Reto

Quando as geratrizes são perpendiculares às bases, temos um **cilindro reto**. Caso contrário, o cilindro é **oblíquo**.

Cilindro Reto

Cilindro de Revolução

A reta **r**, que contém o lado em torno do qual foi feita a revolução, é o **eixo** do cilindro.

Seções

A seção transversal (paralela às bases) de um cilindro circular é um círculo congruente às bases.

A seção meridiana (contém o eixo do cilindro) de um cilindro circular é um paralelogramo, e, no caso do cilindro de revolução, é um retângulo cuja base é o diâmetro da base do cilindro e cuja altura é igual à altura do cilindro.

Quando a seção meridiana é um quadrado, o cilindro é chamada **cilindro equilátero**. Para que isto ocorra, devemos ter **h = 2R**.

Área Lateral

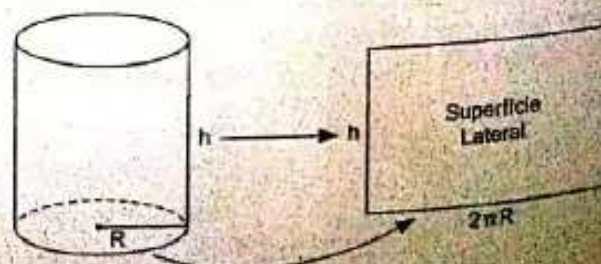
A superfície lateral de um cilindro reto de altura **h** e raio da base **R** pode ser planificada segundo um retângulo de base

O sólido gerado pela revolução completa de um retângulo em torno de um de seus lados é chamado **cilindro de revolução**.

A base do retângulo gerador é o raio (**R**) da base do cilindro, enquanto o lado que gera a superfície lateral do cilindro é a geratriz (**g**), que representa a própria altura (**h**) do cilindro.

2πR e altura h, como mostra a figura a seguir:

h → h Superfície Lateral

R 2πR

Assim sendo, a área lateral do cilindro é equivalente à área do retângulo, ou seja:

$$S_L = 2\pi Rh$$

Área total

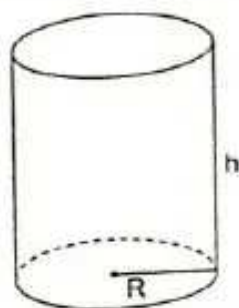
A área total de um cilindro é igual à área lateral acrescida das áreas das bases, que são dois círculos. Então:

$$S_T = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

$$S_T = 2\pi R(h + R)$$

Volume

Pelo princípio de Cavalieri, antes enunciado, dado um cilindro, é sempre possível obter um prisma com a base apoiada no mesmo plano que ele, com a mesma área da base e altura e, assim, consequentemente, com o mesmo volume.

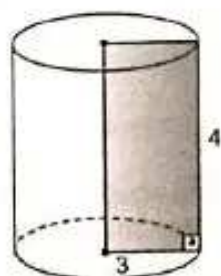
Portanto:

$$V_{CILINDRO} = V_{PRISMA}$$

$$V_{CILINDRO} = S_B \cdot h$$

$$\boxed{V_{CILINDRO} = \pi R^2 h}$$

Exemplo:

Determinar a área lateral, a área total e o volume de um cilindro gerado pela revolução de um retângulo com 3 cm de base e 4 cm de altura.

Resolução:

$$S_L = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 4$$

$$S_L = 24\pi cm^2$$

$$S_T = 2\pi R(h + R) = 2\pi \cdot 3 \cdot (4 + 3)$$

$$S_T = 42\pi cm^2$$

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4$$

$$V = 36\pi cm^3$$

Exercícios

3) Determine a área total e o volume do sólido obtido pela revolução de 180° em torno do menor lado de um retângulo de dimensões 12 cm e 16 cm.

4) A planificação da superfície lateral de um cilindro circular reto é um retângulo de base 16π cm e altura 10 cm. Determine a área total e o volume desse sólido.

5) Considere um cilindro circular reto C de altura H, raio da base R e volume V. Qual o volume do cilindro circular reto, em função de V, que possui

a) altura 2H e raio da base R?
b) altura H e raio da base 2R?
c) altura 4H e raio da base R/2?
d) altura 20% maior do que a de C e raio 10% menor do que o de C?

6) A seção meridiana de um cilindro equilátero tem perímetro 24 cm. Determine a área lateral, a área total e volume desse sólido.

7) As seções reta e meridiana de um cilindro circular reto têm áreas respectivamente iguais a 16π cm² e 48 cm². Determine a área total e o volume desse cilindro.

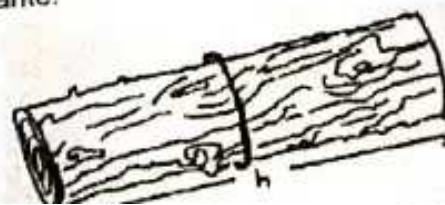
8) **(ENEM)** Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro **d** em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

a) π d
b) 2 π d
c) 4 π d
d) 5 π d
e) 10 π d

9) **(ENEM)** Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

I) Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.

1) Determine a área lateral, a área total e o volume de um cilindro circular reto cujo raio da base mede 4 cm e a altura mede 6 cm.

2) Determine a área lateral, a área total e o volume do sólido obtido quando é feita uma revolução de 360° em torno do maior lado de um retângulo de dimensões 8 cm e 10 cm.

II) O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.

III) O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco.

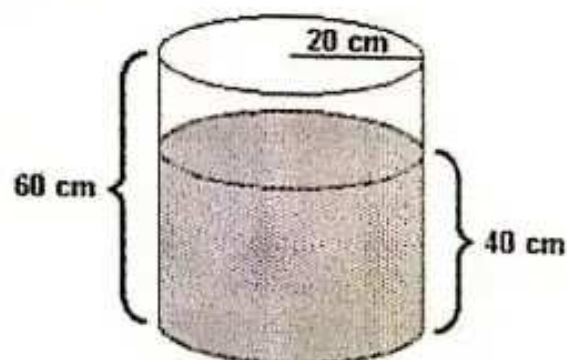
Outra estimativa pode ser pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito. A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização.

Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de

a) 30%.
b) 22%.
c) 15%.
d) 12%.
e) 5%.

10) **(PUC)** O volume do sólido gerado pela rotação de um quadrado de lado 3 cm em torno de um dos seus lados é, em cm^3:

a) 3π
b) 6π
c) 9π
d) 18π
e) 27π

11) **(UERJ)** Um recipiente cilíndrico de 60 cm de altura e base com 20 cm de raio, está sobre uma superfície plana horizontal e contém água até a altura de 40 cm, conforme indicado na figura.

Imergindo-se totalmente um bloco cúbico no recipiente, o nível da água sobe 25%.

Considerando π igual a 3, a medida, em cm, da aresta do cubo colocado na água é igual a:

a) $10\sqrt{2}$
b) $10\sqrt[3]{2}$
c) $10\sqrt{12}$
d) $10\sqrt[3]{12}$

12) **(ENEM)** Na reforma e estilização de um instrumento de percussão, em formato cilíndrico (bumbo), será colada uma faixa decorativa retangular, como a indicada na Figura 1, suficiente para cobrir integramente, e sem sobra, toda a superfície lateral do instrumento.

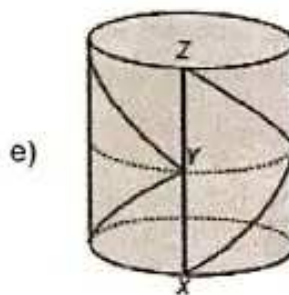
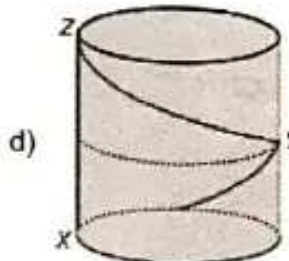
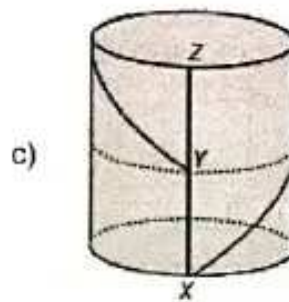
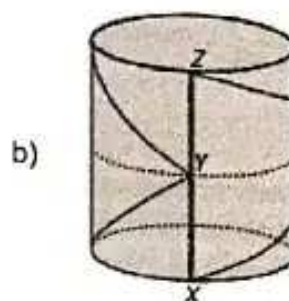
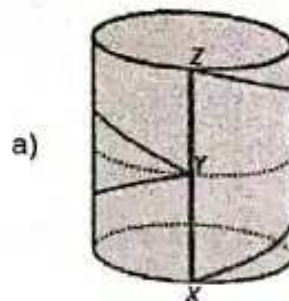
Como ficará o instrumento após a colagem?

a)

b)

c)

d)

e)

13) Considere um cilindro equilátero de raio R. Os pontos A e B são pontos de uma mesma secção meridiana no cilindro, sendo A o ponto médio da aresta. Se amarrarmos um barbante esticado do ponto A ao ponto B, qual será a medida desse barbante?

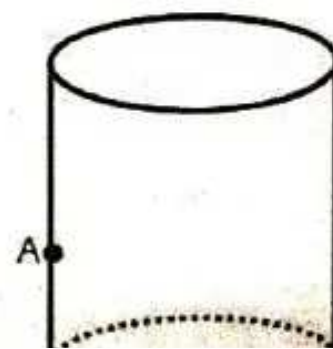
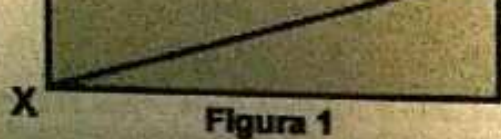



Figura 1

14) **(ENEM)** Um artesão fabrica vários tipos de potes cilíndricos. Mostrou a um cliente um pote de raio de base a e altura b. Esse cliente, por sua vez, quer comprar um pote com o dobro do volume do pote apresentado. O artesão diz que possui potes com as seguintes dimensões:

- Pote I: raio a e altura 2b
- Pote II: raio 2a e altura b
- Pote III: raio 2a e altura 2b
- Pote IV: raio 4a e altura b
- Pote V: raio 4a e altura 2b

O pote que satisfaz a condição imposta pelo cliente é o

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

15) **(ENEM)** A vazão de água (em m^3/h) em tubulações pode ser medida pelo produto da área da seção transversal por onde passa a água (em m^2) pela velocidade da água (em m/h). Uma companhia de saneamento abastece uma indústria utilizando uma tubulação cilíndrica de raio r, cuja vazão da água enche um reservatório em 4 horas. Para se adaptar às novas normas técnicas, a companhia deve duplicar o raio da tubulação, mantendo a velocidade da água e mesmo material.

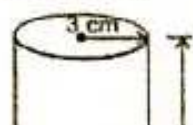
Qual o tempo esperado para encher o mesmo reservatório, após a adaptação às novas normas?

a) 1 hora
b) 2 horas
c) 4 horas
d) 8 horas
e) 16 horas

16) **(ENEM)** Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

a) 1,44
b) 6,00
c) 7,20
d) 8,64
e) 36,00

17) **(ENEM)** Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, V1, é 1,6 vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, V2.

A medida da altura desconhecida vale

a) 8 cm.
b) 10 cm.
c) 16 cm.
d) 20 cm.
e) 40 cm.

18) **(ENEM)** Barras de cobre cilíndricas são utilizadas para fazer aterramentos elétricos.

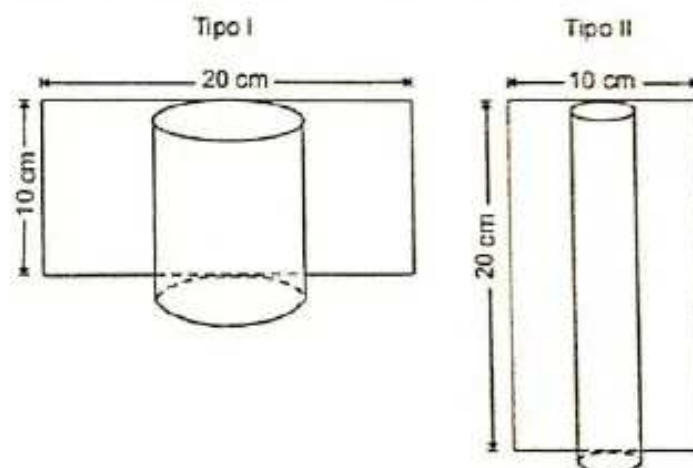
Durante a instalação de um chuveiro, uma pessoa utilizou uma barra de aterramento de densidade ρ, massa m, diâmetro D = 2R e altura h.

Para fazer um novo aterramento, essa pessoa utilizou uma barra com a mesma densidade, mas com o dobro da massa e o dobro do diâmetro em relação à usada no chuveiro.

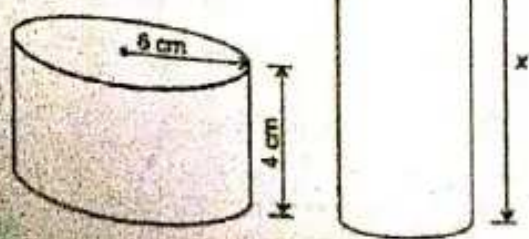
A densidade é dada por $\rho = \frac{m}{V}$ e o volume da barra cilíndrica é $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Qual a relação da altura da barra utilizada no novo aterramento comparada àquela utilizada no aterramento do chuveiro?

a) Quarta parte.
b) Metade.
c) Igual.
d) Dobro.
e) Quádruplo.

19) **(ENEM)** Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

a) o triplo.
b) o dobro.
c) igual.
d) a metade.
e) a terça parte.

20) Mário e Paulo possuem piscinas em suas casas. Ambas têm a mesma profundidade e bases com o mesmo perímetro. A piscina de Mário é um cilindro circular reto e a de Paulo é um prisma reto de base quadrada. A companhia de água da cidade cobra R$ 1,00 por metro cúbico de água consumida.

Disponível em www.cbra.org.br. Acesso em: 3 de mar. 2012.

cidade cobra R$ 1,00 por metro cúbico ...

a) Determine qual dos dois pagará mais para encher de água a sua piscina.

b) Atendendo a um pedido da família, Mário resolve duplicar o perímetro da base e a profundidade de sua piscina, mantendo, porém, a forma circular.

Determine quanto Mário pagará pela água para encher a nova piscina, sabendo que anteriormente ele gastava R$ 50,00.

21) **(ENEM)** Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π. Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

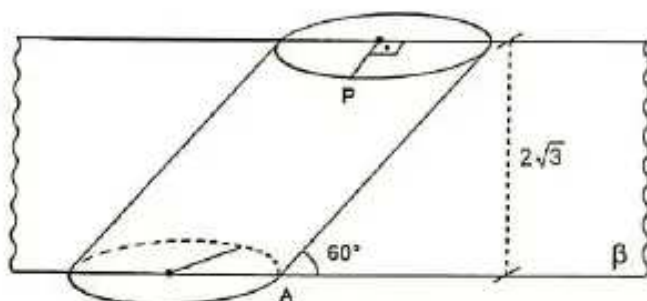
a) 0,5
b) 1,0
c) 2,0
d) 3,5
e) 8,0

22) **(ENEM)** O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1m², ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m² de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço da sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

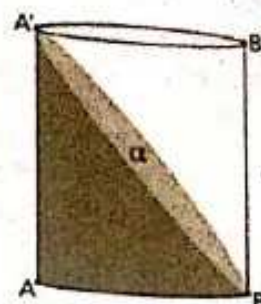
O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de

a) 10,8.
b) 12,0.
c) 32,4.
d) 108,0.
e) 324,0.

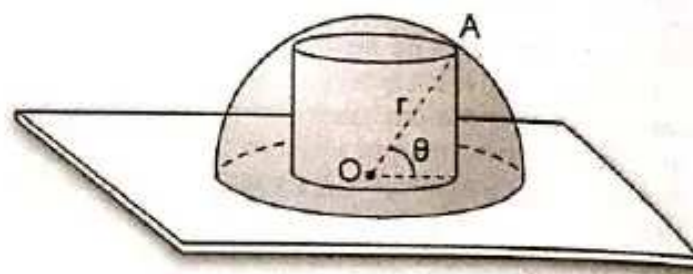
23) **(FUVEST)** Um cilindro oblíquo tem raio das bases iguala 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um ângulo de 60°. O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros.

P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.

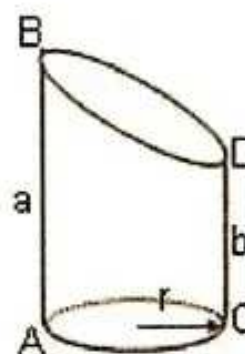
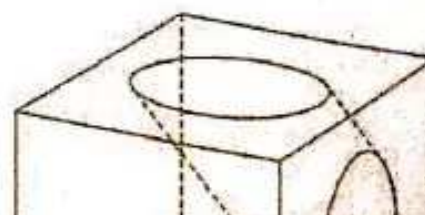
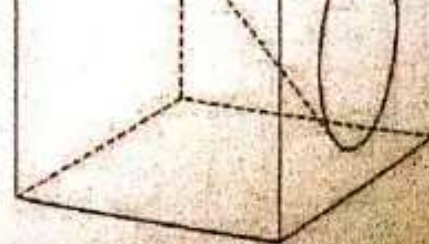
24) **(UERJ)** Um tonel cilíndrico, sem tampa e cheio de água, tem 10 dm de altura e raio da base medindo 5 dm. Considerando $\pi = 3{,}14$, ao inclinarmos o tonel de 45°, o volume de água derramada, em dm³, é aproximadamente de:

a) 155
b) 263
c) 353
d) 392

25) **(UERJ)** Um cilindro circular reto possui diâmetro AB de 4

O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano α e a base inferior, em cm³, é igual a:

a) 8π
b) 12π
c) 16π
d) 20π

26) **(UERJ)** Observe a figura a seguir, que representa um cilindro circular reto inscrito em uma semiesfera, cujo raio OA forma um ângulo θ com a base do cilindro.

Se θ varia no intervalo $\left]\theta, \frac{\pi}{2}\right[$ e o raio da semiesfera mede r, calcule a área máxima desse cilindro.

27) **(UNICAMP)** Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura. Calcule o volume deste sólido em função do raio da base r, da altura máxima AB = a e da altura mínima CD = b.

28) O sólido ilustrado na figura abaixo foi obtido perfurando-se um cubo de aresta 4 com uma broca de raio 1, cujo eixo passou pelos centros de duas faces adjacentes do cubo. Indique o número inteiro mais próximo do volume do cubo perfurado. (Dados: use as aproximações $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{2} = 1{,}41$.)

cm e altura AA' de 10 cm. O plano α, perpendicular à seção meridiana ABB'A', que passa pelos pontos B e A' das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.

Gabarito

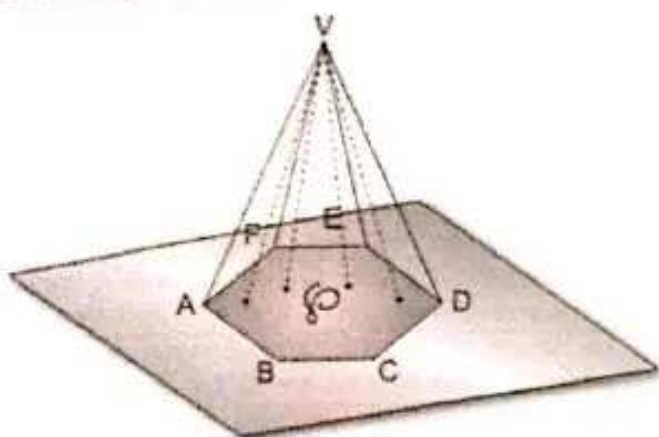
1) $48\pi\ cm^2$, $80\pi\ cm^2$ e $96\pi\ cm^3$
2) $160\pi\ cm^2$, $288\pi\ cm^2$ e $640\pi\ cm^3$
3) $64(7\pi + 6)\ cm^2$ e $1536\pi\ cm^3$
4) $288\pi\ cm^2$ e $640\pi\ cm^3$
5)
a) 2 V
b) 4 V
c) V
d) 0,972 V
6) $36\pi\ cm^2$, $54\pi\ cm^2$ e $54\ cm^3$
7) $80\pi\ cm^2$ e $96\pi\ cm^3$
8) d
9) b
10) e
11) d
12) a
13) $R\sqrt{1+\pi^2}$
14) a
15) a
16) b
17) b
18) b
19) b
20)
a) Mário
b) R$ 400,00
21) c
22) d
23) $\sqrt{14}$
24) d
25) d
26) πr^2
27) $\frac{\pi R^2(a+b)}{2}$
28) 55

Anotações

Capítulo XV

PIRÂMIDES

Definição

Consideremos um polígono convexo *P* contido num plano α e um ponto **V** não pertinente a α. Chamamos **pirâmide** à reunião de todos os segmentos que possuem um extremo em **V** e outro num ponto de *P*.

O ponto **V** é chamado **vértice** da pirâmide.

A **base** da pirâmide é o polígono *P*.

As **faces laterais** são triângulos. Os lados desses triângulos que partem de **V** são as **arestas laterais**, enquanto que os lados de **P** são as **arestas da base**. A distância do ponto **P** ao plano α é a **altura** da pirâmide.

Nomenclatura

A nomenclatura da pirâmide se relaciona ao tipo do polígono que lhe serve de base. Assim, uma pirâmide será triangular, se sua base for um triângulo; será quadrangular, se sua base for um quadrilátero; pentagonal, se sua base for um pentágono, e assim sucessivamente.

As pirâmides triangulares são também chamadas **tetraedros**.

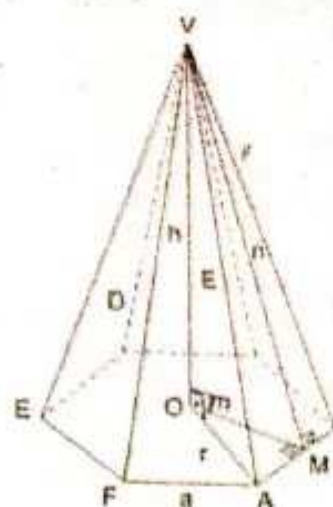
Pirâmide triangular
(a base de um triângulo)

Pirâmide hexagonal
(a base de um hexágono)

Pirâmide Reta

Pirâmide reta é aquela cuja projeção ortogonal do vértice, no plano α, coincide com o centro da base. Caso contrário, a pirâmide será **oblíqua**.

Pirâmide Regular

Vamos destacar os principais elementos da pirâmide regular da figura a seguir:

a : aresta da base ($\overline{AF}$)

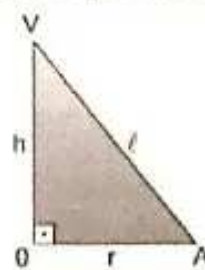
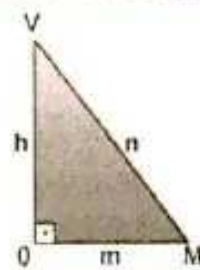
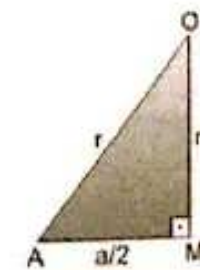
m: apótema da base ($\overline{OM}$)

r : raio da base ($\overline{OA}$)

h: altura da pirâmide ($\overline{VO}$)

ℓ : aresta lateral ($\overline{VB}$)

n: apótema da pirâmide ($\overline{VM}$)

É importante salientar a existência de quatro triângulos retângulos numa pirâmide regular. Neles podemos aplicar o teorema de Pitágoras, como mostraremos a seguir:

$$\ell^2 = h^2 + r^2 \qquad n^2 = h^2 + m^2$$

$$\ell^2 = n^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad r^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Exemplo:

Numa pirâmide quadrangular regular de 8 m de altura e 6 m de raio, determine

a) aresta lateral (ℓ)

b) aresta da base (**a**)

c) apótema da base (**m**)

d) apótema da pirâmide (**n**)

e) área lateral (S_L)

f) área total (S_T)

Uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular é chamada **pirâmide regular**.

A superfície lateral é composta de triângulos isósceles, já que as arestas laterais são congruentes. A altura principal de qualquer um desses triângulos isósceles é chamada apótema da pirâmide.

Resolução:

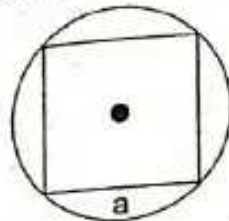
Dados: $h = 8$ e $r = 6$

a) $\ell^2 = h^2 + r^2$

$\ell^2 = 8^2 + 6^2$

$\ell^2 = 100$

$\ell = 10$ m

b) Da Geometria Plana, a base é um quadrado inscrito num círculo de raio $r = 6$ m, e, portanto, pode ser determinado através da fórmula:

$$a = r\sqrt{2}$$

$$a = 6\sqrt{2}\text{m}$$

c) Do capítulo X, vem que

$$m = \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$m = 3\sqrt{2}\text{m}$$

d) $n^2 = h^2 + m^2$

$n^2 = 8^2 + (3\sqrt{2})^2$

$n^2 = 64 + 18$

$n^2 = 82$

$n = \sqrt{82}$ m

e) A superfície lateral é composta de 4 triângulos isósceles congruentes de base **a**= $6\sqrt{2}$ m e altura **n**= $\sqrt{82}$ m. Então:

$$S_L = 4 \cdot \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{82}}{2} = \frac{24\sqrt{164}}{2}$$

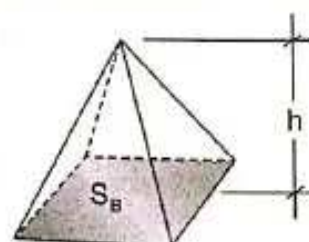
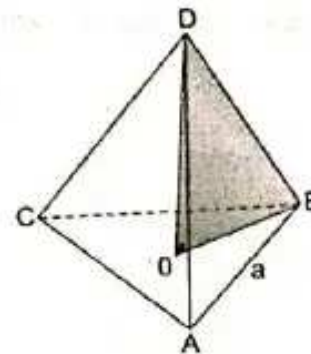
$$S_L = 24\sqrt{41}\,\text{m}^2$$

f) $S_T = S_L + S_B$

$S_T = 24\left(\sqrt{41}+3\right) + (6\sqrt{2})^2 = 24\sqrt{41} + 36 \cdot 2$

$S_T = 24\,(\sqrt{41} + 3)\,\text{m}^2$

Volume

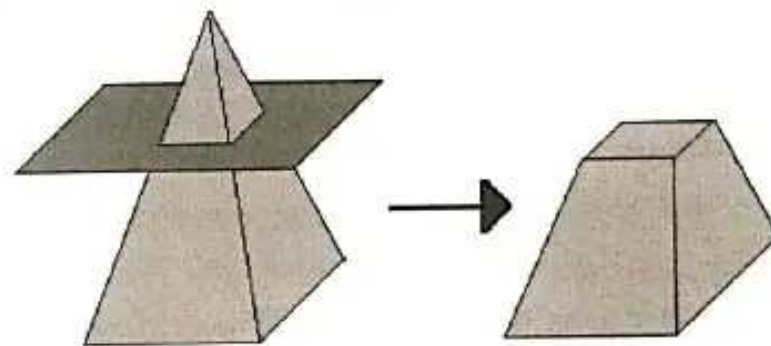
Demonstra-se que todo paralelepípedo pode ser dividido em três pirâmides triangulares equivalentes (de mesmo volume) e de mesma altura que ele. Como o volume de um paralelepípedo pode ser obtido através do produto da área da base pela altura e pelo princípio de Cavalieri, temos que:

$$V_{PIRÂMIDE} = \frac{S_B \times h}{3}$$

No ΔBDO: $\overline{OD}$= h, $\overline{BD}$= a e $\overline{BO}$ é 2/3 da altura do ΔABC (O é o baricentro). Logo $\overline{BO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Aplicando-se o teorema de pitágoras no referido triângulo: $\overline{BD}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{BO}^2$

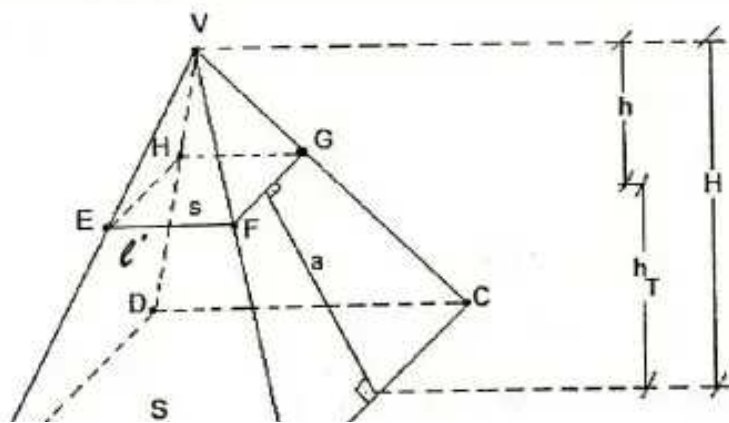
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \rightarrow a^2 = h^2 + \frac{3a^2}{9} \rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3} \rightarrow V = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} \rightarrow \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

Tronco de pirâmide de bases paralelas

Quando intersectamos uma pirâmide por um plano a, paralelo à base da pirâmide, a porção da pirâmide compreendida entre sua base e o plano sector é chamada de tronco de pirâmide de bases paralelas.

Elementos do tronco de pirâmide regular

Vamos dar ênfase ao estudo de troncos obtidos a partir de pirâmides regulares.

Na figura abaixo a pirâmide regular maior (VABCD) foi dividida, por um plano paralelo à base, em uma pirâmide regular menor (VEFGH) e no tronco de pirâmide (ABCDHEFG).

Tetraedro Regular

Toda pirâmide triangular regular com todas as arestas congruentes é um **tetraedro regular**. Suas faces são quatro triângulos equiláteros.

Num tetraedro regular, é importante a determinação de sua altura e volume que são dados por:

Podemos destacar os principais elementos da figura anterior:

l : aresta da base maior do tronco
l': aresta da base menor do tronco
a : apótema do tronco
H : altura da pirâmide maior
h : altura da pirâmide menor
h_T : altura do tronco
S : área da base maior do tronco
s : área da base menor do tronco
V : volume da pirâmide maior
v : volume da pirâmide menor
V_T : volume do tronco

Relações importantes e formulário

I) $\frac{\ell'}{\ell} = \frac{h}{H}$

II) $\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$

III) $\frac{v}{V} = \left(\frac{h}{H}\right)^3$

IV) $V_T = V - v$

V) $V_T = \frac{h_T}{3}(S + \sqrt{S \cdot s} + s)$

Observações

1) A área da superfície lateral de um tronco, cujas bases são polígonos com n lados, é igual à soma das áreas de n trapézios isósceles congruentes, com bases l e l' e altura a.
2) A área total de um tronco será obtida adicionando-se à sua área lateral as áreas de suas bases (s e S).

Exercícios

1) Considere uma pirâmide hexagonal regular cuja altura mede 4 cm e aresta da base mede 8 cm. Determine a medida
a) do apótema da base.
b) do apótema da pirâmide.
c) da aresta lateral.
d) da área lateral.
e) da área total.
f) do volume.

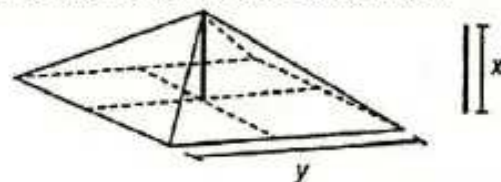
2) Considere uma pirâmide quadrangular regular cujo apótema mede 5 cm e a área lateral mede 60 cm². Determine a medida
a) da aresta da base.
b) do apótema da base.
c) da altura.
d) da aresta lateral.
e) da área total.
f) do volume.

3) Determine a área total, o volume e a medida da altura de um tetraedro regular cuja aresta 6 cm.

6) Uma pirâmide de área da base igual a 16 cm² e volume igual a 64 cm³, é intersectada por um plano paralelo à sua base que determina uma seção transversal de área 9 cm². Determine o volume do tronco assim formado.

7) Uma pirâmide tem 30 m de altura e cada uma de suas seções planas paralelas à base é um quadrado. Calcule a que distância do topo da pirâmide está a seção que determina um tronco de pirâmide de volume igual a $\frac{7}{8}$ do volume total da pirâmide.

8) **(PUC)** Numa pirâmide de base quadrada, todas as arestas medem x. Quanto vale o volume da pirâmide?
a) $\frac{\sqrt{2}}{6}x^3$
b) πx^2
c) $x^3 + x^2 + x + 1$
d) x^3
e) $\frac{\sqrt{6}}{3}x^3$

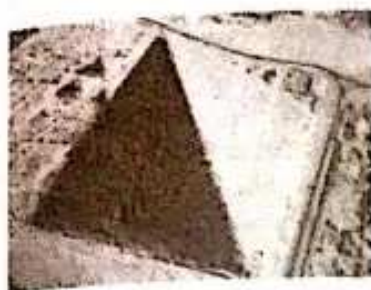
9) **(ENEM)** A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base y. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida x. Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.

A área da superfície da cobertura da tenda, em função de y e x, é dada pela expressão
a) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$
b) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$
c) $4y\sqrt{x^2 + y^2}$
d) $4\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$
e) $4\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$

10) A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada com 137 m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179 m.
A área da base dessa pirâmide, em m², é:
a) 13 272
b) 26 544
c) 39 816
d) 53 088
e) 79 432

11) **(ENEM)** A figura mostra a pirâmide de Quéops, também

4) Em um tetraedro regular, a medida da altura, o volume e a área total formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Determine a medida da aresta desse sólido.

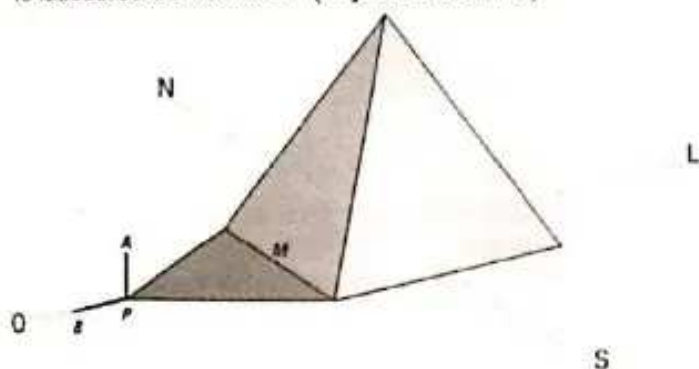
5) A 4 cm do vértice de uma pirâmide de altura 12 cm e volume 216 cm^3, traça-se um plano paralelo à sua base. Determine o volume do tronco assim formado.

conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.

Disponível em www.mauroweigel.blogspot.com. Acesso em: 23 nov. 2011.

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é

a) 97,0.
b) 136,8.
c) 173,7.
d) 189,3.
e) 240,0.

12) **(FGV)** No antigo Egito, uma das unidades usadas para medir comprimentos era o "cúbito", equivalente a aproximadamente 52 cm. O jovem Abdal, que viveu no século II a.C. e era curioso em Matemática, desejava saber a altura da grande pirâmide que tinha sido construída mais de dois mil anos antes. Ele sabia que a pirâmide foi construída de forma que, no primeiro dia do verão, suas faces ficavam voltadas para os quatro pontos cardeais e, nesse dia, fez a seguinte experiência.

No meio da manhã, a sombra da pirâmide era um triângulo isósceles de vértice P (veja o desenho).

Ele mediu a distância de P ao ponto M, médio do lado da base (portanto a altura do triângulo da sombra) e achou 130 cúbitos. Nesse momento, ele percebeu que uma vara reta PA de 4 cúbitos de comprimento, colocada verticalmente, projetava uma sombra PB de 5 cúbitos. Abdal mediu também o lado da base da pirâmide, que é quadrada, e achou 440 cúbitos.

Determine, em metros, um valor aproximado para a altura da grande pirâmide do Egito.

13) **(FUVEST)** Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular de base quadrada. O lado da base mede 8 m de altura e a altura da pirâmide, 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m^2. Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

a) 90
b) 100
c) 110
d) 120

a) 20%
b) 16%
c) 15%
d) 12%
e) 10%

15) **(ENEM)** Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos.

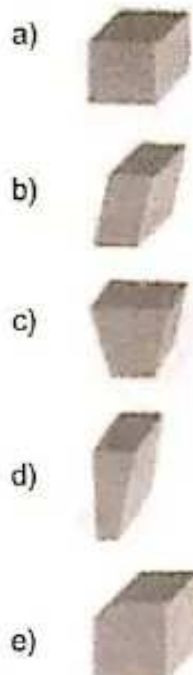
Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?

a)

b)

c)

d)

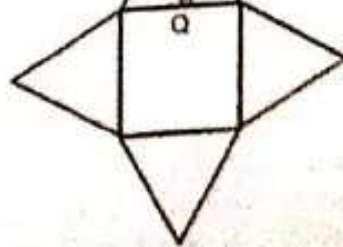
e)

16) **(ENEM)** Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.

Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
c) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
e) Cilindro, prisma e tronco de pirâmide.

17) A figura a seguir representa a planificação de uma pirâmide de quadrangular regular.

e) 130

14) Uma folha de papel colorido, com a forma de um quadrado de 20 cm de lado, será usada para cobrir todas as faces e a base de uma pirâmide quadrangular regular com altura de 12 cm e apótema da base medindo 5 cm. Após se ter concluído essa tarefa e, levando-se em conta que não houve desperdício de papel, a fração percentual que sobrará dessa folha de papel corresponde a:

Sabendo-se que PQ mede $3\sqrt{3}$ cm e que as faces laterais são triângulos equilátero, o volume da pirâmide é de:

a) $18\sqrt{2}$ cm³
b) $36\sqrt{2}$ cm³
c) $48\sqrt{2}$ cm³
d) $72\sqrt{2}$ cm³
e) $60\sqrt{2}$ cm³

18) **(ENEM)** Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados , ilustrados na Figura 2.

Figura 1

S P R Q O

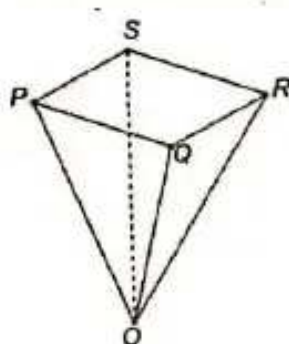
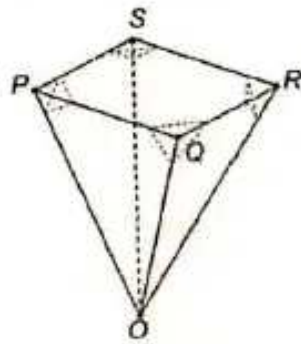



Figura 2

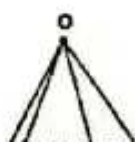
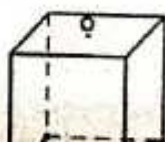
Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujs números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) 9, 20 e 13.
b) 9, 24 e 13.
c) 7, 15 e 12.
d) 10, 16 e 5.
e) 11, 16 e 5.

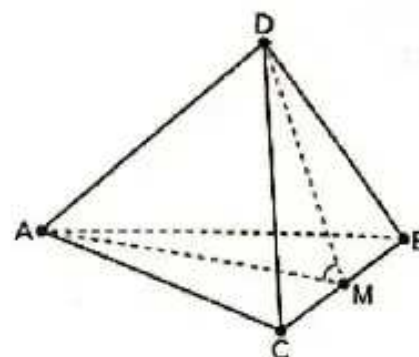
19) **(ENEM)** É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

a) Quadrados, apenas.
b) Triângulos e quadrados, apenas.
c) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.
d) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.
e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

20) **(ENEM)** Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.

Os formatos dos sólidos descartados são

a) todos iguais.
b) todos diferentes
c) três iguais e um diferente
d) apenas dois iguais
e) iguais dois a dois.

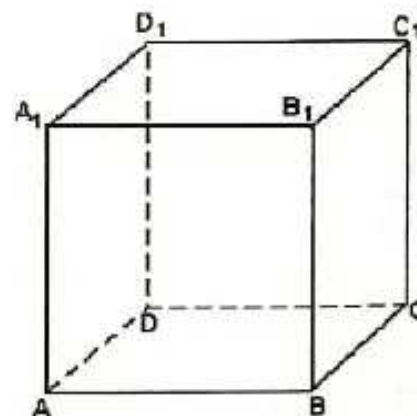
21) **(UERJ)** Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é M.

O cosseno do ângulo $A\hat{M}D$ equivale a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

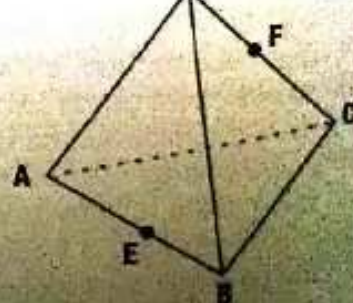
d) $\frac{2}{5}$

22) **(UNICAMP)** O sólido da figura a seguir é um cubo cuja aresta mede 2 cm.

a) Calcule o volume da pirâmide $ABCD_1$.
b) Calcule a distância do vértice A ao plano que passa pelos pontos B, C e D_1.

23) Calcule a aresta do tetraedro que se obtém unindo-se os baricentros das faces de um tetraedro regular de 3 cm de aresta.

24) **(FUVEST)** Na figura abaixo, ABCD é um tetraedro regular de lado a. sejam E e F os pontos médios de AB e CD, respectivamente

D

Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Então, o valor de EF é:

a) $\frac{a}{2}$
b) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

25) **(ENEM)** Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular de 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior -, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura a seguir.

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3
b) 189 cm^3
c) 192 cm^3
d) 216 cm^3
e) 540 cm^3

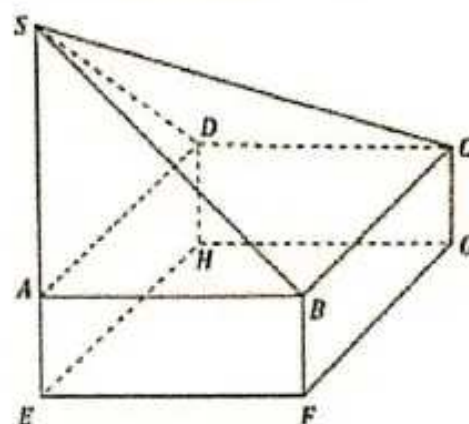
26) **(UERJ)** Leia os quadrinhos:

(O Globo, março 2000)

Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho-de-mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura abaixo, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.

Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em dm^3, igual a:

a) 12
b) 13
c) 14
d) 15

27) **(FUVEST)** O sólido da figura é formado pela pirâmide SABCD sobre o paralelepípedo reto ABCDEFGH. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E e que AE = 2 cm, AD = 4 cm e AB = 5 cm. A medida do segmento AS que faz com que o volume do sólido seja igual a $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide SEFGH é

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

28) **(UERJ)** ABCD é um tetraedro no qual ABC é um triângulo equilátero de lado a e a aresta AD é perpendicular ao plano ABC. Sabendo-se que o ângulo diedro das faces ABC e DBC é 45°, o volume do tetraedro é:

a) $\frac{a^3}{12}$
b) $\frac{a^3}{8}$
c) $\frac{a^3}{6}$
d) $\frac{a^3}{4}$

29) **(UERJ)** ABCD é um tetraedro regular de aresta a. O ponto médio da aresta AB é M e o ponto médio da aresta CD é N. Calcule:

a) MN.
b) O seno do ângulo NMD.

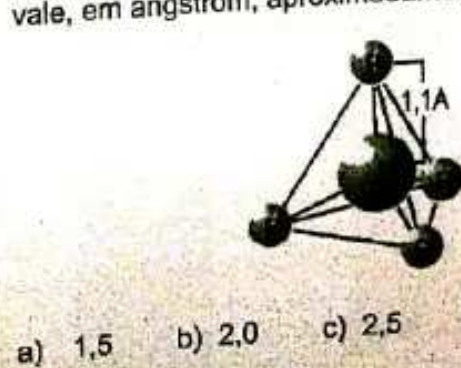
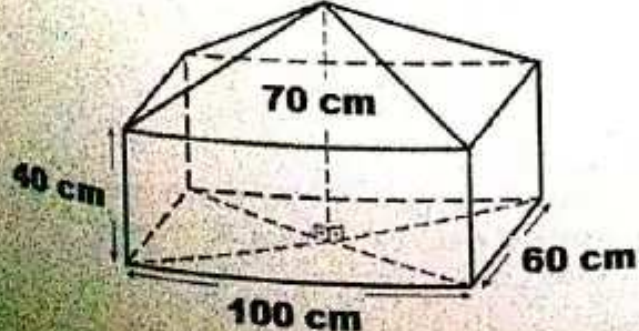
30) **(CEFET)** Na representação de uma molécula de metano (CH_4), o centro do átomo de carbono ocupa o centro de um tetraedro regular imaginário, onde os centros dos átomos de hidrogênio ocupam os vértices. A distância do centro do átomo de carbono ao centro de um átomo de hidrogênio é 1,1 angstrom. Considerando $\sqrt{6}$ = 2,45, a distância entre os centros de dois átomos de hidrogênio ... angstrom, aproximadamente:

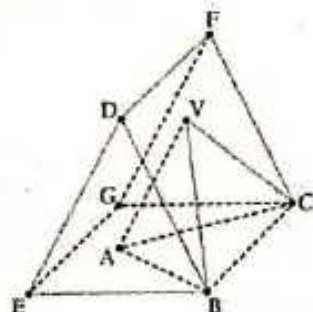
70 cm

40 cm

60 cm

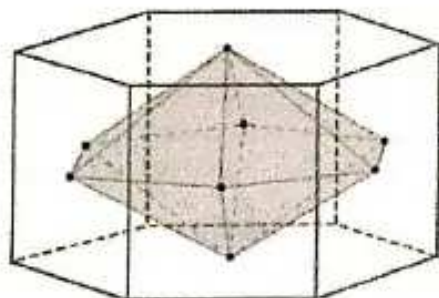
100 cm

vale, em angstrom, aproxi...

a) 1,5 b) 2,0 c) 2,5 d) 3,0 e) 3,5

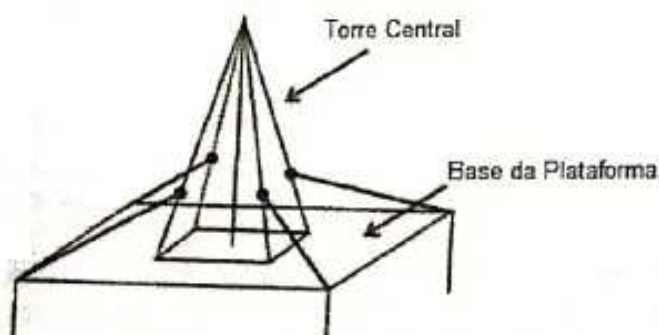
31) **(UERJ)** Um artesão retirou, de uma pedra com a forma inicial de um prisma triangular reto de base EBD, um tetraedro regular VABC. Observe a figura abaixo:

Considere os seguintes dados:

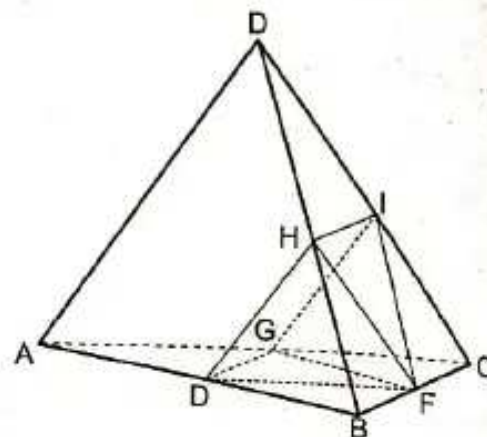
- os vértices A e V pertencem a duas faces laterais do prisma;
- $\overline{BD} = \overline{BE} = \overline{BC} = 1\text{ m}$.

Determine o volume inicial da pedra.

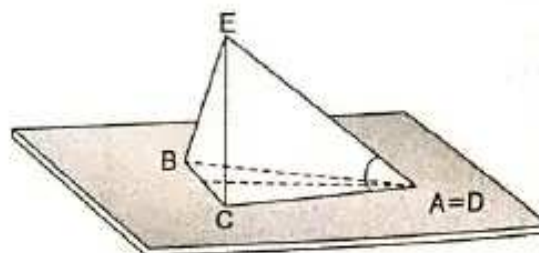
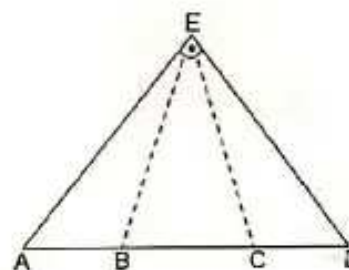
32) **(UERJ)** Um cristal com a forma de um prisma hexagonal regular, após ser cortado e polido, deu origem a um sólido de 12 faces triangulares congruentes. Os vértices desse poliedro são os centros das faces do prisma, conforme representado na figura.

Calcule a razão entre os volumes do sólido e do prisma.

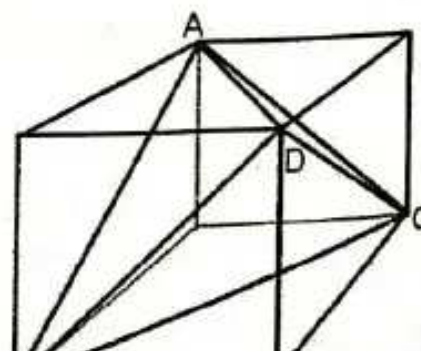
33) **(ENEM)** Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central.

Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração.

Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}$ m, e o lado da base da

34) **(FUVEST)** Considere um tetraedro regular ABCD cujas arestas medem 6 cm. Os pontos E, F, G, H e I são os pontos médios das arestas AB, BC, AC, BD e CD, respectivamente.

a) Determine a área do triângulo EFH.
b) Calcule a área do quadrilátero EGIH.
c) Determine o volume da pirâmide de vértices E, G, I, H e F, cuja base é o quadrilátero EGIH.

35) **(UERJ)** A figura abaixo representa uma chapa de metal com a forma de um triângulo retângulo isósceles em que AB = BC = CD = 2 m.

Dobrando-a nas linhas BE e CE, constrói-se um objeto que tem a forma de uma pirâmide.

Desprezando a espessura da chapa, calcule o cosseno do ângulo formado pela aresta AE e o plano ABC.

36) **(UERJ)** Com os vértices A, B, C e D de um cubo de aresta a, construiu-se um tetraedro regular, como mostra a figura que segue:

plataforma mede $10\sqrt{2}$ m, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a

a) $\sqrt{288}$
b) $\sqrt{313}$
c) $\sqrt{328}$
d) $\sqrt{400}$
e) $\sqrt{505}$

Calcule:

a) o volume da pirâmide EBCD em função de a.
b) a razão entre os volumes do tetraedro ABCD e do cubo

Gabarito

1)
a) $4\sqrt{3}$ cm
b) 8 cm
c) $4\sqrt{5}$ cm
d) 192 cm^2
e) $96(2+\sqrt{3})$ cm^2
f) $128\sqrt{3}$ cm^3

2)
a) 6 cm
b) 3 cm
c) 4 cm
d) $\sqrt{34}$ cm
e) 96 cm^2
f) 48 cm^3

3) $36\sqrt{3}$ cm^2, $18\sqrt{2}$ cm^3 e $2\sqrt{6}$ cm
4) $2\sqrt[3]{162}$
5) 208 cm^3
6) 37 cm^3
7) 15 m
8) a
9) a
10) d
11) b
12) 145,6m
13) a
14) e
15) c
16) a
17) b
18) a
19) e
20) e
21) b
22)
a) $\frac{4}{3}$ cm^3
b) $\sqrt{2}$ cm

23) 1 cm
24) b
25) b
26) d
27) e
28) b
29)
a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

30) b
31) $\frac{\sqrt{2}}{3} m^3$
32) $\frac{1}{4}$
33) d
34)
a) $\frac{9\sqrt{3}}{4} cm^2$
b) 9 cm^2
c) $\frac{9\sqrt{2}}{2} cm^3$

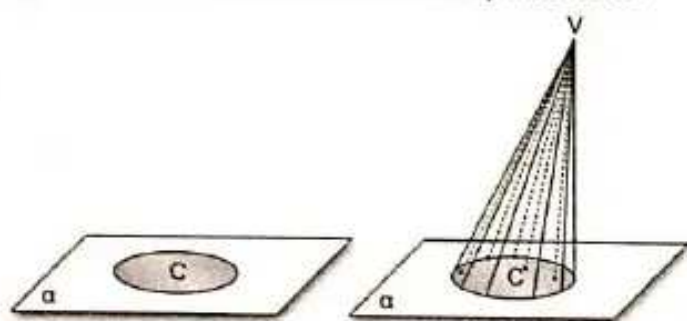
35) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
36)
a) $\frac{a^3}{6}$
b) $\frac{1}{3}$

Anotações

Capítulo XVI

CONES

Definição

Consideremos um círculo **C** contido num plano α e um ponto **V** não pertinente a α. Chamamos **cone circular** ou simplesmente **cone** à reunião de todos os segmentos que possuem um extremo em **V** e outro num ponto de **C**.

O ponto **V** é chamado **vértice** do cone.

A **base** do cone é o círculo **C**.

A distância do ponto **V** ao plano α é a **altura** do cone.

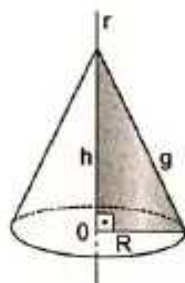
Cone reto

Um cone cuja projeção ortogonal do vértice no plano α coincide com o centro da base é chamado **cone reto**. Caso contrário, o cone é **oblíquo**.

Cone de revolução

O sólido gerado pela revolução completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos é chamado **cone de revolução**.

A base do triângulo gerador é o raio (**R**) da base do cone; o outro cateto em torno do qual é feita a revolução é a **altura** (**h**) do cone, enquanto a hipotenusa é a **geratriz** (**g**) do cone, pois é ela que gera a superfície lateral do cone.

A reta **r** que contém o cateto que serve como altura é o **eixo** do cone.

Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo gerado, temos:

$$g^2 = h^2 + R^2$$

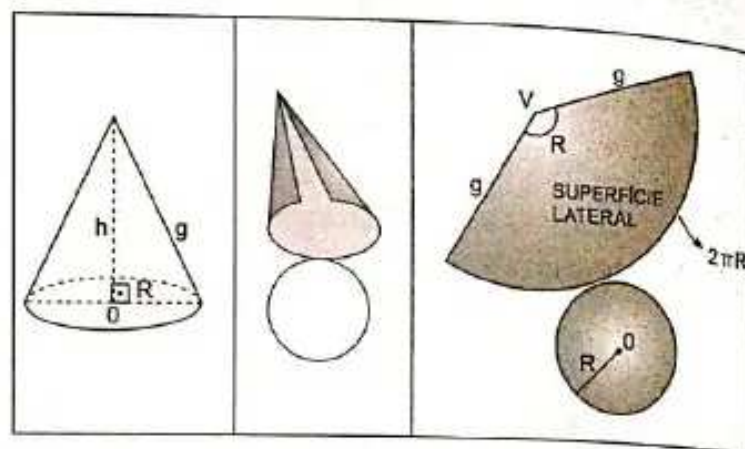
Seções

A seção transversal de um cone é um círculo. Já a seção meridiana é um triângulo, e, no caso do cone de revolução,

Quando a seção meridiana de um cone reto ou de revolução é um triângulo equilátero, ele é chamado **cone equilátero**. Para isso, devemos ter:

$$g = 2R$$

Áreas de um cone reto

Como mostra a figura abaixo, a planificação da superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular cujo raio é a geratriz do cone e cujo arco é o comprimento de circunferência de base do cone.

Portanto, a área lateral é equivalente à área desse setor. Da Geometria Plana, sabemos que a área de um setor pode ser calculada através do semiproduto do comprimento do arco pelo raio.

Daí, tiramos que:

$$S_L = \frac{2\pi R \cdot g}{2}$$

$$S_L = \pi R g$$

Para se obter a área total, basta adicionar à área lateral a área da base, que é um círculo de raio **R**.

$$S_T = \pi R g + \pi R^2$$

$$S_T = \pi R(g + R)$$

Volume de um cone

Dado um cone cuja base está apoiada num plano α, é sempre possível construir uma pirâmide com a mesma altura do cone e cuja base, além de também estar apoiada em α, seja equivalente à base do cone. Assim, toda seção transversal do cone será equivalente à da pirâmide e, pelo princípio de Cavalieri, eles terão o mesmo volume, ou seja:

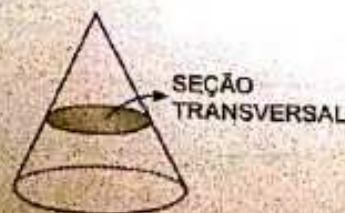
$$V_{CONE} = V_{PIRÂMIDE} = \frac{S_B \cdot h}{3}$$

$$V_{CONE} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Exemplo:

Num cone de revolução de raio da base de 10 cm e geratriz de 26 cm, determine a área lateral, a área total e o volume.

Resolução

é um triângulo isósceles cuja base é o diâmetro da base do cone; os lados congruentes são duas geratrizes e a altura é igual à do cone.

Dados: **R** = 10 cm; **g** = 26 cm

$g^2 = h^2 + R^2$

$26^2 = h^2 + 10^2$

$676 = h^2 + 100$

$h = 24$ cm

$S_L = \pi R g = \pi . 10 . 26$

$$S_L = 260\pi \text{ cm}^2$$

$S_T = \pi R (g + R) = \pi . 10 . (26 + 10)$

$$S_T = 360\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi . 10^2 . 24}{3}$$

$$V = 800\pi \text{ cm}^3$$

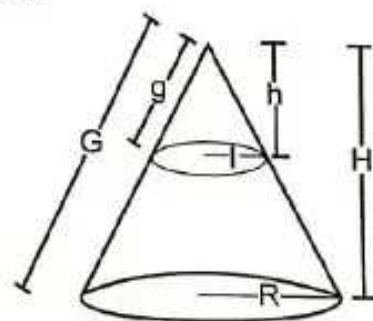
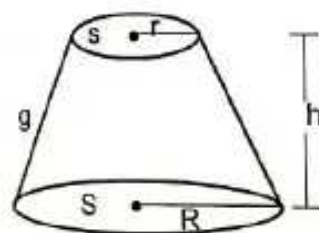
Tronco de cone circular reto

Considere um cone com raio da base R, geratriz G, altura H, área da base S e volume V. Ao ser intersectado por um plano paralelo à sua base, fica determinado outro cone cujo raio da base é r, a geratriz é g, a altura h, a área da base s e o volume v.

Valem as seguintes relações:

I) $\frac{r}{R} = \frac{g}{G} = \frac{h}{H} = k$

II) $\frac{s}{S} = k^2$

III) $\frac{v}{V} = k^3$

Elementos e formulário

Elementos:

r : raio da base menor
R : raio da base maior
h : altura do tronco
g : geratriz do tronco
s : área da base menor
S : área da base maior

1) Área Lateral

$$S_L = \pi(r + R)g$$

2) Área Total

$$S_T = S_L + s + S$$

3) Volume

$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$$

Observação

Quando seccionamos um cone circular reto por um plano paralelo à sua base, ele fica dividido em um cone menor e um tronco de cone. Assim, o volume do tronco pode ser obtido através da diferença entre os volumes do cone maior e do cone menor. Raciocínio semelhante pode ser aplicado para o cálculo de sua área lateral.

Exercícios

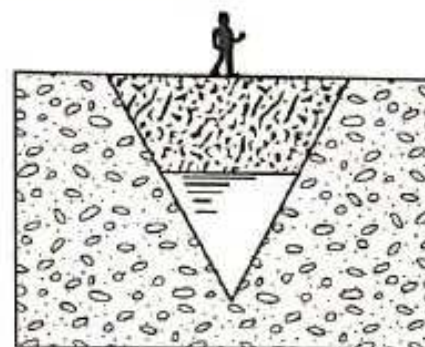
1) Determine a área lateral, a área total e o volume e um cone circular reto cuja geratriz mede 13 cm e o diâmetro da base mede 10 cm.

2) Determine o volu...

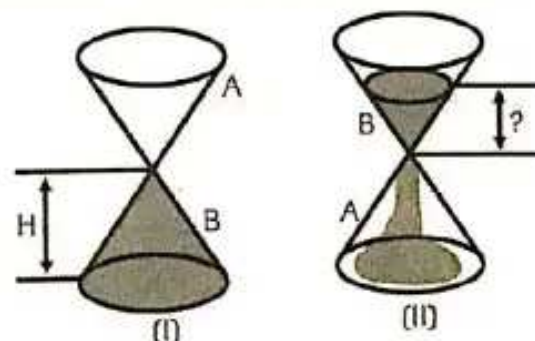
5) Determine o volume de um cone reto de altura 12 cm, sabendo que a área de uma seção transversal, traçada a 8 cm de sua base, mede 5 cm².

6) Um cone C_1 é intersectado por um plano paralelo à sua base, determinando um segundo cone C_2. Se a razão entre as áreas laterais desses dois cones é 2:1, determine a razão entre seus volumes.

7) **(PUC)** Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone circular reto invertido, de eixo vertical, e está cheio até a boca (nível do solo) com 27 000 litros de água e 37 000 litros de petróleo, o qual é menos denso do que a água. Sabendo que a profundidade total do tanque é de 8 metros e que os dois líquidos não são miscíveis, a altura da camada de petróleo é de:

a) 6 m
b) 2 m
c) $\frac{3\sqrt{37}}{\pi}$ cm
d) $\frac{27}{16}$ cm
e) $\frac{37}{16}$ cm

8) Uma ampulheta repousa numa mesa, como mostra a figura I (o cone B completamente cheio de areia). A posição da ampulheta é invertida. A figura II mostra o instante em que cada cone contém metade da areia. Nesse instante, a areia do cone B forma um cone de altura:

a) $\frac{H}{\sqrt{3}}$
b) $\frac{H}{2}$
c) $\frac{H}{\sqrt[3]{2}}$
d) $\frac{H}{\ldots}$

...volume e a área da superfície do sólido obtido pela revolução de um triângulo retângulo de catetos 30 cm e 40 cm, em torno de sua hipotenusa.

3) A seção meridiana de um cone equilátero tem área igual a $4\sqrt{3}$ cm². Determine a área lateral, a área total e o volume desse cone.

4) Determine o volume de um cone de geratriz igual a $\sqrt{7}$, sabendo que as medidas da área da base, da área lateral e do volume formam, nessa ordem, uma progressão geométrica.

d) $\frac{}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\frac{H}{4}$

9) Determine a área lateral, a área total e o volume de um tronco de cone circular reto de raios 4 cm e 13 cm, cuja geratriz mede 15 cm.

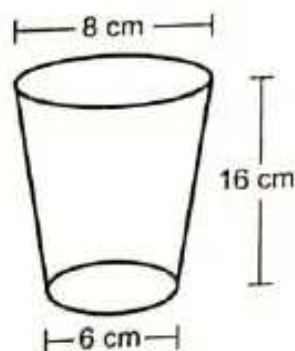
10) **(PUC)** Considere um cone de altura 4 cm e um tronco deste cone de altura 3 cm. Sabendo-se que este tronco tem volume 21 cm³, qual o volume do cone?

11) **(ENEM)** Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.

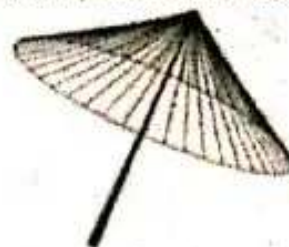
Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3}$ m e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo.

Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de:

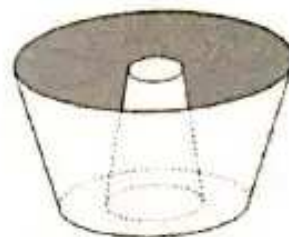
a) $12\pi\ m^2$
b) $108\pi\ m^2$
c) $(12+2\sqrt{3})^2\ \pi m^2$
d) $300\pi\ m^2$
e) $(24+2\sqrt{3})^2\ \pi m^2$

12) Um cliente pediu ao garçom de um bar que lhe trouxesse uma garrafa com 3 litros de refrigerante. O garçom atendeu ao seu pedido e, juntamente com a garrafa, trouxe um copo, como mostrado na figura a seguir, para que ele se servisse.

Qual o número máximo de vezes que o cliente conseguiu encher esse copo com o conteúdo da garrafa de refrigerante? (Considere, se necessário, a aproximação 3 para o valor de π.)

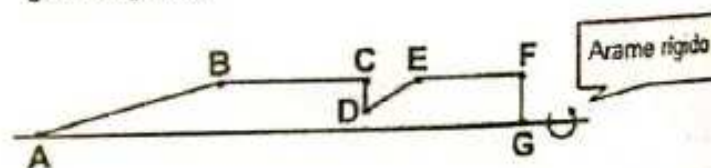
13) **(FUVEST)** Um torneiro mecânico dispõe de uma peça de metal maciça na forma de um cone circular reto de 15 cm de altura e cuja base B tem raio 8 cm (Figura 1). Ele deverá furar o cone, a partir de sua base, usando uma broca, cujo eixo central coincide com o eixo do cone. A broca perfurará a peça até atravessá-la completamente, abrindo uma cavidade cilíndrica, de modo a obter-se o sólido da Figura 2.

14) **(ENEM)** A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

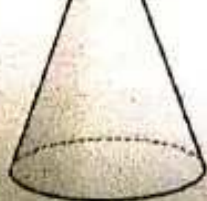
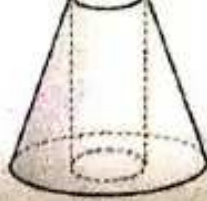
a) pirâmide
b) semiesfera
c) cilindro
d) tronco de cone
e) cone

15) **(ENEM)** Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:

Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são

a) um tronco de cone e um cilindro.
b) um cone e um cilindro.
c) um tronco de pirâmide e um cilindro.
d) dois troncos de cone.
e) dois cilindros.

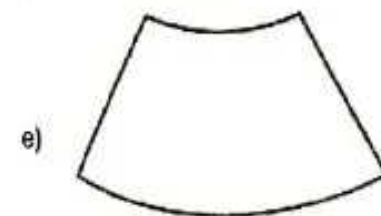
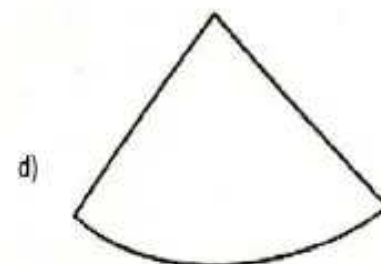
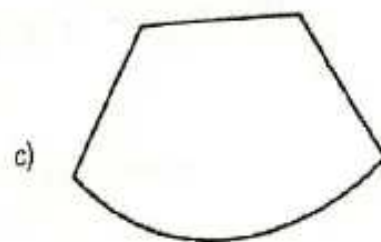
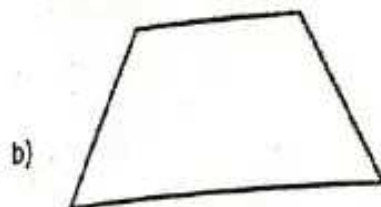
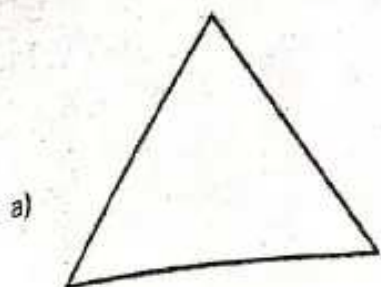
16) **(ENEM)** Numa feira de artesanato, uma pessoa constrói formas geométricas de aviões, bicicletas, carros e outros engenhos com arame inextensível. Em certo momento, ele construiu uma forma tendo como eixo de apoio outro arame retilíneo e rígido, cuja aparência é mostrada na figura seguinte:

Ao girar tal forma em torno do eixo, formou-se a imagem de um foguete, que pode ser pensado como composição por justaposição, de diversos sólidos básicos de revolução.

Sabendo que, na figura, os pontos B, C, E e F são colineares, AB = 4FG, BC = 3FG, EF = 2FG, e utilizando-se daquela forma de pensar o foguete, a decomposição deste, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

a) pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.
b) cilindro reto, tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero.
c) cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero
d) cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro, ...

Se a área da base deste novo sólido é 2/3 da área de B, determine seu volume.

e) cone, cilindro equilátero, tronco de p...

17) **(ENEM)** Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

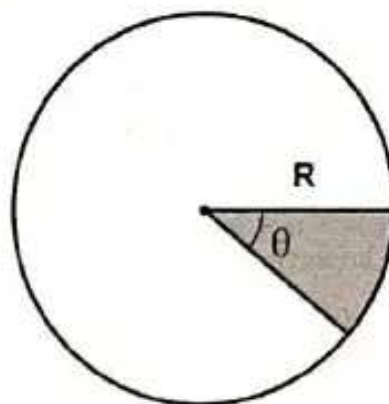
Qual deverá ser a forma do adesivo?

18) **(UERJ)** Para revestir externamente chapéus em forma de cones com 12 cm de altura e diâmetro da base medindo 10 cm, serão utilizados cortes retangulares de tecido, cujas dimensões são 67 cm por 50 cm. Admita que todo o tecido de cada corte poderá ser aproveitado.

Qual o número mínimo dos referidos cortes necessários para forrar 50 chapéus?

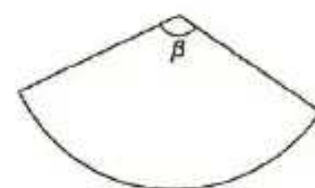
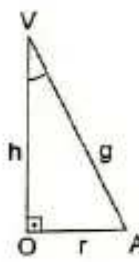
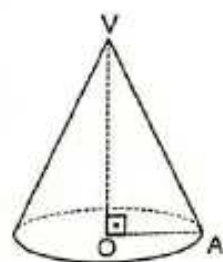
19) Um recipiente em forma de cone circular reto de altura h é colocado com vértice para baixo e com eixo na vertical, como na figura. O recipiente, quando cheio até a borda, comporta 400 ml.

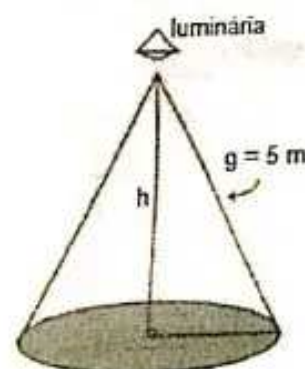
21) **(FUVEST)** Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3 cm de altura. Para isso, recorta-se, em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. A medida do ângulo central do setor circular é:

a) 144°
b) 192°
c) 240°
d) 288°
e) 336°

22) **(FUVEST)** Um setor circular, com ângulo central θ ($0 < \theta < 2\pi$), é recortado de um círculo de papel de raio R (ver figura). Utilizando o restante do papel, construímos a superfície lateral de um cone circular reto.

Determine, em função de R e θ,

a) o raio da base do cone.
b) o volume do cone.

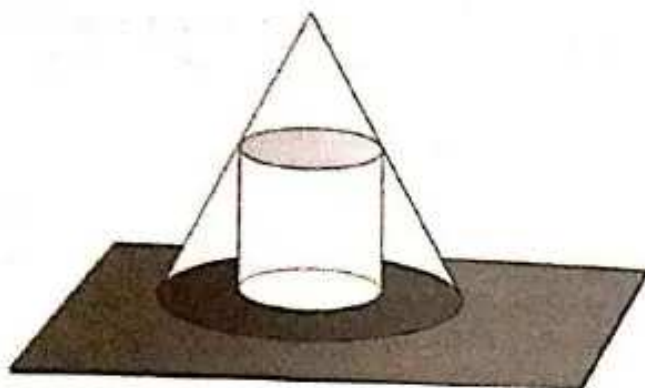
23) As figuras abaixo representam um cone de revolução, seus elementos e a planificação de sua superfície lateral.

Expresse β em função de α.

24) **(ENEM)** Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.

Determine o volume de líquido quando o nível está em $\frac{h}{2}$.

20) Um cone circular reto é feito de uma peça circular de papel de 20 cm de diâmetro, cortando-se um setor de $\frac{\pi}{5}$ radianos. Calcule a altura do cone obtido.

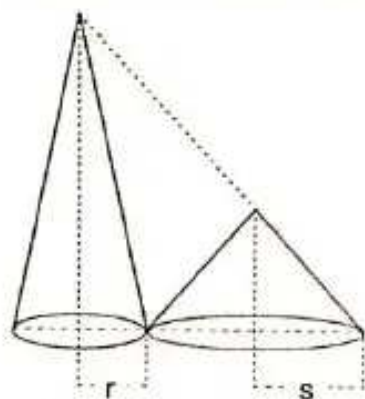
Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28,26m^2$, considerando $\pi \cong 3,14$, a altura h será igual a

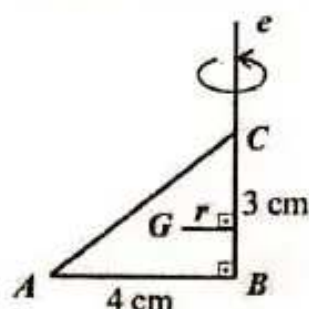
a) 3m
b) 4m
c) 5m
d) 9m
e) 16m

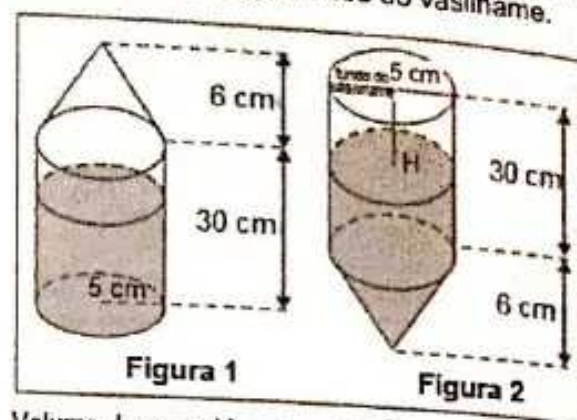
25) **(UERJ)** Um cilindro circular reto é inscrito em um cone, de modo que os eixos desses dois sólidos sejam colineares, conforme representado na ilustração abaixo.

A altura do cone e o diâmetro da base medem, cada um, 12 cm.

Admita que as medidas, em centímetros, da altura e do raio do cilindro variam no intervalo]0;12[e que ele permaneça inscrito nesse cone.

Calcule a medida que a altura do cilindro deve ter para que sua área lateral seja máxima.

26) Dois cones circulares retos têm bases tangentes e situadas no mesmo plano, como mostra a figura.

Sabe-se que ambos têm o mesmo volume e que a reta que suporta uma das geratrizes de um passa pelo vértice do outro. Sendo r o menor dentre os raios das bases, s o maior e $x = \frac{r}{s}$, determine x.

27) **(UERJ)** Uma linha poligonal fechada de três lados limita um triângulo de perímetro p. Se ela gira em torno de um de seus lados, gera uma superfície de área S igual ao produto de p pelo comprimento da circunferência descrita pelo baricentro G da poligonal. A figura abaixo mostra a linha ABCA que dá uma volta em torno de BC.

a) Esboce a figura gerada e faça o cálculo da área de sua superfície.

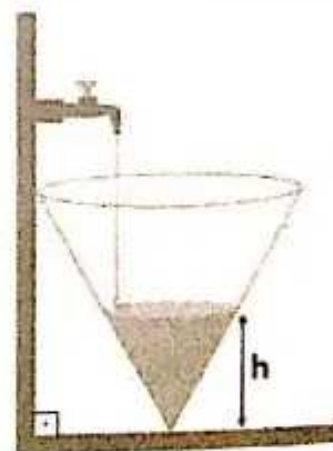
a figura 2, é virado para baixo, sendo H a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame.

Volume do cone: $V_{cone} = \pi r^2 h / 3$

Considerando-se essas informações, qual é o valor da distância H?

a) 5 cm
b) 7 cm
c) 8 cm
d) 12 cm
e) 18 cm

29) **(FUVEST)** Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base, que está apoiada sobre o chão horizontal, é igual a 8 m. Sua altura é igual a 12 m. A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto. O tempo gasto para que o nível de água atinja a metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

a) 4 horas e 50 minutos.
b) 5 horas e 20 minutos.
c) 5 horas e 50 minutos.
d) 6 horas e 20 minutos.
e) 6 horas e 50 minutos.

30) **(UERJ)** Um recipiente com a forma de um cone circular reto de eixo vertical recebe água na razão constante de 1 cm^3 /s. A altura do cone mede 24 cm, e o raio de sua base mede 3 cm. Conforme ilustra a imagem, a altura **h** do nível da água no recipiente varia em função do tempo **t** em que a torneira fica aberta. A medida de **h** corresponde à distância entre o vértice do cone e a superfície livre do líquido.

Admitindo $\pi \cong 3$, a equação que relaciona a altura h, em

seu superfície.

b) Calcule a distância r do baricentro dessa linha ao eixo de rotação.

28) **(ENEM)** Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 30 cm está parcialmente ocupado por 625π cm³ de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 6 cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como mostra

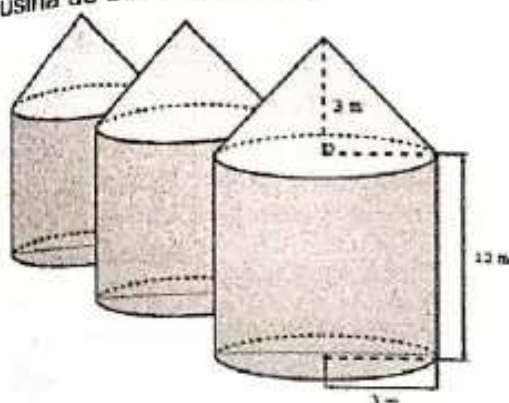
Admitindo $\pi = 3$, a equação que relaciona ... centímetros, e o tempo t, em segundos, é representada por:

a) $h = 4\sqrt[3]{t}$

b) $h = 2\sqrt[3]{t}$

c) $h = 2\sqrt{t}$

d) $h = 4\sqrt{t}$

31) **(ENEM)** Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6.
b) 16.
c) 17.
d) 18.
e) 21.

32) **(UERJ)** Um sólido com a forma de um cone circular reto, constituído de material homogêneo, flutua em um líquido, conforme a ilustração abaixo.

Se todas as geratrizes desse sólido forem divididas ao meio pelo nível do líquido, a razão entre o volume submerso e o volume do sólido será igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{7}{8}$

33) **(UERJ)** Um funil, com a forma de cone circular reto, é utilizado na passagem de óleo para um recipiente com a forma de cilindro circular reto. O funil e o recipiente possuem a mesma capacidade. De acordo com o esquema, os eixos dos recipientes estão contidos no segmento TQ, perpendicular ao plano horizontal β.

Admita que o funil esteja completamente cheio do óleo a ser escoado para o recipiente cilíndrico vazio. Durante o escoamento, quando o nível do óleo estiver exatamente na metade da altura do funil, $\frac{H}{2}$, o nível do óleo no recipiente cilíndrico corresponderá ao ponto K na geratriz AB.

A posição de K, nessa geratriz, é melhor representada por:

a)
b)
c)
d)
Gabarito

1) 65π cm², 90π cm² e 100π cm³
2) 9600π cm³ e 1600 cm²
3) 8π cm², 12π cm² e $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³
4) 7π
5) 180 cm³
6) $2\sqrt{2}$
7) b
8) c
9) 255π cm², 440π cm² e 948π cm³
10) $\frac{64}{3}$ cm³
11) b
12) 5
13) $\frac{640\pi\sqrt{3}}{9}$ cm³

22)

a) $\frac{R(2\pi-\theta)}{2\pi}$

b) $\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{2\pi-\theta}{\pi}\right)^2\cdot\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}\cdot R^3$

23) $\beta = 2\pi\,\text{sen}\alpha$
24) b
25) 6 cm
26) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
27)

a)
b) 1,5 cm

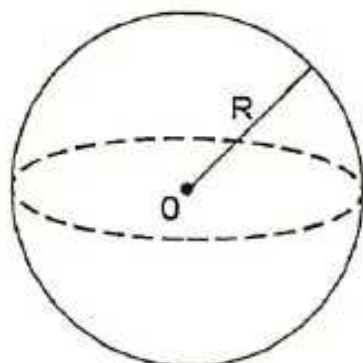
14) e
15) d
16) c
17) e
18) 4
19) 50 mL
20) $\sqrt{19}$ cm
21) d

28) b
29) c
30) a
31) d
32) d
33) a

Capítulo XVII

ESFERAS

Definição

Dado um ponto **O** e um número real positivo **R**, chamamos de esfera de centro **O** e raio **R** à reunião de todos os pontos do espaço cuja distância até **O** é menor ou igual a **R**.

Denominamos **superfície esférica** ao conjunto de todos os pontos cuja distância até o ponto **O** é igual a **R**.

Área da Superfície Esférica

A área de superfície esférica é dada pela fórmula:

$$S_E = 4\pi R^2$$

Volume da Esfera

O volume de um esfera pode ser calculado através da fórmula:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Exemplo:

O círculo máximo de uma esfera tem 6 cm de raio. Determine a área de superfície esférica e o volume da esfera.

Resolução:

O círculo máximo de uma esfera é uma seção que contém seu centro e tem, portanto, o mesmo raio dela.

R = 6 cm

$S_E = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6^2$

Principais casos de inscrição e circunscrição de sólidos

Cilindro e esfera

$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$

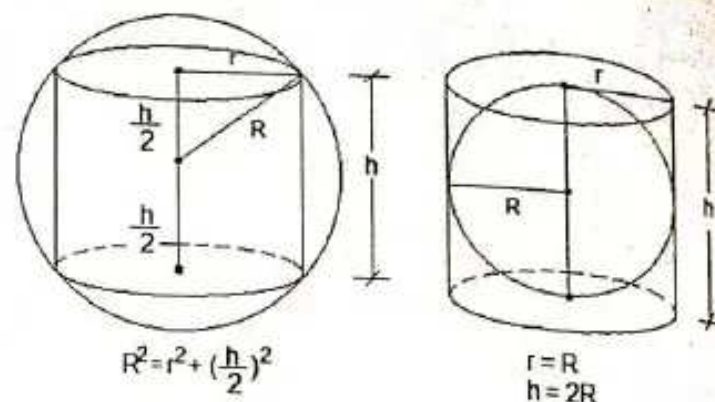
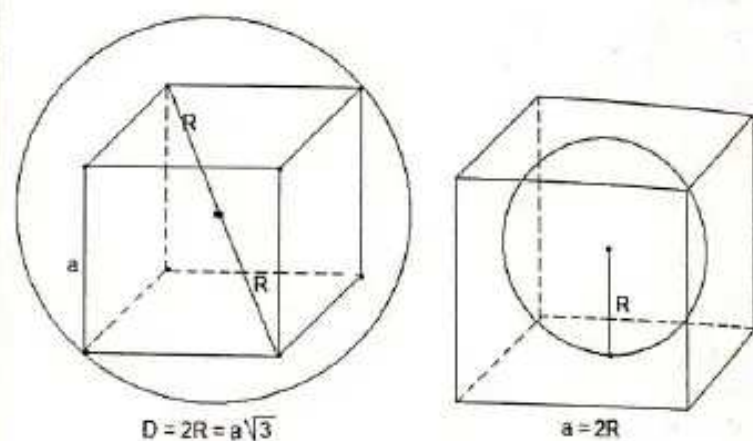
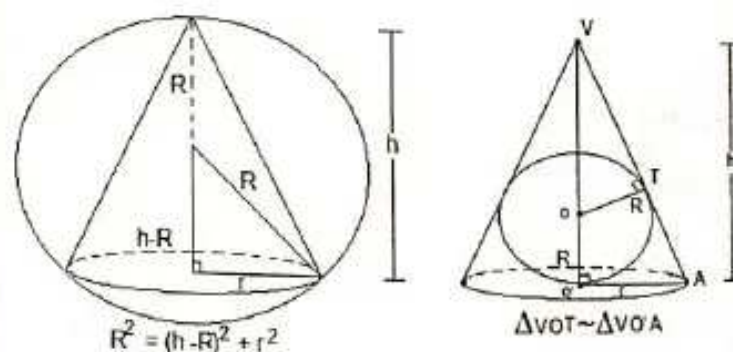
r = R
h = 2R

Cubo e esfera

$D = 2R = a\sqrt{3}$

$a = 2R$

Cone e esfera

$R^2 = (h - R)^2 + r^2$

$\Delta VOT \sim \Delta VO'A$

Exercícios

1) Dada uma esfera de raio 6 cm, determine o seu volume e a área de sua superfície esférica.

2) Determine a área do círculo máximo de uma esfera em que a razão entre as medidas de seu volume e da área de sua superfície esférica é igual a 5 cm.

3) Uma pessoa dividiu uma laranja de formato esférico em doze gomos idênticos, sendo que a casca de cada gomo

$$S_E = 144\pi\ cm^2$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3}$$

$$V = 288\pi\ cm^3$$

tinha área de 3π cm². Determine o volume dessa laranja.

4) **(UERJ)** A superfície de uma esfera pode ser calculada através da fórmula $4\pi R^2$, onde R é o raio da esfera. Sabe-se que 3/4 da superfície do planeta Terra são cobertos por água e 1/3 da superfície restante é coberto por desertos. Considere o planeta Terra esférico, com seu raio de 6 400 km e use π igual a 3.

A área dos desertos, em milhões de quilômetros quadrados, é igual a:

a) 122,88
b) 81,92
c) 61,44
d) 40,96

5) Determine o volume de uma esfera sabendo que a área de uma seção, que dista 8 cm do centro, mede 36π cm².

6) Tomé resolveu jogar boliche em uma pista de gelo. Em certa jogada, devido ao peso, a bola fundou parcialmente. Ao retirá-la, o jogador verificou que ela havia deixado um buraco com 8 cm de diâmetro e 2 cm de profundidade. Qual o volume da bola?

7) Determine o volume de um cubo inscrito em uma esfera de raio igual a $3\sqrt{3}$ cm.

8) Uma peça artesanal é composta por um cubo de acrílico, cuja aresta mede 6 cm, no qual está inscrita uma esfera de bronze. O espaço interior ao cubo não ocupado pela esfera é preenchido por um líquido colorido artificialmente. Quantos litros desse líquido serão necessários para preencher todo o espaço disponível?

9) Determine a área da superfície esférica e o volume de uma esfera circunscrita a um cilindro equilátero cuja seção meridiana tem área igual a 72 cm².

10) Uma indústria fabrica bolas de golfe com forma esférica e volume 36π cm³. Para embalá-las, utilizam uma caixa cilíndrica de acrílico com tampa e construída com material de espessura desprezível, de modo que a bola fique perfeitamente ajustada em seu interior. Qual o custo mínimo com o acrílico para a produção de dez dessas caixas, sabendo que 1 m² da chapa de acrílico, utilizada para a sua confecção, custa R$ 15,00? (Considere a aproximação 3 para o valor de π.)

11) Determine o volume de um cone circular reto inscrito em uma esfera, sabendo que os raios desses sólidos são respectivamente iguais a 12 cm e 13 cm.

12) Determine a razão entre os volumes de um cone equilátero e da esfera nele inscrita.

13) Um sorveteiro vende suas bolas de sorvete em casquinhas de biscoito de forma cônica de raio 4 cm e altura 13,5 cm. Jonas adquiriu duas bolas idênticas de sorvete, que foram colocadas na casquinha. Devido ao forte calor, o sorvete derreteu totalmente sem que ele tivesse dado qualquer lambida. Curiosamente, ele observou que o sorvete derretido encheu totalmente a casquinha, sem, no entanto, derramar. Se considerarmos que o derretimento das bolas de sorvete não alterou o seu volume inicial, determine o raio de cada bola de sorvete adquirida por Jonas.

14) Um cone circular reto ... duas esfe-

A esfera maior tem raio de 10 cm e seu volume é oito vezes o volume da menor.

Determine o valor de H.

15) **(UNICAMP)** Um cilindro circular reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, está inscrito em uma esfera. A razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a

a) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

b) $\frac{4}{3}$.

c) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

d) $\sqrt{2}$.

16) **(UNICAMP)** Um cilindro circular reto, com raio da base e altura iguais a R, tem a mesma área da superfície total que uma esfera de raio

a) 2R.
b) $\sqrt{3}$ R.
c) $\sqrt{2}$ R.
d) R.

17) **(ENEM)** Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.

Os sólidos são fabricados nas formas de:

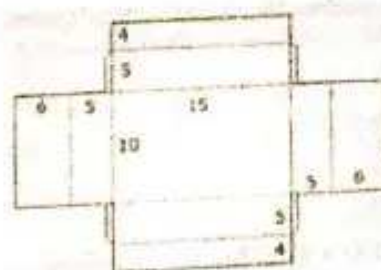
I – um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm.

II – um cubo de aresta 2 cm.

III – uma esfera de raio 1,5 cm.

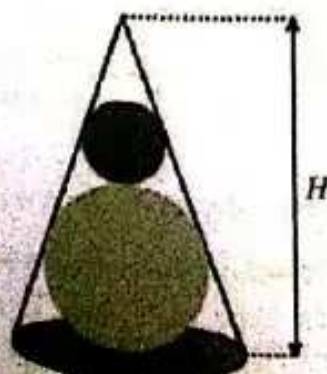
IV – um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm.

V – um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos:

a) I, II e III
b) I, II e V
c) I, II, IV e V
d) II, III, IV e V
e) III, IV e V

18) **(UERJ)** Observe o dado ilustrado abaixo, formado a partir ... faces numeradas de 1 a 6.

... circular reto de altura H circunscreve duas esferas tangentes, como mostra a figura a seguir.

... de um cubo, e com suas seis faces ...

Esses números são representados por buracos deixados por semiesferas idênticas retiradas de cada uma das faces. Todo o material retirado equivale a 4,2% do volume total do cubo.

Considerando $\pi = 3$, a razão entre a medida da aresta do cubo e a do raio de uma das semiesferas, expressas na mesma unidade, é igual a:

a) 6
b) 8
c) 9
d) 10

19) **(ENEM)** Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi \cdot (R)^3$. Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h$, sendo h a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a

a) 2R.
b) 4R.
c) 6R.
d) 9R.
e) 12R.

20) **(ENEM)** A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha.

Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 1

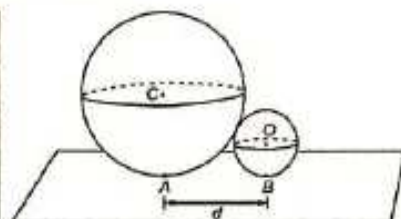



Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d. Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

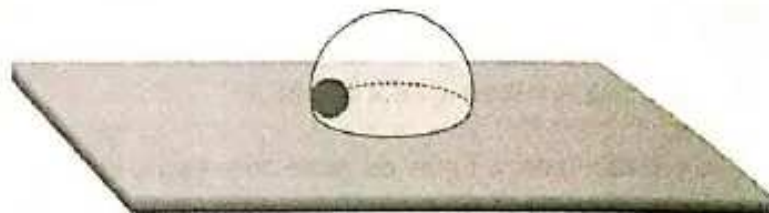
a) 1
b) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$
c) $\sqrt{10}$ ...

21) **(UERJ)** Três bolas de tênis, idênticas, de diâmetro igual a 6 cm, encontram-se dentro de uma embalagem cilíndrica, com tampa.

As bolas tangenciam a superfície interna da embalagem nos pontos de contato, como ilustra a figura abaixo.

Calcule:

a) a área total, em cm², da superfície da embalagem;
b) a fração do volume da embalagem ocupado pelas bolas.

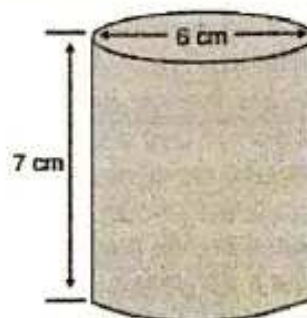
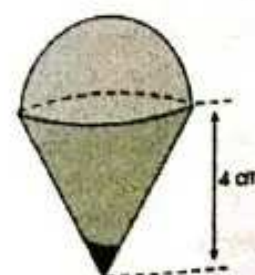
22) **(UERJ)** Uma cuba de superfície semiesférica, com diâmetro de 8 cm, está fixada sobre uma mesa plana. Uma bola de gude de forma esférica, com raio igual a 1 cm, encontra-se sob essa cuba.

Desprezando a espessura do material usado para fabricar a cuba, determine:

a) a maior área, em cm², pela qual a bola de gude poderá se deslocar na superfície da mesa;
b) o volume, em cm³, da maior esfera que poderia ser colocada embaixo dessa cuba.

23) **(ENEM)** Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

Figura 1

Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que ...

c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

d) 2

e) $\sqrt{10}$

O artesão deseja fazer um ... esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.

Dados:

- O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$;
- O volume do cilindro de altura h e área da base S é S.h;
- O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$;

Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é

a) 45.
b) 48.
c) 72.
d) 90.
e) 99.

24) **(ENEM)** Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:

1385 km	Toda água do planeta 1,39 bilhões de km^3
406 km	Água doce do planeta 35,03 milhões de km^3
272 km	Água doce subterrânea 10,53 milhões de km^3
58 km	Água doce superficial 104,59 mil km^3

Guia do Estudante: Atualidades e Vestibulares+ENEM. Abril: São Paulo. 2009.

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é

a) $\frac{1}{343}$ b) $\frac{1}{49}$

c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{29}{136}$

e) $\frac{136}{203}$

25) **(ENEM)** Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3 como valor aproximado para π.

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após ...

26) **(UERJ)** A tabela indica os preços e os diâmetros de bolinhos que têm forma esférica.

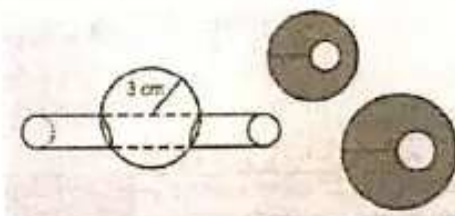
TIPOS DE BOLINHOS	DIÂMETRO (em cm)	PREÇO UNITÁRIO (em reais)
pequeno	2	1,00
médio	3	2,00
grande	4	3,00

a) Suponha que João comeu apenas um bolinho grande e Mariana comeu exatamente cinco pequenos.

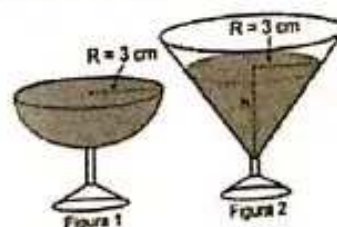
Calcule a percentagem do volume que João comeu a mais do que Mariana.

b) Foram arrecadados 40 reais na venda de 25 unidades de bolinhos.

Calcule a quantidade vendida de cada tipo, sabendo que o número de bolinhos foi o maior possível.

27) **(ENEM)** Um chefe de cozinha utiliza um instrumento cilíndrico afiado para retirar parte do miolo de uma laranja. Em seguida, ele fatia toda a laranja em secções perpendiculares ao corte feito pelo cilindro. Considere que o raio do cilindro e da laranja sejam iguais a 1 cm e a 3 cm, respectivamente.

A área da maior fatia possível é

a) duas vezes a área da secção transversal do cilindro.
b) três vezes a área da secção transversal do cilindro.
c) quatro vezes a área da secção transversal do cilindro.
d) seis vezes a área da secção transversal do cilindro.
e) oito vezes a área da secção transversal do cilindro.

28) **(ENEM)** Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisférico (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

Considere:

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

... com o formato de hemisfério é servida ...

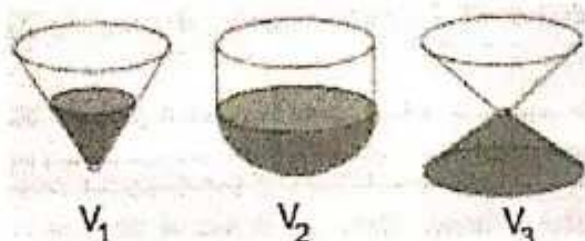
após a reprogramação da máquina, será igual a

a) 168.
b) 304.
c) 306.
d) 378.
e) 514.

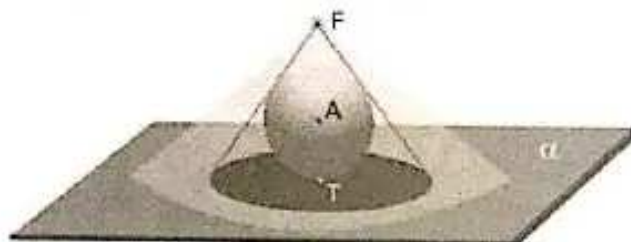
Sabendo que a taça com o formato ... completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33
b) 6,00
c) 12,00
d) 56,52
e) 113,04

29) **(ENEM)** Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca.

Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras.

Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se

a) $V_1 = V_2 = V_3$.
b) $V_1 < V_3 < V_2$.
c) $V_1 = V_3 < V_2$.
d) $V_3 < V_1 < V_2$.
e) $V_1 < V_2 = V_3$.

30) **(UERJ)** Uma esfera de centro A e raio igual a 3 dm é tangente ao plano α de uma mesa em um ponto T. Uma fonte de luz encontra-se em um ponto F de modo que F, A e T são colineares. Observe a ilustração:

Considere o cone de vértice F cuja base é o círculo de centro T definido pela sombra da esfera projetada sobre a mesa.

Se esse círculo tem área igual à da superfície esférica, então a distância $\overline{FT}$, em decímetros, corresponde a:

a) 10
b) 9
c) 8
d) 7

31) **(UERJ)** Na fotografia abaixo, observam-se duas bolhas de sabão unidas.

Quando duas bolhas unidas possuem o mesmo tamanho, a parede de contato entre elas é plana, conforme ilustra o esquema:

a) $\frac{\pi R^2}{2}$

b) $\frac{3\pi R^2}{2}$

c) $\frac{3\pi R^2}{4}$

d) $\frac{4\pi R^2}{3}$

32) Certa quantidade de material radioativo é compactada, tomando a forma de um cubo de aresta igual a uma unidade. Pretende-se revesti-lo com uma camada isolante, de espessura e formato tais que cada ponto da superfície externa do sólido a ser obtido diste exatamente uma unidade do cubo radioativo.

Determine o volume ocupado pelo isolante. Determine o volume ocupado pelo isolante.

33) **(UNICAMP)** Considere uma pirâmide reta de base quadrada, com lado da base igual a 6 m e altura igual a a.

a) Encontre o valor de a de modo que a área de uma face triangular seja igual a 15 m².
b) Para a = 2 m, determine o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

Gabarito

1) 288π cm³ e 144π cm²
2) 225π cm²
3) 36π cm³
4) d
5) $\frac{4000\pi}{3}$ m³
6) $\frac{500\pi}{3}$ cm³
7) 216 cm³
8) $\frac{9\cdot(6-\pi)}{250}$ l
9) 144π cm² e 288π cm³
10) R$ 2,43
11) 864π cm³
12) $\frac{9}{4}$
13) 3 cm
14) 40 cm
15) a
16) d
17) c
18) d
19) c

22)
a) 8π cm²
b) $\frac{32\pi}{3}$ cm³

23) e
24) a
25) e
26)
a) 60%
b) P = 17, M = 1 e G = 7

27) e
28) b
29) b
30) c
31) c
32) $\left(6+\frac{13\pi}{3}\right)$ u.v.
33)
a) 4 m
b) 5,5 m

19) e

20) e

21)

a) $126 \pi \, cm^2$

b) $\frac{2}{3}$

Considere duas bolhas de sabão esféricas, de mesmo raio R, unidas de tal modo que a distância entre seus centros A e B é igual ao raio R.

A parede de contato dessas bolhas é um círculo cuja área tem a seguinte medida:

Capítulo I

CONJUNTOS

Conceituação

O conceito de conjunto é um dos mais fundamentais em toda a Matemática e tal como ponto, reta e plano não tem definição. Sua percepção é intuitiva. Os componentes de um conjunto são chamados de elementos. É importante saber a simbologia utilizada no tratamento de conjuntos. Dentre os principais símbolos podemos destacar:

a) A, B, C, ... → letras maiúsculas indicam conjuntos
b) a, b, c, ... →letras minúsculas indicam elementos
c) | → tal que
d) ∃ → existe
e) ∃| → existe um único
f) ∄ → não existe
g) ∀ → para todo, qualquer que seja
h) ∧ → e
i) ∨ → ou
j) n(A) → nº de elementos do conjunto A

Representação de Um Conjunto

Podemos representar um conjunto segundo três formas:

I) Por extensão

Os elementos são mostrados explicitamente no conjunto.

Exemplo: A = {0, 1, 4}

II) Por compreensão

Os elementos são dados de forma implícita, por intermédio de uma propriedade característica dos elementos do conjunto.

Exemplo: A = {x|x é vogal}

III) Por diagramas

Utilizam-se linhas fechadas não entrecruzadas em cujo interior são dispostas partes associadas aos elementos do conjunto. Quando a linha utilizada é um círculo, estamos diante de um diagrama de VENN.

Exemplos:

Diagrama

Diagrama de Venn

Conjuntos disjuntos

II) Conjunto unitário

É aquele que apresenta um único elemento.

III) Conjunto universo

É o conjunto de onde são retiradas as soluções de determinado problema. É representado pelo símbolo U.

Relação de Pertinência

A relação de pertinência é utilizada somente entre ELEMENTO e CONJUNTO. Os símbolos usados são:

∈ → pertence a
∉ → não pertence a

Exemplos:

Dados o conjunto A = {a, b, c, d}, podemos afirmar que

$a \in A$

$c \in A$

$e \notin A$

$g \notin A$

Relação de Inclusão

Para o relacionamento entre dois conjuntos, utiliza-se a inclusão, que é regida pelos seguintes símbolos:

⊂ → está contido em
⊄ → não está contido em
⊃ → contém
⊅ → não contém

Exemplos:

$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

$\{0, 1, 3, 4\} \supset \{1\}$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

b) Todo conjunto está contido e contém ele mesmo.

c) Chamamos de SUBCONJUNTO de um conjunto todo conjunto nele contido. Como o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, ele é subconjunto de qualquer conjunto.

NOTA: Se um conjunto tem n elementos, então terá 2^n subconjuntos.

Exemplos:

Dado o conjunto A = {1, 2, 3}, temos que n(A) = 3, logo A terá $2^n = 2^3 = 8$ subconjuntos, quais sejam:

...juntos

São aqueles que não possuem elementos comuns.

Conjuntos importantes

I) Conjunto vazio

É aquele que não possui elementos. É representado por { } ou ∅.

∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} e {1, 2, 3}

Conjuntos Numéricos

I) Conjunto dos números naturais (IN)

IN = {0, 1, 2, 3......}

II) Conjunto dos números inteiros (Z)

Z = {......, -2, -1, 0, 1, 2,.....}

III) Conjunto dos números racionais (Q)

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{q}{p},\ p \wedge q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

Exemplos: $\frac{2}{3}$; 0; 8; 4,555...; –7

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Cabe ressaltar que o conjunto Q é formado por todos os números que podem ser expressos sob forma fracionária de numerador e denominador inteiros, este não nulo. Nesse conjunto figuram as frações ordinárias, os números decimais exatos, as dízimas periódicas e os números inteiros.

IV) Conjunto dos números irracionais (I)

$$I = \left\{ x \mid x \neq \frac{p}{q},\ p \wedge q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

Exemplos: $\sqrt{2}$; π; 4,721963...

NOTA: No conjunto I aparecem todos os números que não pertencem ao conjunto Q, tais como as raízes inexatas e as dízimas não periódicas.

V) Conjunto dos números reais (R)

$\Re = \{x \mid x \in Q \vee x \in I\}$

O conjunto $\Re$ é formado pelos números racionais e irracionais.

VI) Conjunto dos números complexos ou imaginários (C)

$C = \{x \mid x = a + bi,\ a \wedge b \in \Re,\ i = \sqrt{-1}\}$

NOTA: O conjunto C é o conjunto mais abrangente de todos. Será objetivo de estudo no Capítulo XI de Matemática I.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

1) A exclusão do ZERO de um conjunto deve ser feita usando-se um ASTERISCO (*).

Exemplo:

IN* = {1, 2, 3,...}

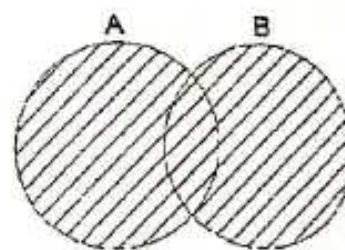
Z* = {..., -2, -1, 1, 2,...}

Operações com Conjuntos

I) União

A união de dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a um ou ao outro conjunto.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

No diagrama de VENN abaixo, $A \cup B$ é representado pela parte hachurada.

Exemplo:

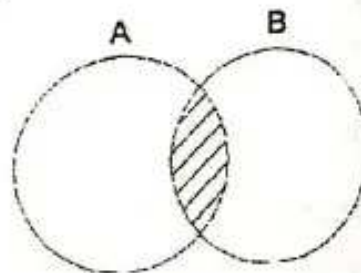
A = {2, 3, 4} B = {1, 2, 5}

$A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5}

II) Interseção

A interseção de dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a ambos simultaneamente.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

No diagrama de VENN abaixo, $A \cap B$ é representado pela parte hachurada.

Exemplo:

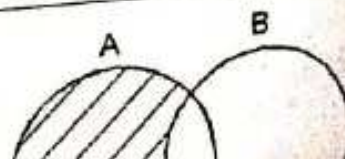
A = {1, 2, 3} B = {2, 3, 4} C = {4}

$A \cap B$ = {2, 3} $B \cap C$ = {4} $A \cap C = \varnothing$

No exemplo anterior os conjuntos A e C são chamados de **conjuntos disjuntos**, pois não têm elementos comuns.

III) Diferença

A diferença entre dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao primeiro conjunto e não pertencem ao segundo.

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

2) A exclusão dos NÚMEROS NEGATIVOS deve ser feita usando-se um SINAL POSITIVO (+).

Exemplo:

$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

3) A exclusão dos NÚMEROS POSITIVOS deve ser feita usando-se um SINAL NEGATIVO (-).

Exemplo:

$Z_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$

No diagrama de VENN mostrado, A - B é representado pela região hachurada.

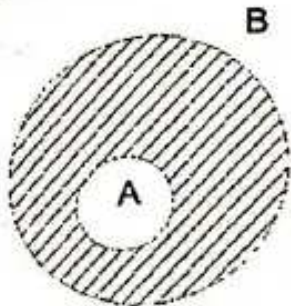
Exemplo:

$A = \{1, 4, 5\}$ $B = \{4, 5, 6\}$ $C = \{6\}$

$A - B = \{1\}$ $B - A = \{6\}$ $B - C = \{4, 5\}$

IV) Complementar

Se um conjunto A está contido em um conjunto B, chamamos de **complementar** de A em B ao conjunto B - A, isto é, o conjunto dos elementos de B que não **pertencem** a A.

$C_B^A = B - A$

No diagrama de VENN, C_B^A é representado pela região hachurada.

Exemplo:

$A = \{1, 2\}$ $B = \{0, 1, 2, 3\}$ $C = \{1, 2, 3, 4\}$

$C_B^A = \{0, 3\}$ $C_C^A = \{3, 4\}$ C_C^B não está definido, pois $B \not\subset C$

NOTA: A ausência do conjunto inferior no **complementar** indica que este é feito em relação ao conjunto universo.

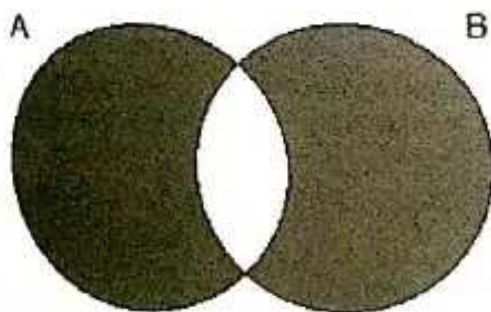
$$C^A = \overline{A} = A' = C_U^A = U - A$$

V) Diferença simétrica

A diferença simétrica de dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a apenas um dos conjuntos.

$$A \Delta B = \{x | x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

ou

$$A \Delta B = \{x | x \in A - B \vee x \in B - A\}$$

No diagrama de Venn acima, representamos $A \Delta B$ no caso em que A e B têm ao menos um elemento comum. Diagrame você, leitor, os outros casos e constate as propriedades abaixo.

1) $A \Delta A = \varnothing$

2) $A \Delta \varnothing = A$

3) $A \cap B = \varnothing$ ...

$A - B = \{1, 4\}$
$B - A = \{5, 6\}$
$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 4, 5, 6\}$

Leis de Morgan

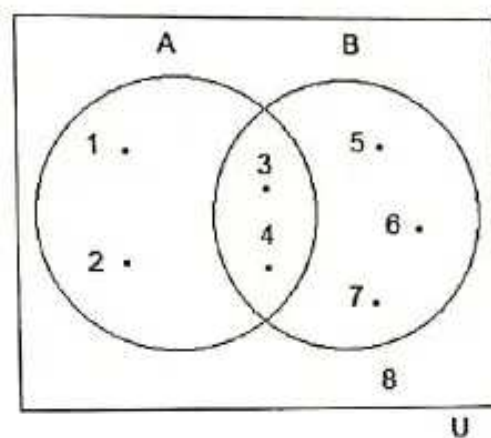
I) "O complementar da união de dois conjuntos é igual à interseção dos complementares desses conjuntos".

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

II) "O complementar da interseção de dois conjuntos e igual à união dos complementares desses conjuntos".

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Exemplo

Consideremos a situação a seguir.

Nesse diagrama podemos destacar os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Devemos lembrar que o complementar de um conjunto X, representado por $\overline{X}$, é igual a U - X.

Assim sendo, $\overline{A} = U - A = \{5, 6, 7, 8\}$ e $\overline{B} = U - B = \{1, 2, 8\}$. Vamos conferir a veracidade da lei I de Morgan.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \overline{A \cup B} = \{8\}$
$\overline{A} = \{5, 6, 7, 8\}$ e $= \{1, 2, 8\} \rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \{8\}$
Logo, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Utilizando um raciocínio análogo, podemos verificar a lei II.

$A \cap B = \{3, 4\} \rightarrow \overline{A \cap B} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$
$\overline{A} = \{5, 6, 7, 8\}$ e $\overline{B} = \{1, 2, 8\} \rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$

Então, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

A reta real

Os conjuntos N, dos números naturais, e Z, dos números inteiros, são infinitos porém enumeráveis. Isso significa que dado um elemento **x** de qualquer um desses conjuntos ... que seria o menor

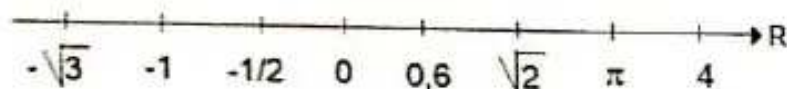
4) $A \subset B \Rightarrow A \Delta B = B - A$

Exemplo

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B \{2, 3, 5, 6\}$, temos que:

podemos identificar o seu sucessor, que seria o elemento do conjunto que é maior do que x. Assim, por exemplo, o sucessor do número 2, nos conjuntos N e Z, é o número 3, cujo sucessor é o número 4, cujo sucessor é o número 5, e assim por diante. Note que poderíamos determinar os sucessores infinitamente, pois como citamos anteriormente, esses conjuntos (N e Z), apesar de infinitos, são enumeráveis. Consideremos agora o conjunto R, dos números reais. Lembre-se que, nesse conjunto, encontram-se todos os números racionais e irracionais. Você poderia

identificar o sucessor real do número 2? Se você disser que é o 3, eu posso dizer, por exemplo, que é o 2,1. Você pode dizer que é o 2,01, e eu posso dizer que é o 2,001. Ou seria o 2,0001? Ou o número 2,00001? Certo é que a cada número citado como postulante sucessor do número 2, existe outro mais "próximo" do 2. Isto ocorre porque o conjunto dos números reais é infinito e não enumerável, haja vista que entre dois números reais quaisquer existe outro número real. Devido à necessidade de uma representação gráfica para a melhor visualização dos elementos do conjunto R, buscou-se um elemento geométrico que possuísse características análogas a ele. Escolheu-se a reta como modelo para representar os números reais, pois, além de ser formada por infinitos pontos, é impossível identificar o sucessor de cada um deles, visto que entre dois pontos quaisquer de uma reta há sempre um terceiro, fato semelhante ao que ocorre com os números reais. A reta utilizada, nesse caso, é chamada de RETA NUMERADA ou RETA REAL.

A reta real é orientada, pois estabelecemos um ponto como origem, associado ao número 0 (zero), e fazemos uma convenção de sinais: os pontos situados à direita do ponto origem estão associados aos números positivos e os situados à esquerda estão associados aos números negativos. Os números devem ser marcados em ordem crescente da esquerda para a direita, através de uma correspondência biunívoca, em que a cada número real está associado um único ponto da reta e vice-versa. Na figura a seguir, mostramos a reta numerada e alguns elementos do conjunto R.

Exercícios

1) Escreva por extensão os conjuntos:
   a) $A = \{x \mid x$ é ponto cardeal$\}$
   b) $B = \{x \mid x$ é parte do corpo humano$\}$
   c) $C = \{x \mid x$ é estado da região sul do Brasil$\}$
   d) $D = \{x \mid x$ é um número natural, primo e menor do que $10\}$

2) Escreva por compreensão os conjuntos:
   a) A = {Acre, Alagoas, Amapá, Amazonas}
   b) B = {a, e, i, o, u}
   c) $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
   d) D = {Alemanha, Brasil, Itália}
   e) $E = \{1, 3, 5, 15\}$

3) Escreva sob a forma de intervalos os conjuntos abaixo, que se encontram representados na forma implícita.
   a) $A = \{x \in R \mid -2 < x < 4\}$
   b) $B = \{x \in R \mid x \geq -3\}$
   c) $C = \{x \in R \mid x \leq 3\}$
   d) $D = \{x \in R \mid 1 \leq x < 5\}$
   e) $E = \{x \in R \mid 2 < x \leq 6 \wedge x \neq 4\}$
   f) $F = \{x \in R \mid x < -2 \vee 4 \leq x \leq 6\}$

4) Escreva os intervalos abaixo na forma implícita.
   a) $A = [3, 7]$

6) Quantos elementos possui o conjunto $A = \{1, 2, 3, \{2\}, 2, 1, 0\}$?

7) Quantos subconjuntos possui o conjunto $M = \{2, 5, \{1, 3\}, 8\}$? Quantos são não vazios?

8) Utilize corretamente os símbolos $\in$, $\subset$, $\supset$ e suas negações em:
   a) $2 ... \{1, 2\}$
   b) $3 ... \{2, 4\}$
   c) $\varnothing ... \{1, 2, 3\}$
   d) $\{2, 3\} ... \{0, 1, 2, 3\}$
   e) $\{1, 2, 3, 4\} ... \{2, 3\}$
   f) $\{1\} ... \{0, \{1\}, 2, 3\}$
   g) $\{\{1\}\} ... \{0, \{1\}, 2, 3\}$
   h) $\varnothing ... \{\varnothing, 2, 5\}$
   i) $\{\varnothing\} ... \{1, \{\varnothing\}\}$
   j) $\{2, 3, 4\} ... \{2, 3, 4\}$
   k) $\{3\} ... \{3, \{3\}, 4\}$
   l) $\{0, 1\} ... \{0, \{1\}, 2\}$
   m) $\{3, 4, 5, 6\} ... \{3, \{4\}, 5\}$
   n) $\{0\} ... \{\varnothing, 0\}$

9) Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, $C = \{0, 1, 3\}$ e $D = \{2, 6\}$, determine:
   a) $A \cup B$
   b) $B \cup C$
   c) $C \cup D$
   d) $A \cap B$
   e) $A \cap C$
   f) $A \cap D$
   g) $B \cap C$
   h) $A - B$
   i) $B - C$
   j) $C - D$
   k) $D - A$
   l) $B - D$
   m) $B - A$
   n) $A \Delta B$
   o) $B \Delta D$
   p) $C \Delta B$
   q) C_A^B
   r) C_A^C
   s) C_A^D
   t) $(A \cap D) \cup C$
   u) $(B - C) - (D \cap A)$
   v) $(B \cup D) \cap (A - D)$

10) Efetue as operações entre os conjuntos numéricos abaixo.
   a) $N \cup Z$
   b) $N \cap Z$
   c) $N \Delta Z$
   d) $N - Z$
   e) $Z - N$
   f) C_Z^N
   g) $N \cap Q$
   h) $Z \cap Q$
   i) $N \cup Z \cup Q$
   j) $N - Q$

b) $B =]-1, 4[$
c) $C = [2, 5[$
d) $D =]-\infty, 1]$
e) $E =]0, 3] \cup]4, +\infty[$
f) $F = [1, 3[\cup]3, 8]$

k) $Z - Q$
l) $Q \cap I$
m) $Q \cup I$
n) $Q - I$
o) $I - Q$
p) $R - Q$
q) $R - I$
r) $N \cup Z \cup Q \cup R$
s) $N \cap Z \cap Q \cap R$

5) Dado o conjunto $A = \{0;\ 2/3;\ 1{,}777...;\ 3{,}141592;\ \pi;\ 2{,}46538213...;\ -1{,}032032032...;\ \sqrt{7}\}$, determine os elementos do conjunto $B = \{x \in A \mid x \in Q\}$.

11) Sabendo que $A \cap B = \{1, 2\}$, $B \cap C = \{2, 3\}$, $B \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, determine o resultado de $(B - C) \cap A$.

12) **(PUC)** Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{1, 4, 5\}$ e $\{x, y, 1\}$ sejam iguais. Então podemos afirmar que:

a) $x = 4$ e $y = 5$
b) $x \neq 4$
c) $y = 4$
d) $x + y = 9$
e) $x < y$

13) **(ENEM)** Se $A = \{-2, 3, m, 8, 15\}$ e $B = \{3, 5, n, 10, 13\}$ são subconjuntos de Z e $A \cap B = \{3, 8, 10\}$, então:

a) $n - m \in A$
b) $n + m \in B$
c) $m - n \in A \cup B$
d) $mn \in B$
e) $\{m + n, mn\} \in A$

14) **(ENEM)** Os conjuntos S, T e P são tais que todo elemento de S é elemento de T ou P.

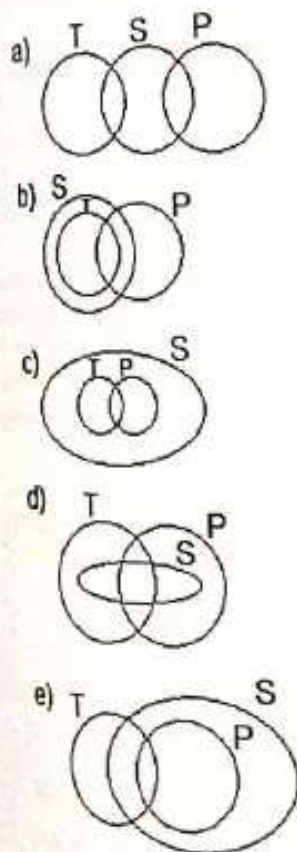
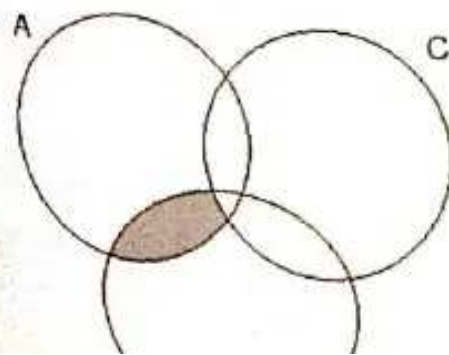
O diagrama que pode representar esses conjuntos é:

a)

b)

c)

d)

e) T S P

15) Considerando os conjuntos A, B e C, a região sombreada no diagrama abaixo representa:

16) Dado o conjunto $P = \{\{0\}, 0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas abaixo.

I) $\{0\} \in P$
II) $\{0\} \subset P$
III) $\varnothing \in P$

17) **(PUC)** Se $A = \{x \in R \mid x < 1\}$, $B = \{x \in R \mid -1 < x \leq 1\}$ e $C = \{x \in R \mid x \geq 0\}$, então qual é o conjunto que representa $(A \cap B) - C$?

18) **(PUC)** Se $A = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in R \mid 3 < x < 5\}$, qual é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B?

19) **(UERJ)** O segmento XY, indicado na reta numérica abaixo, está dividido em dez segmentos congruentes pelos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I.

Admita que X e Y representem, respectivamente, os números $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{2}$.

O ponto D representa o seguinte número:

a) $\frac{1}{5}$
b) $\frac{8}{15}$
c) $\frac{17}{30}$
d) $\frac{7}{10}$

20) **(PUC)** Em uma escola, 50% dos alunos leem o jornal A, 80% leem o jornal B, e todo aluno é leitor de pelo menos um desses jornais. O percentual de alunos que leem os dois jornais é:

a) 130%.
b) 30%.
c) 20%.
d) 10%.
e) 5%.

21) **(PUC)** Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. Quinze alunos acertaram as duas questões, 20 acertaram a primeira e 22 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões?

a) 15
b) 13
c) 22
d) 20
e) 12

22) **(PUC)** Uma pesquisa realizada com 245 atletas, sobre as atividades praticadas nos seus treinamentos, constatou que 135 desses atletas praticam natação, 200 praticam corrida e 40 não utilizavam nenhuma das duas modalida-

a) $A \cap (C - B)$
b) $A \cup (C - B)$
c) $A \cap (B - C)$
d) $A \cup (B - C)$
e) $(A \cup B) - C$

B

des no seu treinamento.

Então, o número de atletas que praticam natação e corrida é:

a) 70
b) 95
c) 110
d) 125
e) 130

23) **(PUC)** Em uma pesquisa, constatou-se que, das 345 pessoas de um determinado local, 195 jogavam tênis, 105 jogavam tênis e vôlei, e 80 não jogavam nem vôlei nem tênis.

Qual é o número de pessoas que jogavam vôlei e não jogavam tênis?

a) 70
b) 75
c) 105
d) 180
e) 195

24) **(PUC)** Em uma turma de 60 alunos, 21 praticam natação e futebol, 39 praticam natação e 33 praticam futebol.

a) Qual a porcentagem de alunos que praticam um, e somente um, desses esportes?

b) Qual a porcentagem de alunos que não praticam nenhum desses esportes?

25) Em uma turma com 36 alunos, sabe-se que 9 não falam inglês, 12 não falam espanhol e 5 não falam nem inglês e nem espanhol. Quantos alunos dessa turma falam inglês e espanhol?

26) **(PUC)** Em uma turma de Engenharia formada de 30 rapazes e 30 moças, sabe-se que 20% dos rapazes são fumantes e 30% das moças são fumantes. Qual o percentual de não fumantes nessa turma?

27) **(FUVEST)** Num acampamento, com 44 participantes, realizado no "Petar – Parque Estadual Turístico do Alto da Ribeira", num certo dia, foram realizadas duas atividades:

(I) rapel na cachoeira;
(II) visita à caverna.

Do total de participantes, 7 fizeram as duas atividades, 5 não participaram de nenhuma das atividades e o número de participantes que apenas visitaram a caverna foi o triplo dos que apenas fizeram o rapel. Quantos participantes visitaram a caverna?

a) 15
b) 24
c) 25
d) 31
e) 39

28) **(UERJ)** Em uma escola circulam dois jornais: Correio do Grêmio e O Estudante. Em relação à leitura desses jornais, por parte dos 840 alunos da escola, sabe-se que:

- 10% não leem esses jornais;
- 520 leem o jornal O Estudante;
- 440 leem o jornal Correio do Grêmio.

Calcule o número total de alunos do colégio que leem os dois jornais.

29) Um estudo de grupos sanguíneos, realizado com 1.200 homens e 800 mulheres, revelou que 1.080 pessoas tinham o antígeno A, 900 o antígeno B e 500, nenhum dos dois antígenos. Se o resultado da pesquisa é proporcional ao número de homens e mulheres, a quantidade de

30) **(FUVEST)** Durante uma viagem choveu 5 vezes. A chuva caía pela manhã ou à tarde, nunca o dia todo. Houve 6 manhãs e 3 tardes sem chuva. Quantos dias durou a viagem?

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

31) **(UERJ)** Crianças de uma escola participaram de uma campanha de vacinação contra a paralisia infantil e o sarampo. Após a campanha, verificou-se que 80% das crianças receberam a vacina contra a paralisia, 90% receberam a vacina contra o sarampo, e 5% não receberam nem uma, nem outra.

Determine o percentual de crianças dessa escola que receberam as duas vacinas.

32) **(UERJ)** Um grupo de alunos de uma escola deveria visitar o Museu de Ciência e o Museu de História da cidade. Quarenta e oito alunos foram visitar pelo menos um desses museus, 20% dos que foram ao de Ciência visitaram o de História e 25% dos que foram ao de História visitaram também o de Ciência.

Calcule o número de alunos que visitaram os dois museus.

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

33) Numa pesquisa para se avaliar a leitura de três revistas A, B e C, descobriu-se que 81 pessoas leem, pelo menos uma das revistas; 61 leem somente uma delas e 17 pessoas leem exatamente duas das três revistas. Assim sendo, qual o número de pessoas mais bem informadas dentre as 81?

34) **(PUC)** Um trem viajava com 242 passageiros, dos quais:

- 96 eram brasileiros;
- 64 eram homens;
- 47 eram fumantes;
- 51 eram homens brasileiros;
- 25 eram homens fumantes;
- 36 eram brasileiros fumantes;
- 20 eram homens brasileiros fumantes.

Calcule:

a) o número de mulheres brasileiras não fumantes;
b) o número de homens fumantes não brasileiros;
c) o número de mulheres não brasileiras, não fumantes.

35) **(UERJ)** Em um posto de saúde foram atendidas, em determinado dia, 160 pessoas com a mesma doença, apresentando, pelo menos, os sintomas diarreia, febre e dor no corpo, isoladamente ou não.

A partir dos dados registrados nas fichas de atendimento dessas pessoas, foi elaborada a tabela abaixo:

SINTOMAS	FREQUÊNCIA

...ao número de homens e mulheres, a quantidade de mulheres que possui os antígenos A e B é:

a) 176
b) 184
c) 192
d) 198

Diarreia	62
Febre	62
Dor no corpo	72
Diarreia e febre	14
Diarreia e dor no corpo	8
Febre e dor no corpo	20
Diarreia, febre e dor	X

Na tabela, X corresponde ao número de pessoas que apresentaram, ao mesmo tempo, os três sintomas.
Pode-se concluir que X é igual a:

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

36) (ENEM) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1.

Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

a) 135
b) 126
c) 118
d) 114
e) 110

37) (ENEM) Um estudo realizado com 100 indivíduos que abastecem seu carro uma vez por semana em um dos postos X, Y ou Z mostrou que:

45 preferem X a Y, e Y a Z.

25 preferem Y a Z e Z a X.

30 preferem Z a Y, e Y a X.

Se um dos postos encerrar suas atividades, e os 100 consumidores continuarem se orientando pelas preferências descritas, é possível afirmar que a liderança de preferência nunca pertencerá a

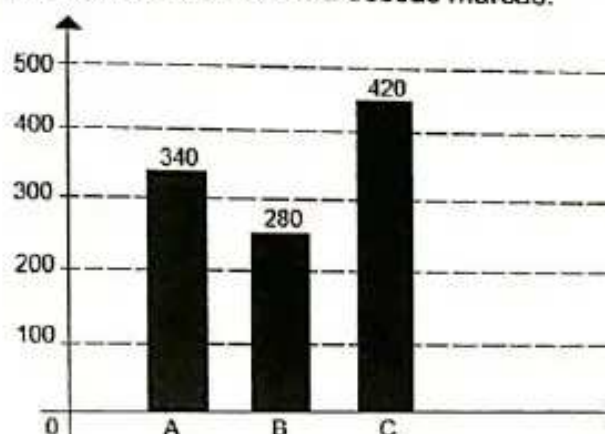
a) X.
b) Y.
c) Z.
d) X ou Y.
e) Y ou Z.

38)(UERJ) Entre 28 estudantes que cursam pelo menos uma matéria entre Matemática, Português ou Química, o número dos que cursam só Matemática e Português é igual ao número dos que cursam só Matemática. Nenhum estudante cursa só Português ou só Química e 6 estudantes cursam só Matemática e Química. O número dos que cursam só Português e Química é o quíntuplo do número dos que cursam as três matérias. Sendo este último número par e diferente de zero, achar o número dos que cursam só Português e Matemática.

39) Em uma barbearia observou-se que o número de bigodudos é igual ao número de carecas sem bigode, e que o número de bigodudos cabeludos é o dobro do número de carecas bigodudos. Se 10% das pessoas presentes são cabeludos sem bigodes, qual o percentual de carecas presentes na...

41) **(PUC)** A e B são conjuntos. O número de elementos de A é 7 e o número de elementos de A U B é 9. Determine os valores mínimo e máximo para o número de elementos do conjunto B.

42) Com relação ao consumo dos moradores de certo bairro sobre o consumo das marcas de refrigerante A, B e C, 500 pessoas foram entrevistadas, e o resultado da pesquisa está no gráfico a seguir, em que é mostrado o número de consumidores de cada uma dessas marcas.

Marca	Consumidores
A	340
B	280
C	420

Com base nesses dados, os percentuais mínimo e máximo possíveis de entrevistados que consomem as três marcas são, respectivamente, iguais a

a) 16% e 56%.
b) 8% e 60%.
c) 8% e 56%.
d) 6% e 60%.
e) 6% e 56%.

Gabarito

1)
a) A = {norte, sul, leste, oeste}
b) B = {cabeça, tronco, membros}
c) C = {Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}
d) D = {2, 3, 5, 7}

2)
a) A = { x | x é estado do Brasil que começa com a letra A}
b) B = {x | x é vogal}
c) C = {x | x é um número natural, par e menor do que 9}
d) D = {x | x é país cuja seleção de futebol foi ao menos quatro vezes campeã da copa}
e) E = {x | x é divisor positivo de 15}

3)
a) $]-2, 4[$ ou $(-2, 4)$
b) $[-3, +\infty[$ ou $[-3, +\infty)$
c) $]-\infty, 3]$ ou $(-\infty, 3]$
d) $[1, 5[$ ou $[1, 5)$
e) $]2, 4[\cup]4, 6]$ ou $(2, 4) \cup (4, 6]$
f) $]-\infty, -2[\cup [4, 6]$ ou $(-\infty, -2) \cup [4, 6]$

4)
a) $\{x \in R \mid 3 \leq x \leq 7\}$
b) $\{x \in R \mid -1 < x < 4\}$
c) $\{x \in R \mid 2 \leq x < 5\}$
d) $\{x \in R \mid x \leq 1\}$
e) $\{x \in R \mid 0 < x \leq 3 \vee x > 4\}$

... nessa barbearia?

40) Um buquê contém flores, entre as quais rosas vermelhas. Se retirarmos todas as flores de cor vermelha, restarão 14 flores. Se retirarmos todas as rosas, restarão 17 flores. Se retirarmos todas as flores que não são vermelhas, restarão 19 flores e, se retirarmos todas as rosas vermelhas, restarão 26 flores.

Determine o número de flores desse buquê e o número de flores que não são vermelhas.

f) $\{x \in R \mid 1 \leq x \leq 8 \wedge x \neq 3\}$

5) $B = \{0; \frac{2}{3}; 1,777\cdots; 3,141592; -1,032032032...\}$

6) 5

7) 16 e 15

8)
a) $\in$
b) $\notin$
c) $\subset$
d) $\subset$
e) $\supset$
f) $\in$
g) $\subset$
h) $\in$ ou $\subset$
i) $\in$
j) $\subset$ ou $\supset$
k) $\in$ ou $\subset$
l) $\not\subset$
m) $\not\supset$
n) $\subset$

9)
a) {0, 1, 2, 3, 4, 5}
b) {0, 1, 2, 3, 4, 5}
c) {0, 1, 2, 3, 6}
d) {2, 4, 5}
e) {0, 1, 3}
f) {2}
g) $\varnothing$
h) {0, 1, 3}
i) {2, 4, 5}
j) {0, 1, 3}
k) {6}
l) {4, 5}
m) $\varnothing$
n) {0, 1, 3}
o) {4, 5, 6}
p) {0, 1, 2, 3, 4, 5}
q) {0, 1, 3}
r) {2, 4, 5}
s) não está definido, pois $D \not\subset A$
t) {0, 1, 2, 3, 4, 5}
u) {4, 5}
v) {4, 5}

10)
a) Z
b) N
c) Z_-^*
d) $\varnothing$
e) Z_-^*
f) Z_-^*
g) N
h) Z
i) Q
j) $\varnothing$
k) $\varnothing$
l) $\varnothing$
m) R
n) Q
o) I
p) I
q) Q
r) R
s) N

11) {1}

12) d

13) a

14) d

15) c

16) todas verdadeiras

17) $\{x \in R \mid -1 < x < 0\}$

18) $\{x \in R \mid 1 \leq x \leq 3\}$

19) d

20) b

21) b

22) e

23) a

24)
a) 50%
b) 15%

25) 20

26) 75%

27) d

28) 204

29) c

30) b

31) 75%

32) d

33) 3

34)
a) 29
b) 5
c) 127

35) a

36) c

37) a

38) 6

39) 60%

40) 33 flores, sendo 9 não vermelhas

41) 2 e 9

42) c

Anotações

Capítulo II

PRODUTO CARTESIANO

Definição

O produto cartesiano entre dois conjuntos A e B é um conjunto de pares ordenados tais que o primeiro elemento pertence ao conjunto A, enquanto o segundo elemento pertence ao conjunto B.

Simbolicamente temos:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Exemplo:

1) Dados os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {4, 2}, determine:

a) A x B = {(1, 4), (1, 2), (2, 4), (2, 2), (3, 4), (3, 2)}

b) B x A = {(4, 1), (4, 2), (4, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) O número de pares que constitui o produto cartesiano de dois conjuntos é obtido através do produto entre os números de elementos dos conjuntos.

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

b) O produto cartesiano não é COMUTATIVO, ou seja $A \times B \neq B \times A$. Os pares de B x A podem ser obtidos através de inversão da ordem dos elementos nos pares de A x B.

c) A notação A^2 significa A x A.

Exercícios

1) Dados os conjuntos A = {2, 3, 4}, B = {1, 3} e C = {5}, determine:

a) A x B
b) B x A
c) A x C
d) C x B
e) B^2

2) O conjunto A^2 possui 16 elementos, entre eles os pares (1, 3) e (2, 5). Determine o conjunto A.

3) Considere dois conjuntos disjuntos não vazios A e B, tais que A U B possui oito elementos. Qual o número máximo de elementos de A x B?

4) O produto cartesiano do conjunto A = {x | x é letra da palavra AMOR} com outro conjunto B possui 20 elementos. O conjunto B pode ser...

5) Os pares (3, 6), (1, 5), (2, 2) e (2, 4) pertencem a B x A, que possui 12 elementos. O conjunto A – B é:

a) {1, 2}
b) {1, 3}
c) {2, 3}
d) {1, 2, 3}
e) {4, 5, 6}

6) Dados os conjuntos A = { 2, 3, 4, 5}, B = {1, 3}, C = {2, 3, 4} e D = {1}, represente graficamente:

a) A x B
b) B x A
c) A x C
d) D x B
e) C x D
f) B^2

7) Dados os conjuntos A = [2, 4], B =]1, 4], C =]2, 5[e D = {2, 3}, represente graficamente:

a) A x B
b) B x C
c) C x A
d) A x D
e) D x B

8) O gráfico abaixo representa B x A. Podemos afirmar que

a) A =]2, 6[e B = [1, 4].
b) A = [2, 6] e B =]1, 4[.
c) A = [1, 4[e B =]2, 6].
d) A =]1, 4[e B = [2, 6].
e) A = [1, 4] e B =]2, 6[.

Gabarito

1)

a) {(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3)}
b) {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}
c) {(2, 5), (3, 5), (4, 5)}
d) {(5, 1), (5, 3)}
e) {(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)}

1 3 x

8) e

Capítulo III

RELAÇÕES E FUNÇÕES

Relações

Definição

Dados dois conjuntos A e B, uma relação R de A em B é qualquer subconjunto de A x B, ou seja $R \subset A \times B$.

Exemplo:

Dados $A = \{2, 3\}$ e $B = \{5\}$, então $A \times B = \{(2, 5), (3, 5)\}$, assim, teríamos como relações de A em B:

$R_1 = \varnothing$, $R_2 = \{(2, 5)\}$, $R_3 = \{(3, 5)\}$ e $R_4 = \{(2, 5), (3, 5)\}$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Dados A e B dois conjuntos, o número de relação de A em B pode ser obtido através de

$$n(R) = 2^{n(A \times B)}$$

Exemplo:

Quantas relações podemos construir de $A = \{a, e, i\}$ em $B = \{0, 1, 2, 3\}$?

Relação:

$n(A) = 3$
$n(B) = 4$
$n(A \times B) = 3 \times 4 = 12$
nº relações $= 2^{n(A \times B)} = 2^{12} = 4096$

Domínio, contra-domínio e conjunto imagem

Considerando uma relação R de A em B, temos que

I) O domínio da relação é o conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares de R.

II) O contra-domínio da relação é o conjunto de chegada. É o próprio conjunto B.

III) O conjunto imagem da relação é o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares de R.

Exemplo:

Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$ e R uma relação de A em B, definida por $R = \{(1, 4), (2, 8), (4, 8), (1, 9)\}$, então:

$Dom(R) = \{1, 2, 4\}$ $CD(R) = B$ $Im(R) = \{4, 8, 9\}$

Funções

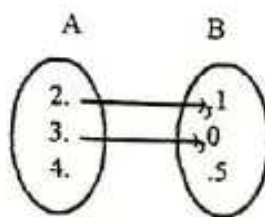
Definição

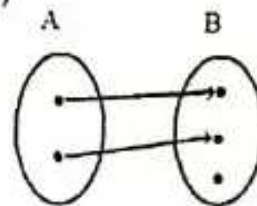
Uma relação de A em B é uma função de A em B quando ela associa a todo e qualquer ...

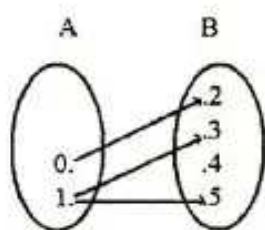
III) Finalmente, a representação normal da função f será:

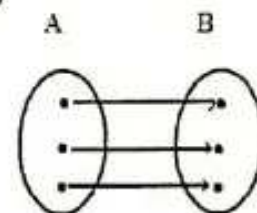
$f: A \to B$ $x \to y$	lê-se: "f de A em B, associa a cada elemento x um único elemento y"

Exemplos:

a)

não é função pois o elemento 4 não tem imagem.

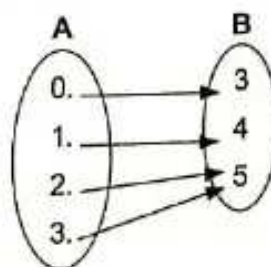
c)

é função.

b)

não é função pois o elemento 1 tem mais de uma imagem

d)

é função.

Qualidades das Funções

I) Função sobrejetora

É aquela em que todo e qualquer elemento do contra-domínio é imagem de ao menos um elemento do domínio. Observe que em uma função sobrejetora o conjunto imagem é igual ao contra-domínio.

A função é sobrejetora pois o conjunto imagem é igual ao contra-domínio.

... é qualquer elemento de A um único elemento de B.

Notações

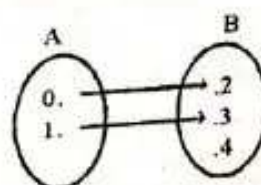
I) Geralmente utilizamos letras minúsculas para a representação de uma função, por exemplo: f, g, h,....

II) Para representarmos que uma função f associa elementos de A a elementos de B, utilizamos a simbologia:

$f: A \to B$ lê-se "f de A em B"

$Im = CD = \{3, 4, 5\} = B$

II) Função injetora

É aquela em que cada elemento do conjunto é imagem de no máximo um elemento do domínio.

A função é injetora pois os elementos 2 e 3 do conjunto-imagem estão associados a um único elemento, cada, do domínio.

III) Função bijetora

É aquela que é simultaneamente sobrejetora e injetora.

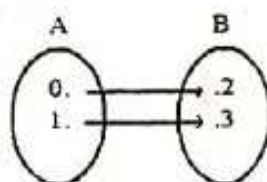
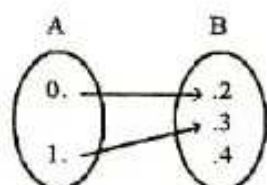
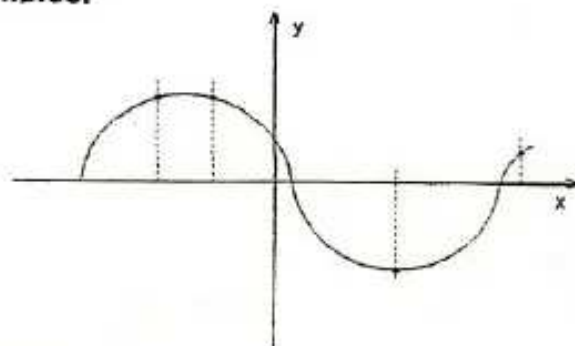
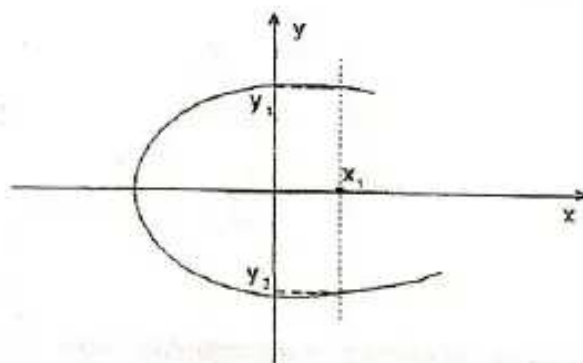
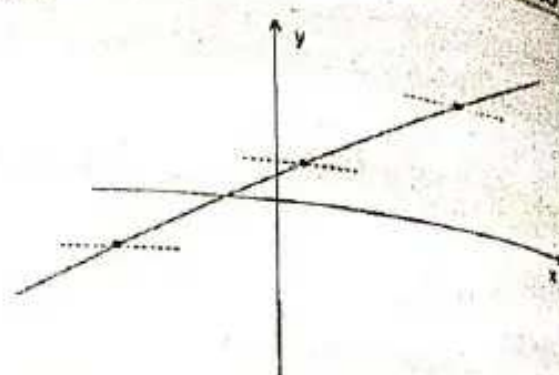
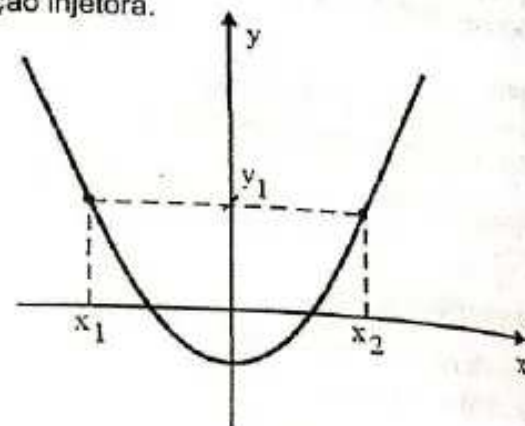
Exemplos:

A função é sobrejetora e injetora, logo é bijetora.

A função não é sobrejetora, logo não é bijetora.

Gráfico de uma função

Um gráfico pode representar uma função se toda reta vertical intersectá-lo no máximo em um ponto, pois se houver ao menos uma reta vertical que seccione o gráfico em mais de um ponto indica que há um valor de x associado a mais de um valor de y, ou seja existe um x com mais de uma imagem, o que implica que tal gráfico não pode representar uma função.

Exemplos:

É função.

Não é função, pois o elemento x_1 possui duas imagens distintas y_1 e y_2.

Exemplos:

É função injetora.

Não é função injetora, pois o elemento y_1 é imagem dos valores distintos x_1 e x_2.

Principais Funções Reais

I) Função afim

É toda função real de variável real definida por:

$$y = f(x) = ax + b;\ a, b \in R$$

Exemplos:

a) $f(x) = 2x - 5$

b) $g(x) = -4x$

c) $h(x) = 3$

II) Função polinomial do 1º grau

É toda função afim do tipo:

$$y = f(x) = ax + b,\ a \in \Re^* \wedge b \in \Re$$

No Capítulo XVI de Matemática III, "Retas no $\Re^2$" faremos um estudo mais aprofundado da função afim. Por ora cabe-nos ressaltar alguns aspectos importantes:

a) o gráfico de uma função denominada do 1º grau é uma reta;

b) na função, o número a (coeficiente de x) é chamado de **coeficiente angular da reta**, enquanto que o número b (termo independente) é chamado de **coeficiente linear da reta**;

c) a reta representativa da função intersecta o eixo horizontal na raiz da função $(x = -\frac{b}{a})$;

d) para valores de x à direita da raiz, a função assume o mesmo sinal de a;

Gráfico de Uma Função Injetora

Dado o gráfico de uma função, esta será injetora se toda e qualquer reta horizontal intersectá-lo no máximo em um ponto, pois em caso contrário haveria um valor de y associado a mais de um valor de x, o que contraria a definição de função injetora.

e) para valores de x à esquerda da raiz, a funç[...] sinal contrário ao de a;

f) quando $a > 0$ a função é crescente;

g) quando $a < 0$ a função é decrescente;

h) a função do 1º grau é injetora. O domínio da função é o conjunto $\Re$ e como $Im = CD = \Re$ ela é sobrejetora. Daí a função do 1º grau ser bijetora.

Exemplo:

$y = f(x) = 2x - 3$

$a = 2 \rightarrow$ coeficiente angular;

$b = -3 \rightarrow$ coeficiente linear.

Como o gráfico é uma reta, necessitamos dois de seus pontos, os quais serão obtidos atribuindo-se valores para x ou y.

Façamos $x = 0$, logo:

$y = 2x - 3$

$y = 2.0 - 3 \quad \therefore \quad y = -3$

Então o ponto $(0, -3)$ pertence à reta.

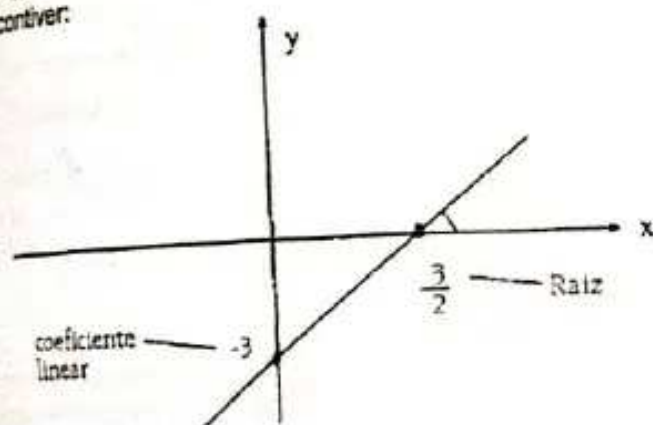
Façamos, desta feita, $y = 0$, teremos:

$y = 2x - 3$

$0 = 2x - 3$

$3 = 2x \quad \therefore \quad x = \frac{3}{2}$

Logo, o ponto $(\frac{3}{2}, 0)$ pertence à reta.

Agora marquemos os pontos. O gráfico será a reta que os contiver:

Note que para valores de x à direita da raiz ($x = 3/2$), a reta passa acima do eixo x, é positiva, tem o mesmo sinal de a($a = 2$), ao passo que para valores de x à esquerda da raiz, passa abaixo do eixo x, é negativa, tem sinal contrário ao de a, ou seja:

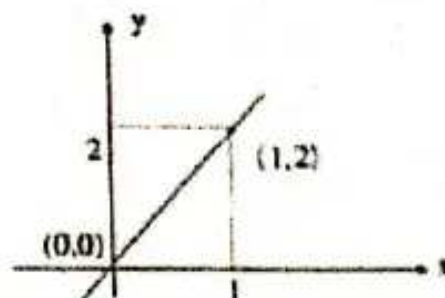
$f(x) > 0 \rightarrow x > \frac{3}{2} \qquad f(x) = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \qquad f(x) < 0 \rightarrow x < \frac{3}{2}$

Observe que a função é crescente pois $a > 0$.

III) Função linear

É toda função do 1º grau cujo coeficiente linear vale zero. É definida por

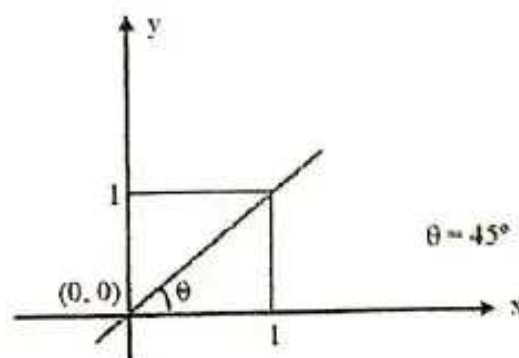
$$y = f(x) = a \,.\, x;\ a \in \Re^*$$

O gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem.

IV) Função identidade

É a função linear cujo coeficiente angular vale 1. É definida por

$$y = f(x) = x$$

O gráfico da função identidade é uma reta que passa pela origem e é bissetriz dos quadrantes ímpares (1º e 3º).

x	y = x
0	$0 \rightarrow (0, 0) \in$ reta
1	$1 \rightarrow (1, 1) \in$ reta

V) Função constante

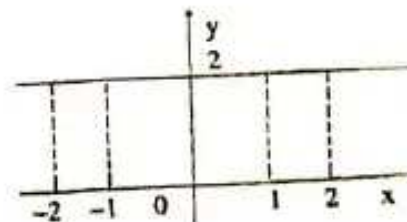
É toda função afim em que a coeficiente angular a é igual a zero, ou seja:

$$f(x) = b \text{ ou } y = b,\ b \in R$$

Exemplo:

Seja construir o gráfico da função:

$y = f(x) = 2$

x	y = f(x)
−2	f(−2) = 2
−1	f(−1) = 2
0	f(0) = 2
2	f(2) = 2

NOTA: O gráfico de toda função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

VI) Função quadrática ou trinômio do 2º grau

Exemplo:

$y = f(x) = 2x$

$a = 2 \rightarrow$ coeficiente angular

$b = 0 \rightarrow$ coeficiente linear

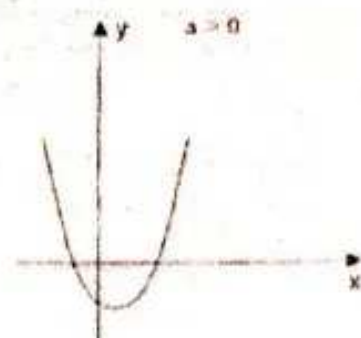
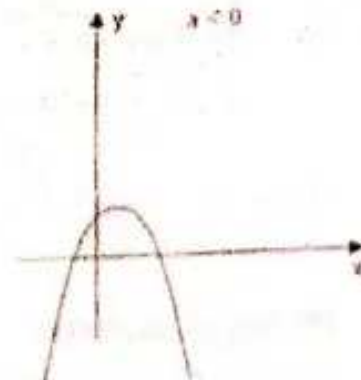
x	y = 2x
0	0 → (0, 0) ∈ reta
1	2 → (1, 2) ∈ reta

É a função definida por:

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c;\quad a, b, c \in \Re \text{ e } a \neq 0$$

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Na construção gráfica, devemos ressaltar 4 pontos importantes:

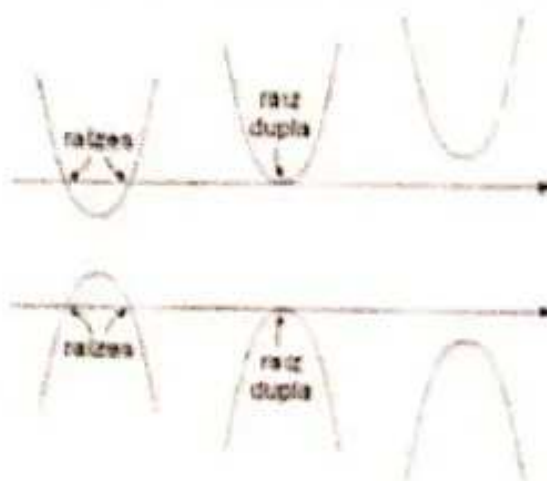
1) Concavidade

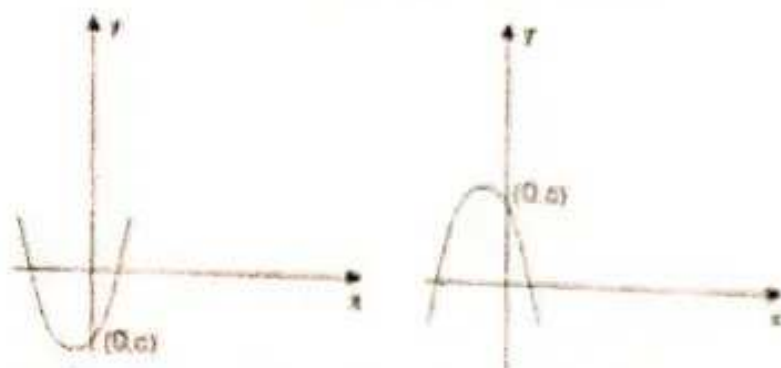
É a "abertura" da parábola, a qual estará voltada para cima quando $a > 0$, ou voltada para baixo $a < 0$.

2) Interseção com o eixo horizontal

A parábola secciona o eixo horizontal nas raízes do trinômio. Temos a considerar três casos distintos.

a) $\Delta > 0 \rightarrow$ 2 raízes reais diferentes
→ parábola secante ao eixo horizontal.

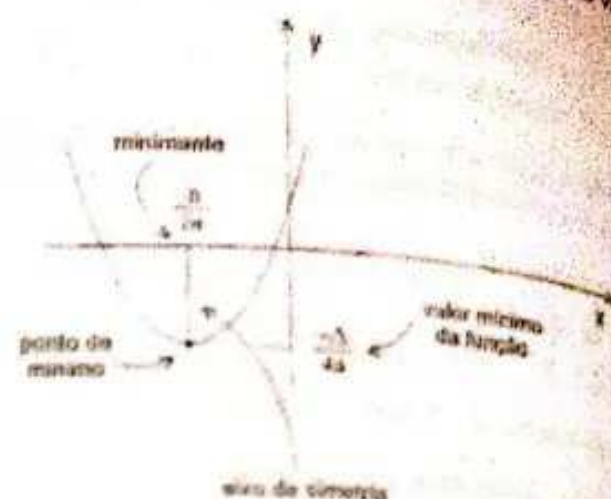
b) $\Delta = 0 \rightarrow$ 2 raízes reais iguais (raiz dupla)
→ parábola tangente ao eixo horizontal.

c) $\Delta < 0 \rightarrow$ 2 raízes complexas
→ parábola não toca o eixo horizontal.

3) Interseção com o eixo vertical

A parábola corta o eixo vertical no ponto (0, c)

4) Vértice

É o ponto "extremo" da parábola. Sua abscissa é dada por $-\frac{b}{2a}$ e a ordenada vale $-\frac{\Delta}{4a}$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

chamada MINIMANTE, e sua ordenada $(-\Delta/4a)$ é o VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO.

b) Quando $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo, assim, o vértice é o seu "ponto mais alto", sendo chamado de PONTO DE MÁXIMO. Sua abscissa $(-b/2a)$ é chamada de MAXIMANTE, e sua ordenada $(-\Delta/4a)$ é o VALOR MÁXIMO DA FUNÇÃO.

c) A reta perpendicular ao eixo "x" que passa pelo vértice é chamada de EIXO DE SIMETRIA que é dada pela equação $x = -b/2a$.

Exemplo:

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

1) Concavidade

$a = 1 > 0 \rightarrow$ concavidade voltada para cima

2) Interseção com eixo "x" (RAÍZES)

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + 4}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

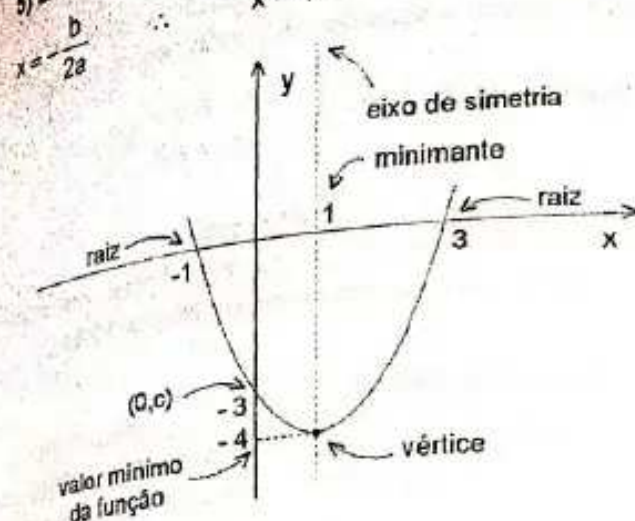
3) Interseção com eixo "y"

A parábola intersecta o eixo "y" no ponto (0, c), logo (0, -3)

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) Quando a > 0, a parábola tem a concavidade voltada para cima, assim, o vértice é o seu "ponto mais baixo", sendo chamado PONTO DE MÍNIMO. Sua abscissa (-b/2a) é

5) Eixo da simetria

$x = -\frac{b}{2a}$ ∴ $x = 1$

Variação do Sinal do Trinômio do 2º Grau

Considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c ∈ ℜ e $a \neq 0$, para valores de x entre as raízes, a função assume sinal contrário ao de a ao passo que para valores de x exteriores às raízes, o trinômio assume o mesmo sinal de **a**.

Exemplos:

a) Estude a variação do sinal da função

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

Cálculo das raízes

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\,.\,1\,.\,6}}{2\,.\,1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$x_1 = \frac{5+1}{2}$ ∴ $\boxed{x_1 = 3}$, $x_2 = \frac{5-1}{2}$ ∴ $\boxed{x_2 = 2}$

Resposta:

$f(x) > 0 \Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

$f(x) < 0 \Rightarrow 2 < x < 3$

b) Estude a variação do sinal da função $f(x) = -x^2 - 8x - 16$.

Cálculo das raízes

$-x^2 - 8x - 16 = 0$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\,.\,(-1)\,.\,(-16)}}{2\,.\,(-1)} = \frac{8 \pm 0}{-2}$$

Resposta:

$f(x) < 0 \Rightarrow x \neq -4$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = -4$

$f(x) > 0 \Rightarrow \nexists\ x \in \Re$

VI) Função modular

Antes de definir a função modular propriamente dita, gostaríamos de ressaltar alguns aspectos que serão úteis para o seu total entendimento.

O primeiro conceito de vital importância nesse estudo, é o conceito de módulo de um número real. O módulo de um número real é o seu valor absoluto. Assim, o módulo do número real + 2, representado por |+2|, é igual a +2. Temos também que |-3| = +3 e |0| = 0. Portanto, podemos criar uma regra para a determinação do módulo de um número "quando o número não é negativo ele é seu próprio módulo e quando o número é negativo, seu módulo é seu simétrico." De uma forma simbólica, dado um número real x, temos que:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x; & \text{se } x \geq 0 \\ -x; & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$

Assim, quando em um exercício houver uma expressão submetida a um módulo, para que possamos eliminá-lo, é necessário que estudemos a variação do sinal da expressão dada: para os valores da variável que a tornarem maior ou igual a zero, ela será seu próprio módulo, enquanto que para os valores de variável que a torne negativa, seu módulo será uma outra expressão cujos coeficientes serão ordenadamente simétricos em relação aos coeficientes da variação original.

Exemplos:

1) Seja resolver a equação $|x + 1| + 2x = 4$.

Solução:

Em primeiro lugar vamos estudar a variação de sinal da expressão x + 1. Para isto vamos determinar sua raiz:

$x + 1 = 0$

$x = -1$

Como estudado no item II do presente capítulo:

$x + 1 \geq 0$, se $x \geq -1$

$x + 1 < 0$, se $x < -1$

Então, temos duas hipóteses a considerar:

1ª hipótese: $x \geq -1 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$

$|x + 1| + 2x = 4$

$x + 1 + 2x = 4$

$3x = 3$

$x = 1$

Como x = 1 satisfaz à hipótese de que $x \geq -1$, então esta é primeira solução.

$x_1 = x_2 = -4$

raiz dupla

-4

x

2ª hipótese: $x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow |x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$

$|x + 1| + 2x = 4$

$-x - 1 + 2x = 4$

$x = 5$

Como x= 5 não satisfaz à hipótese de que $x < -1$, tal valor não serve como solução. Portanto:

$S = \{1\}$

2) Resolva a equação $|2x - 1| + |-x + 3| = 4$.

Solução:

Como temos dois módulos, é necessário que estudemos a variação do sinal de cada uma das expressões em separado.

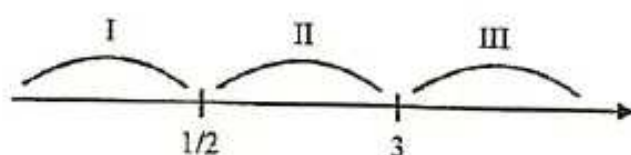
$2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$$x = 1/2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0, & \text{se } x \geq 1/2 \\ 2x - 1 < 0, & \text{se } x < 1/2 \end{cases}$$

$-x + 3 = 0$

$$x = 3 \Rightarrow \begin{cases} -x + 3 \geq 0, & \text{se } x \leq 3 \\ -x + 3 < 0, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Se marcarmos as raízes encontradas em uma reta real, poderemos observar que ela ficará dividida em três intervalos disjuntos:

Temos, portanto, os intervalos I: $x < 1/2$, II: $1/2 \leq x < 3$ e III: $x \geq 3$. Desta feita, teremos que avaliar três hipóteses:

1ª hipótese: $x < 1/2 \Rightarrow |2x - 1| = -(2x - 1)$ e $|-x + 3| = -x + 3$

$|2x - 1| + |-x + 3| = 4$

$-(2x - 1) + (-x + 3) = 4$

$-2x + 1 - x + 3 = 4$

$-3x = 0$

$x = 0$, valor que satisfaz à hipótese.

2ª hipótese: $1/2 \leq x < 3 \Rightarrow |2x - 1| = 2x - 1$ e $|-x + 3| = -x + 3$

$|2x - 1| + |-x + 3| = 4$

$2x - 1 + (-x + 3) = 4$

$2x - 1 - x + 3 = 4$

$x = 2$, valor que também satisfaz à hipótese.

3ª hipótese: $x \geq 3 \Rightarrow |2x - 1| = 2x - 1$ e $|-x + 3| = -(-x + 3)$

$|2x - 1| + |-x + 3| = 4$

$2x - 1 - (-x + 3) = 4$

$2x - 1 + x - 3 = 4$

$3x = 8$

$x = 8/3$, valor que não satisfaz à hipótese.

Então: $S = \{0, 2\}$

Agora que viajamos um pouco no tempo, estamos aptos a estudar a função modular.

A função modular é aquela que associa a cada número real o seu módulo.

$$f(x) = |x|$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

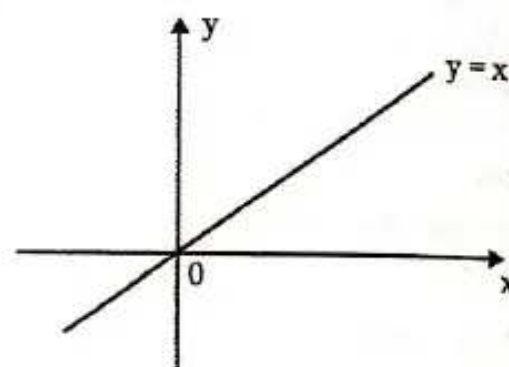
Um detalhe que pode estar intrigando o leitor é o fato de saber onde colocar o sinal de = na definição do módulo.

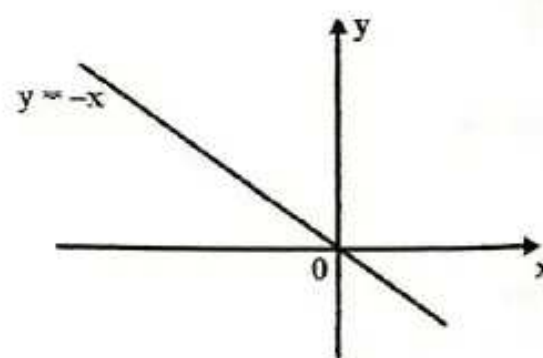
Por que não definir $|x| = \begin{cases} x; & \text{se } x > 0 \\ -x; & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$?

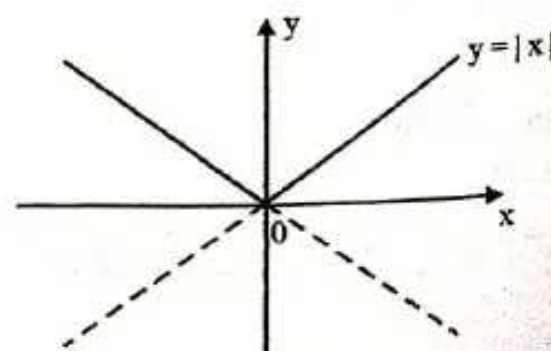
Tal representação também é correta!

A praxe nos leva a padronizar da outra forma que, portanto, não é a única maneira correta de expressar o módulo.

Gráfico da Função Modular

Como a função modular é bipartida, seu gráfico será constituído de duas partes. Para $x \geq 0$, utilizamos uma parte do gráfico da função $f(x) = x$, enquanto que para $x < 0$ utilizamos uma parte do gráfico da função $f(x) = -x$. Pelo exposto no item IV, o gráfico de função $y = f(x) = x$ é a reta bissetriz dos quadrantes ímpares:

Desde gráfico só aproveitamos a parte em que $x \geq 0$.

Já no caso de função $y = f(x) = -x$, o gráfico é a reta bissetriz dos quadrantes pares:

Neste caso só aproveitamos a parte em que $x < 0$.

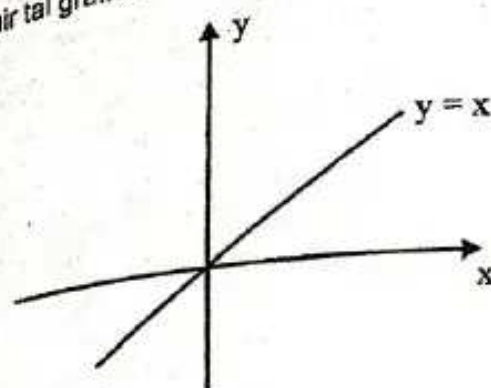
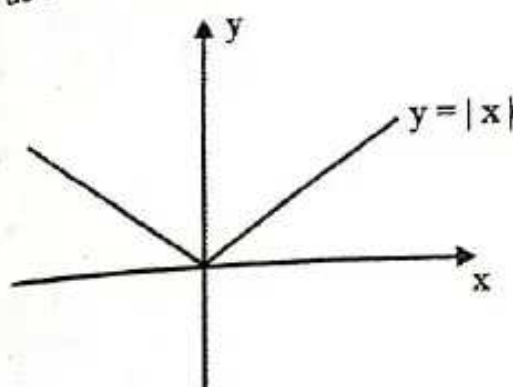
Juntando as duas parte terá o gráfico da função modular:

E como estudamos anteriormente, o módulo de uma expressão pode ser dividido em duas outras expressões, dependendo do seu sinal. Assim, também podemos escrever a função modular na forma.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x; \text{ se } x \geq 0 \\ -x; \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

O pontilhado não faz parte do gráfico, foi feito para mostrar ao leitor as partes dos gráficos originais que não foram aproveitadas.

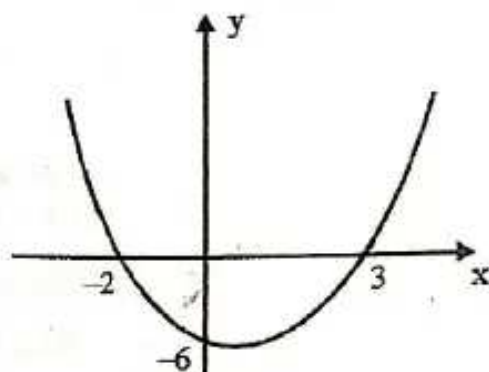
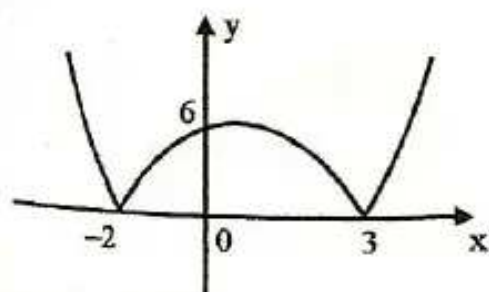
Uma sugestão do autor que pode tornar mais fácil a "vida" do leitor é "esquecer" o sinal de módulo da função. Então teremos:

$$y = x$$

Construir tal gráfico:

Como sabemos que o módulo não pode ser negativo, devemos fazer um rebatimento da parte negativa do gráfico em relação ao eixo das abscissas.

Eureka! Aí está o gráfico de função modular.

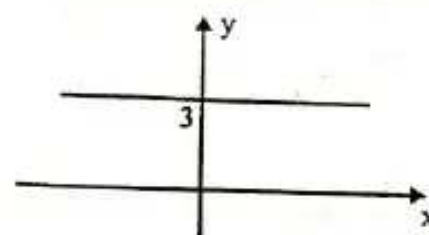
Vamos testar esse método para a função $y = |x^2 - x - 6|$.

Esqueçamos o módulo...

$$y = x^2 - x - 6$$

Rebatendo a parte negativa...

E aí está o nosso gráfico!

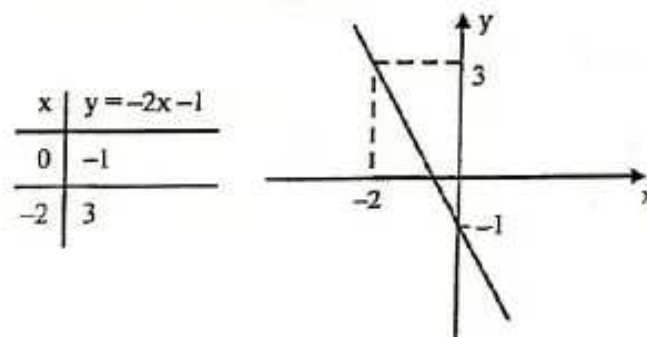
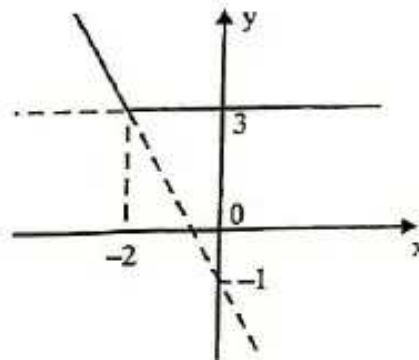
Que tal dificultarmos...

$$y = |x + 2| - x + 1$$
$$y = x + 2 - x + 1$$
$$y = 3$$

Que é uma função constante, cujo gráfico é uma reta horizontal, intersectando o eixo y no ponto de ordenada 3.

2ª hipótese: $x < -2$

$$y = |x + 2| - x + 1$$
$$y = -(x + 2) - x + 1$$
$$y = -x - 2 - x + 1$$
$$y = -2x - 1$$

Vamos construir seu gráfico:

x	y = –2x –1
0	–1
–2	3

Considerando convenientemente as partes dos gráficos anteriores, obteremos o gráfico da função em questão.

Reiterando que as partes pontilhadas não devem ser consideradas.

Inequação Modular

Dado um número real positivo k, a equação $|x| = k$ tem duas soluções como já estudado anteriormente: $x = k$ ou $x = -k$. Se marcarmos tais raízes na reta real,

... raízes dividem tal reta em um intervalo

...ultamos um pouquinho?

Vamos agora construir o gráfico de função $y = |x + 2| - x + 1$.

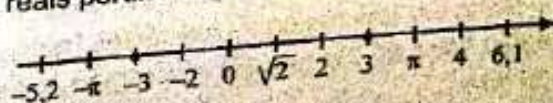
Agora aquela "técnica" de "esquecer" o módulo não funciona pois há variável fora do módulo. A saída é o estudo de variação do termo $x + 2$ e a posterior bipartição da função.

$x + 2 = 0$

$$x = -2 \mapsto \begin{cases} |x+2| = x+2; \text{ se } x \geq -2 \\ |x+2| = -(x+2); \text{ se } x < -2 \end{cases}$$

1ª hipótese: $x \geq -2$

observamos que essas raízes ... entre elas e dois outros exteriores e elas. É fácil observar que o módulo de qualquer número localizado entre as raízes é menor que k, e que o módulo de qualquer número exterior às raízes, na reta, é maior do que k. Vejamos um exemplo numérico. Consideremos a equação $|x| = 3$. Obviamente que sus raízes são -3 e 3. Marcando-se na reta real, e representando outros números reais pertinentes a ela a título de exemplo...

$-5{,}2 \quad -\pi \quad -3 \quad -2 \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 3 \quad \pi \quad 4 \quad 6{,}1$

Podemos constatar que os módulos de quaisquer números entre -3 e 3 é menor que 3, ao passo que números maiores que 3 ou menores que -3 têm módulos maiores que 3.

Sintetizando o que foi analisado, dado um número real positivo k, temos que:

$$|x| = k \Rightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$
$$|x| < k \Rightarrow -k < x < k$$
$$|x| > k \Rightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$

Exemplos:

a) Resolva a inequação $|3x - 1| < 4$.

Solução:

Lembrando que $|x| < k \Rightarrow -k < x < k$, utilizaremos um raciocínio semelhante.

$|3x - 1| < 4 \Rightarrow -4 < 3x - 1 < 4$

$-3 < 3x < 5$

$-1 < x < 5/3$

b) Resolva a inequação $|2x + 2| \geq 5$.

Solução:

Como $|x| > k \Rightarrow x < -k$ ou $x > k$, teremos então:

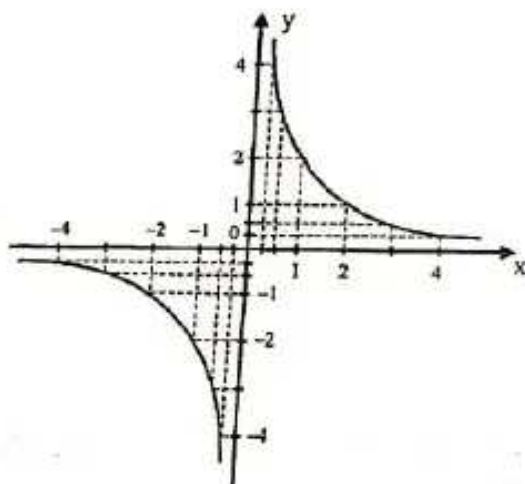
$|2x + 3| \geq 5 \Rightarrow 2x + 3 \leq -5$ ou $2x + 3 \geq 5$

$2x \leq -8$ ou $2x \geq 2$

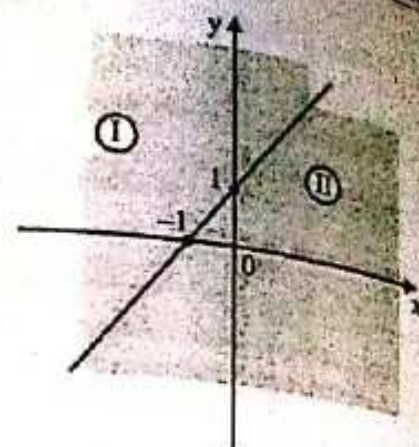
$x \leq -4$ ou $x \geq 1$

VII) Função recíproca

Definimos a função recíproca como sendo uma função real de variável real não nula tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$. O seu gráfico pode ser construído utilizando-se uma tabela de valores.

x	y = 1/x
4	1/4
2	1/2
1	1
1/2	2
1/4	4
-4	-1/4
-2	-1/2
-1	-1
-1/2	-2
-1/4	-4

O seu gráfico é uma hipérbole. E embora o estudo de hipérbole será melhor abordado no Apêndice II (cônicas), podemos citar uma de suas características que é o fato dele nunca tocar os eixos coordenados embora muito se aproxime deles. Uma curva que tem essa propriedade é chamada de curva assíntota aos eixos.

Inequações a Duas Variáveis

Vamos considerar, a título de exemplo, a função $y = x + 1$. Tal igualdade é satisfeita para infinitos valor de x e

Os pontos pertinentes à reta, como já observado, satisfazem à equação $y = x + 1$, enquanto que as duas outras regiões satisfarão uma à inequação $y > x + 1$ e outra à inequação $y < x + 1$. A maneira de descobrirmos qual das inequações representa cada uma das outras duas regiões é empírica, experimental. Para isso, devemos escolher um ponto qualquer que pertença a uma das duas regiões e substituir em uma das inequações. Se ela for satisfeita por esse par de valores então a região cujo ponto escolhemos é a representação geométrica da inequação utilizada. Em caso contrário, se as coordenadas não satisfizerem à inequação é porque a região em questão é a representação geométrica da outra inequação.

No caso do nosso exemplo, vamos escolher um ponto qualquer do plano.

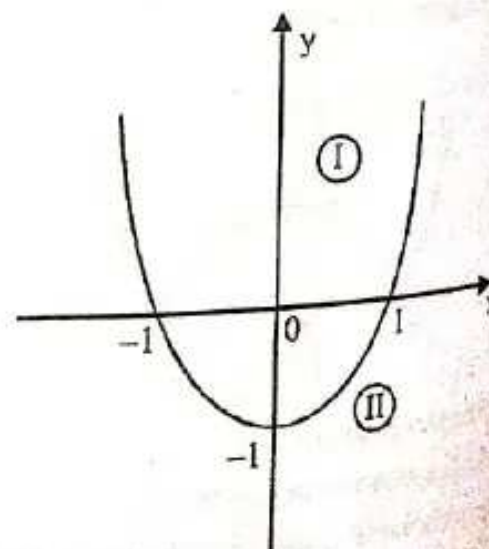
Consideremos a origem, o ponto (0, 0) que podemos observar pertence à região II. As inequações dessas regiões são $y < x + 1$ e $y > x + 1$. Vamos escolher uma delas.

$y < x + 1$

Substituindo-se $\quad x = 0$ e $y = 0$:

$0 < 0 + 1$

Que é uma desigualdade verdadeira. Portanto a inequação $y < x + 1$ tem como solução o conjunto de pontos da região II, enquanto que os pontos pertinentes à região I são a solução da inequação $y > x + 1$.

Vamos agora utilizar a função $y = x^2 - 1$. Seu gráfico é uma parábola, como já aprendemos a construir.

y. São exemplos de soluções dessa equação: (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3), ... Como não poderíamos enumerar todos eles, utilizamos a representação gráfica. Neste caso o gráfico é uma reta, constituída pela infinidade de pontos associados aos pares anteriormente citados.

Ao construirmos o gráfico dessa função, observamos que ele divide o plano em três regiões: uma região "acima" da reta (I), uma região "abaixo" da reta (II) e a região representada pela própria reta.

Assim como no exemplo anterior, o plano fic[ou] em três regiões: uma representa $y = x^2 - 1$, outra representa a inequação $y > x^2 - 1$ e a terceira representa a inequação $y < x^2 - 1$. Sabemos que o conjunto de pontos pertinentes à parábola é a solução da equação $y = x^2 - 1$. Para associar corretamente cada inequação à região correspondente, vamos utilizar um raciocínio análogo ao do primeiro exemplo. Escolhamos uma das inequações:

$$y < x^2 - 1$$

Vamos escolher para o "teste" o ponto (0, 1) que constatamos pertencer à região I.

Substituindo-se $x = 0$ e $y = 1$:

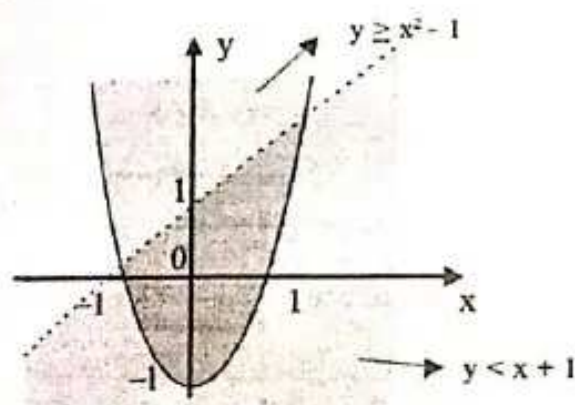
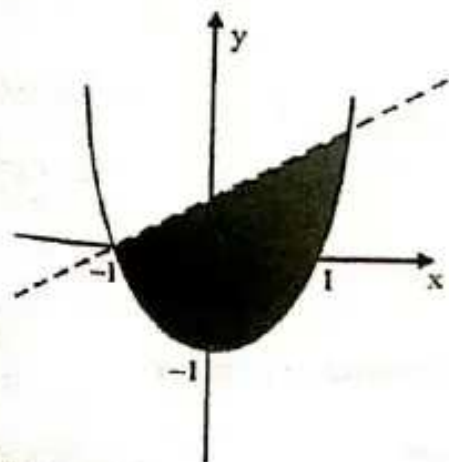
$$1 < 0^2 - 1$$

Que é uma desigualdade falsa. Então, a região I é a solução de outra inequação, ou seja, da inequação $y > x^2 - I$, e portanto a solução de inequação $y < x^2 - 1$ é o conjunto de pontos da região II.

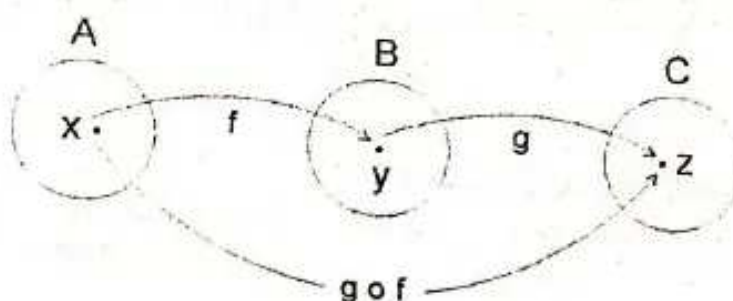
Agora que já sabemos resolver inequações a duas variáveis, estamos aptos a resolver sistemas de inequações a duas variáveis.

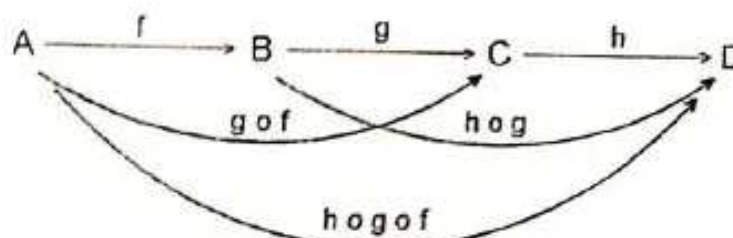
Seja resolver o sistema $\begin{cases} y < x+1 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases}$

Em primeiro lugar devemos resolver cada inequação em um mesmo sistema de eixos. A solução do sistema será a interseção das regiões que satisfizeram às inequações dadas.

Para isto vamos aproveitar o estudo feito nos exemplos anteriores. Cabe observar que na primeira inequação $y < x + 1$ não está sendo considerada a hipótese da igualdade, logo a reta $y = x + 1$ deve ser pontilhada, pois ela não fará parte da solução. Já na segunda inequação $y \geq x^2 - 1$, como a igualdade foi considerada, a parábola $y = x^2 - 1$ será construída com linha contínua.

Então a solução do sistema é o conjunto de pontos da região hachurada na figura abaixo.

No diagrama:

Observe que:

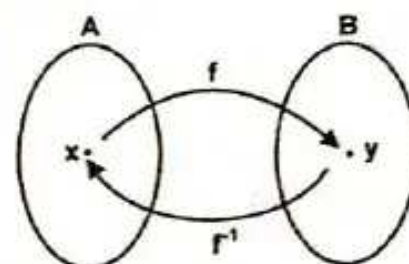
Dom (g o f) = Dom (f) = A Im (g o f) = Im (g) = C

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

a) leitura da função composta é sempre feita em sentido inverso ao das "setas" da função.

b) A composta da função g com a função f pode ser representada por g o f(x) ou g(f(x)).

c) A composição de funções não é comutativa, ou seja, em geral $f \circ g \neq g \circ f$.

Função Inversa

Seja f uma função bijetora de A em B, a função inversa de f, notada por f^{-1}, é definida de B em A como:

$$(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in f$$

Exemplo:

Dada a função $f = \{(2, 2), (3, -1), (4, 0)\}$ sua inversa será $f^{-1} = \{(2, 2), (-1, 3), (0, 4)\}$.

Obtenção da expressão que define a função inversa

Dada uma função f(x), a sua inversa pode ser obtida de uma forma prática, como mostraremos nos exemplos a seguir.

Exemplo:

...ção Composta

Seja f uma função de A em B e g uma função de B em C. A composta de g com a f, notada por g o f, é definida de A em C como:

$(x, z) \in g \circ f \rightarrow \exists y \in Dom(g) \mid (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g$

Obter a função inversa de f(x) = 2x - 3

1° passo: escrever a função em termos de "y": y = 2x - 3

2° passo: troque "x" por "y" e vice-versa: x = 2y - 3

3° passo: explicite "y" em função de "x": -2y = -x -3

2y = x + 3

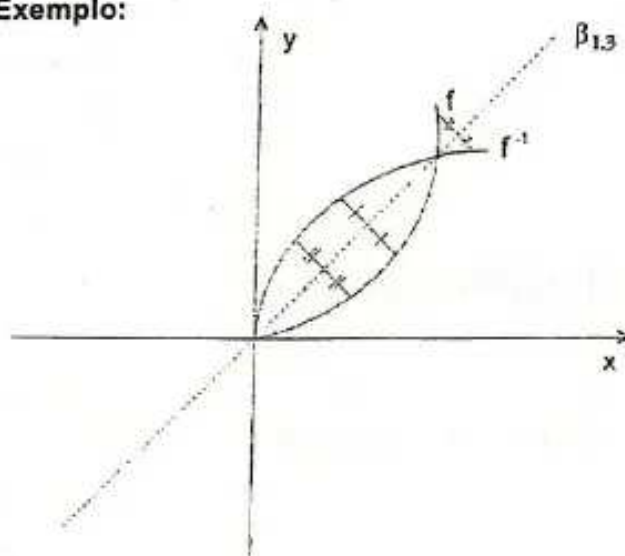
$y = \frac{\;+\;}{2}$

Esta é a expressão que define a inversa, logo

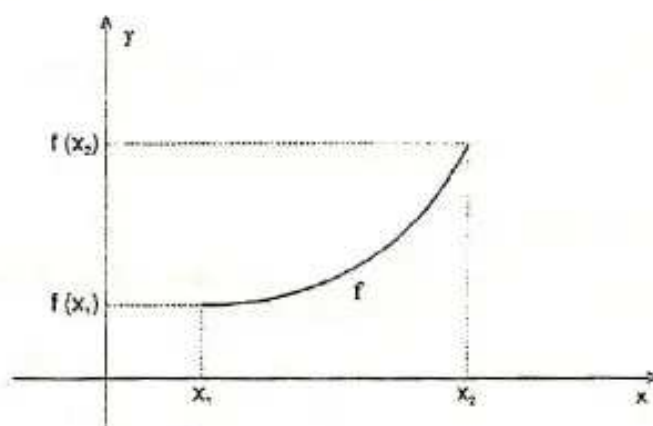
$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

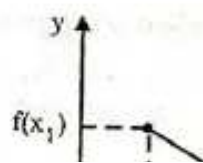
Gráfico da função inversa

Os gráficos de uma função f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo:

Funções Crescentes e Decrescentes

Uma função é dita **crescente** em um intervalo se, e somente se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2, pertinentes a esse intervalo, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo:

Note que: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Uma função é dita **decrescente** em um intervalo se, e somente se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2, pertinentes a esse intervalo, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$. Abaixo vemos o gráfico de uma função decrescente.

Função par

"Uma função real f é dita par por quando, para qualquer valor real de x de seu domínio, tem-se que f(-x) = f(x)."

Exemplo:

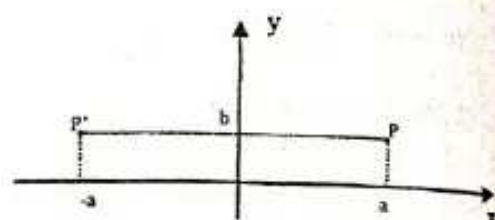
Consideremos a função $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 2$.

Para verificarmos se ela é par, devemos encontrar a expressão que nos dá f(-x). Então:

$f(-x) = 4 \cdot (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^2 + 2$

$f(-x) = 4x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$

Portanto, como f(-x) = f(x), concluímos que a função é par.

NOTA: Dada uma função par real f, tal que f(a) = b, temos que o par (a, b) pertence ao gráfico. Pelo fato dela ser par f(-a) = f(a) = b, então o par (-a, b) também pertence ao gráfico da função f. Marcando esses pontos no plano cartesiano.

Podemos observar que os pontos P e P' são simétricos em relação ao eixo y. E isso valerá para todos os pontos pertencentes ao gráfico de f, ou seja, se (x, y) é ponto do gráfico de f, então o ponto (-x, y) também será, o que nos leva a concluir que **o gráfico de toda função par é simétrico em relação ao eixo y**.

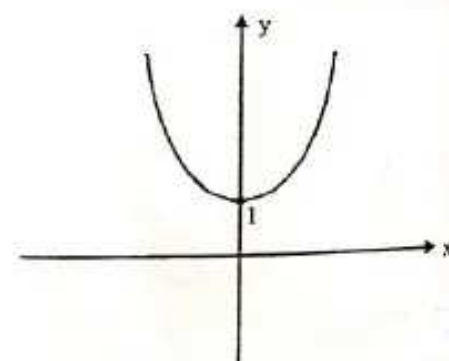
Exemplo:

Vamos considerar a função $f(x) = x^2 + 1$.

Temos que

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$

Logo f é par.

Seu gráfico é fácil de ser construído

E podemos constatar a simetria em relação ao eixo y.

Função ímpar

"Uma função real f é ímpar quando, para qualquer valor

Verifique que: $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

"Uma função real f é ímpar quando, pa... real de x de seu domínio, tem-se $f(-x) = -f(x)$."

Exemplo:

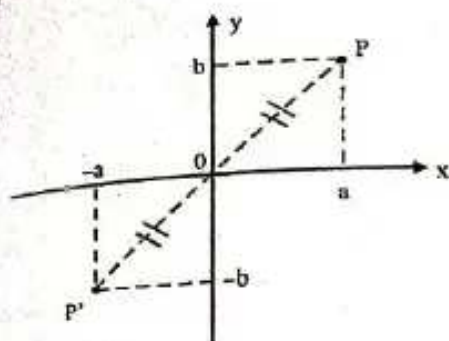
Dada a função $f(x) = 2x^3 - 5x$, para descobrirmos se ela é ímpar devemos determinar $f(-x)$. Logo:

$f(-x) = 2 \cdot (-x)^3 - 5 \cdot (-x)$

$f(-x) = -2x^3 + 5x$

$f(-x) = -(2x^3 - 5x) = -f(x)$

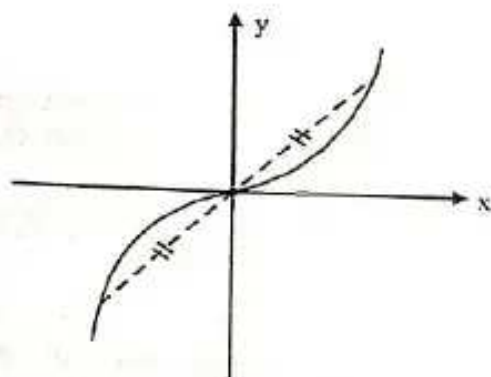
Então, como $f(-x) = -f(x)$ verificamos que a função f é ímpar.

NOTA: Consideremos uma função ímpar real f, de tal modo que $f(a) = b$. Daí, concluímos que o par (a, b) pertence ao seu gráfico. Como, por hipótese, é ímpar, temos que $f(-a) = -f(a) = -b$ e portanto o ponto (–a, –b) também pertence ao seu gráfico. Se marcarmos tais pontos no plano cartesiano

Constatamos que eles são simétricos em relação à origem. Assim sendo, se um ponto (x, y) pertence ao gráfico de uma função ímpar f, o seu simétrico em relação à origem (–x, –y) também pertencerá ao aludido gráfico. Daí, concluímos que o gráfico de **toda função ímpar é simétrico em relação à origem.**

Exemplo:

O caso mais clássico de função ímpar é a função $f(x) = x^3$.

Podemos observar que:

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, o que confirma o fato dela ser ímpar. Seu gráfico, chamado de parábola cúbica, é representado a seguir.

Notem a simetria em relação à origem, ponto a ponto.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

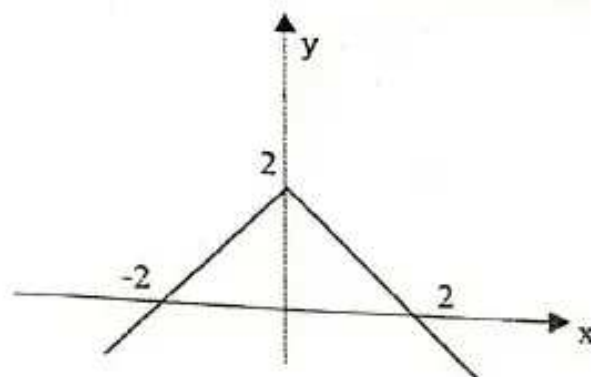
a) Se uma função não é par não implica que ela seja ímpar, e vice-versa. Assim sendo, há funções que não são pares e nem ímpares.

b) Dada uma função real $y = f(x)$ e seu respectivo gráfico, a partir dele, podemos construir os gráficos de algumas outras funções a ela associada.

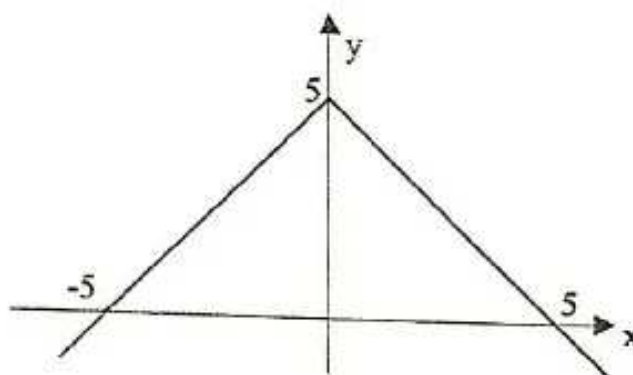
Observe o quadro abaixo:

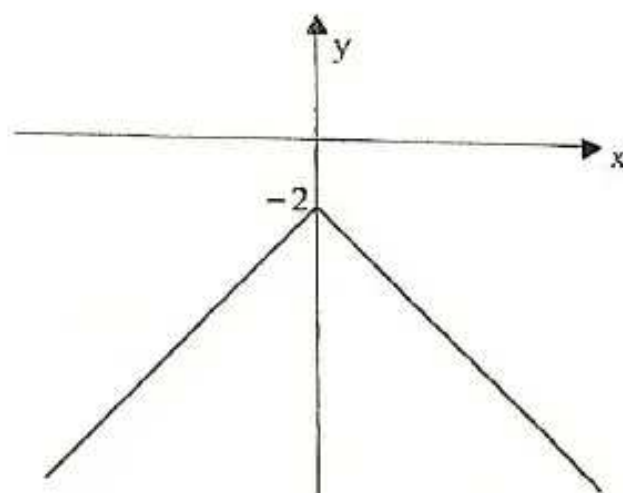
FUNÇÃO	GRÁFICOS
$y = f(x) + ...$	

Exemplo:

Consideremos o gráfico da função $y = f(x)$ dado abaixo:

Utilizando-o como base, vamos construir os gráficos a seguir:

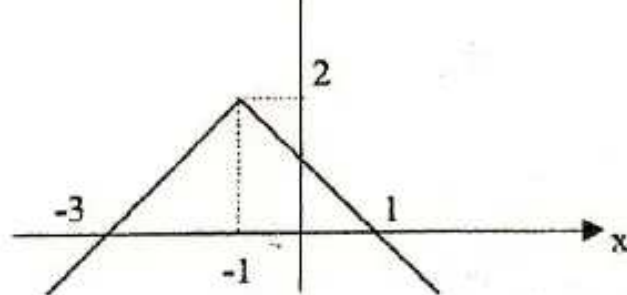
(a) $y = f(x) + 3$

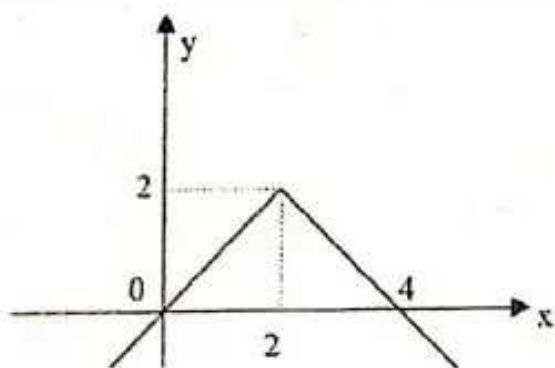
Comentário: O gráfico de f(x) será translado 3 unidades para cima.

(b) $y = f(x) - 4$

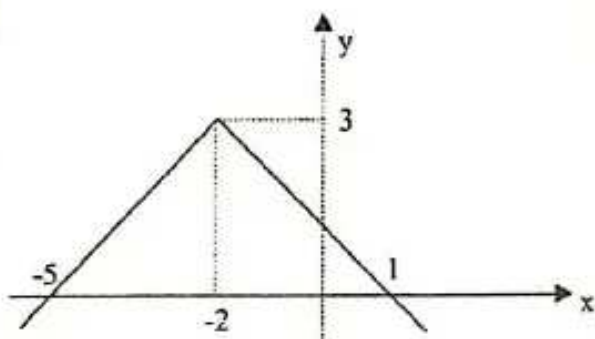
Comentário: O gráfico de f(x) será translado 4 unidades para baixo.

(c) $y = f(x + 1)$

Comentário: O gráfico de f(x) será translado 1 unidade para a esquerda

y

$y = f(x) + k$	Todos os pontos de y= f(x) "sobem" k unidades
$y = f(x) - k$	Todos os pontos de y= f(x) "descem" k unidades
$y = f(x + k)$	Todos os pontos de y= f(x) se "deslocam" de k unidades para esquerda
$y = f(x - k)$	Todos os pontos de y= f(x) se "deslocam" de k unidades para a direita

(d) y = f(x - 2)

Comentário: O gráfico de f(x) será translado 2 unidades para a direita

(e) y = f(x + 2) + 1

Comentário: O gráfico de f(x) será translado 1 unidade para cima e simultaneamente 2 unidades para a esquerda (nesta ordem)

Exercícios

1) Dados os conjuntos A = {1, 2, 4, 5, 7} e B = {-3, -2, -1, 0, 3, 7, 11}, considere a relação R = {(x, y) ∈ A x B | y = 2x – 3}. Determine

   a) os pares de R.
   b) o domínio de R.
   c) o conjunto imagem de R.

2) Sendo A = {0, 2, 5, 7, 12, 14} e B = {0, 1, 2, 3, 4}, determine os pares, o domínio e o conjunto imagem da relação R = {(x, y) ∈ B x A | y < x}.

3) Nos diagramas abaixo, identifique as funções de A em B e verifique, caso existam, as suas qualidades.

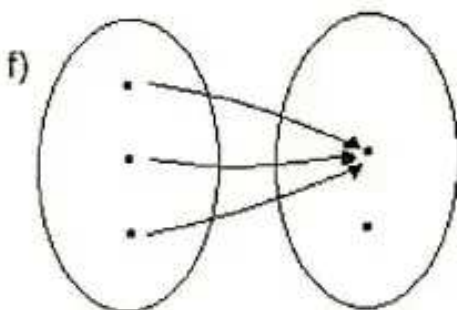
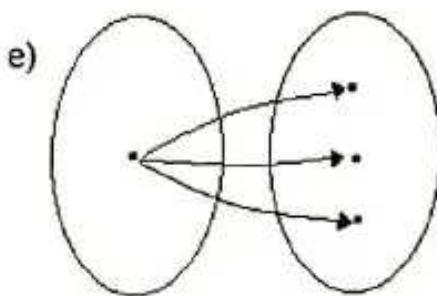
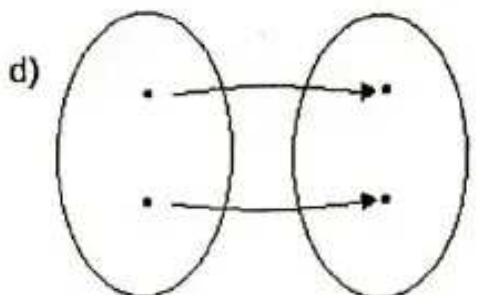
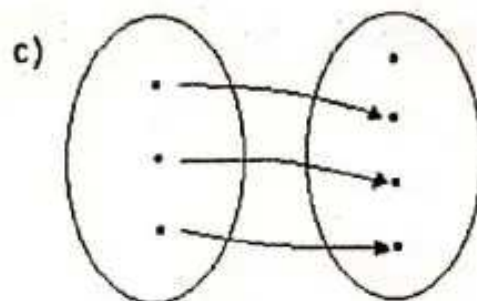
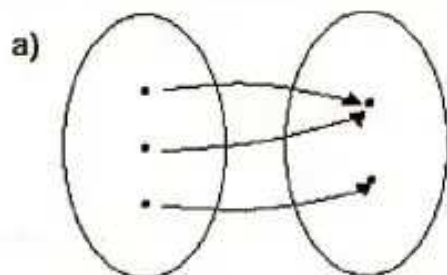
a)

b)

c)

d)

e)

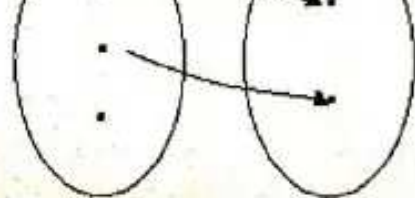
f)

4) (**FGV**) Para a função f : N* → N*, que a cada número natural não-nulo associa o seu número de divisores, considere as afirmativas:

   I) Existe um número natural não-nulo n, tal que f(n) = n.
   II) f é crescente.
   III) f não é injetora.

   Assinale a opção que contém (têm) a(s) afirmativa(s) correta(s):

   a) apenas II
   b) apenas I e II
   c) I, II e III
   d) apenas I
   e) apenas I e III

5) Em certo dia três mães deram a luz em uma mesma maternidade. A primeira teve gêmeos, a segunda, trigêmeos e a terceira um único filho. Considere, para aquele dia, o conjunto das três mães, o conjunto das seis crianças e as seguintes relações:

   I) A que associa cada mãe ao seu filho.
   II) A que associa cada filho à sua mãe.
   III) A que associa cada criança ao seu irmão.

III) A que associa cada criança ao seu irmão.

São funções

a) somente a I.
b) somente a II.
c) somente a III.
d) todas.
e) nenhuma.

6) Dadas as funções $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$, determine o valor de:

a) $f(3)$
b) $f(0)$
c) $f(-1)$
d) $f(1/3)$
e) $g(2)$
f) $g(0)$
g) $g(-\sqrt{7})$
h) $g(-3/2)$
i) $f(-2).g(4)$

7) Sabendo que $f(2x - 3) = x^2 - 1$, determine o valor de $f(5) - f(-1)$.

8) Dada a função $f(3x + 1) = 4x - 2$, determine:

a) $f(x)$
b) $f(-8)$

9) (UERJ) Considere a função $f\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\right) = 2x^2 - 18$.

a) Determine suas raízes.

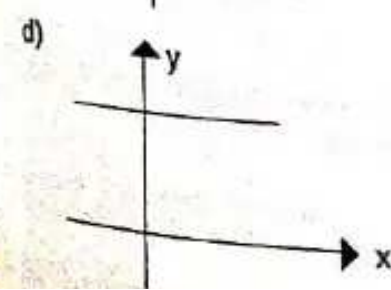
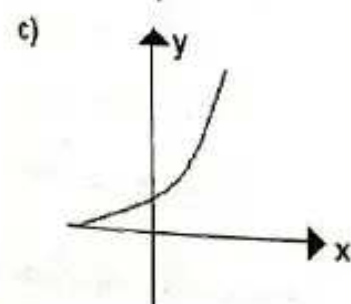
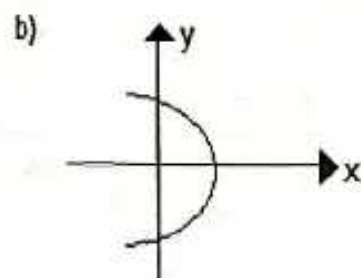
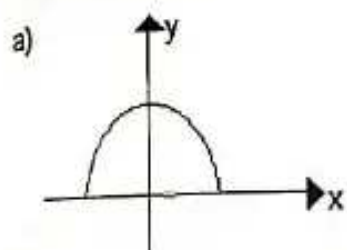
b) Calcule $\frac{f(1)+f(-1)}{2}$.

10) Assinale quais dos gráficos abaixo podem representar funções. Identifique quais são as injetoras.

a)

b)

c)

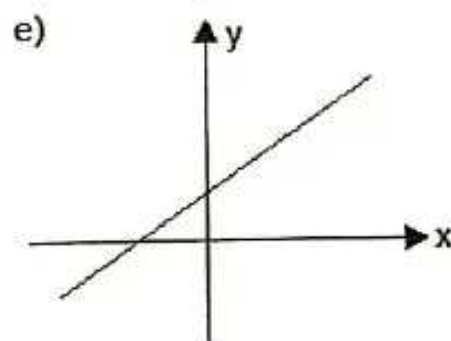
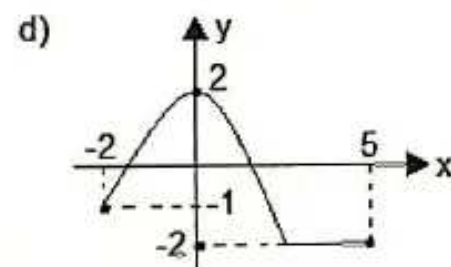
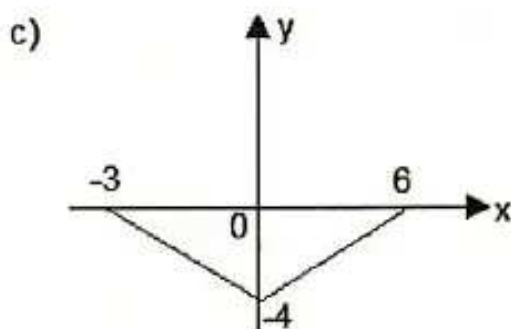
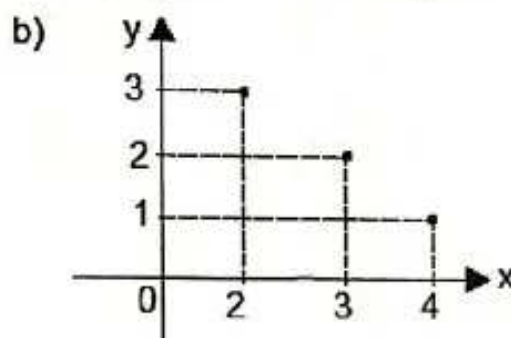
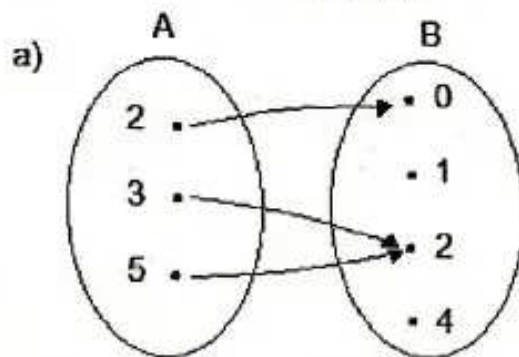
d)

11) Determine o domínio e o conjunto imagem das funções reais representadas a seguir.

a)

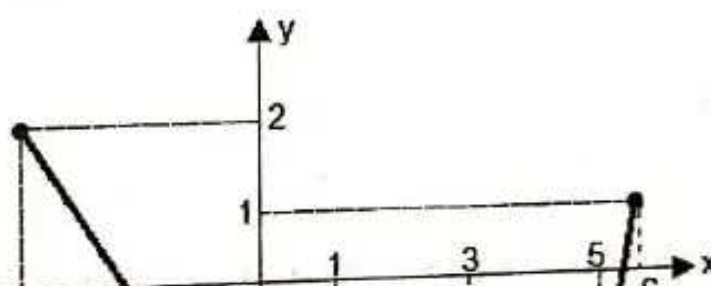
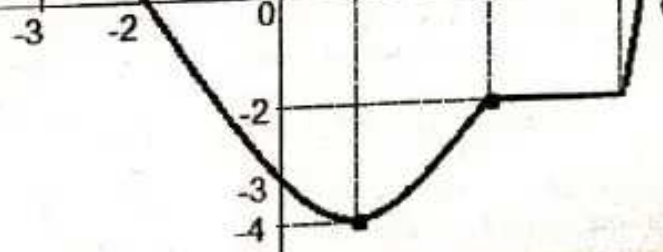
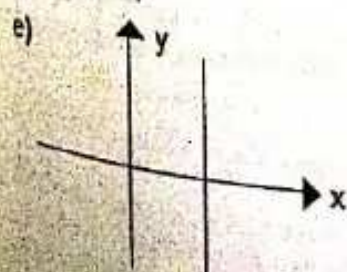
b)

c)

d)

e)

12) Considere o gráfico da função f, mostrado abaixo.

e) y x

-3 -2 0 6
-2
-3
-4

Complete corretamente as lacunas a seguir.

a) f(1) = ...
b) f(3) = ...
c) f(...) = 1
d) f(-2) = ...
e) f(...) = 2
f) f(3,7) = ...
g) f(...) = -3

13) **(ENEM)** Ao alugar um carro, o locatário precisa pagar R$ 60,00 por dia, e mais R$ 1,50 por quilômetro rodado.

Para facilitar, as locadoras podem fazer uma relação entre o valor a ser pago P, em reais, em função dos quilômetros rodados, representado por x.

Qual das expressões abaixo representa o valor pago pelos locatários em função dos quilômetros rodados?

a) P = 61,50 + 1,50x
b) P = 60x + 1,50
c) P = 60 + 1,50x
d) P = 61,50x
e) P = 1,50x

14) **(ENEM)** O número de pessoas que morrem nas ruas e estradas brasileiras nunca foi tão alto. As últimas mudanças na legislação mostraram-se incapazes de frear o aumento dos acidentes. O número de mortes em 2004 foi de 35 100 pessoas e 38 300, em 2008. Admita que o número de mortes, no período de 2004 a 2008, tenha apresentado um crescimento anual constante.

A expressão algébrica que fornece o número de mortes N, no ano x (com $2004 \leq x \leq 2008$), é dada por

a) N = 800x + 35 100
b) N = 800(x – 2004) + 35 100
c) N = 800(x – 2004)
d) N = 3 200(x – 2004) + 35 100
e) N = 3 200x + 35 100

15) **(ENEM)** Em uma cidade, os impostos que incidem sobre o consumo de energia elétrica residencial são de 30% sobre o custo do consumo mensal. O valor total da conta a ser paga no mês é o valor cobrado pelo consumo acrescido dos impostos.

Considerando x o valor total da conta mensal de uma determinada residência e y o valor dos impostos, qual é a expressão algébrica que relaciona x e y?

a) $y = \frac{0,3x}{1,3}$
b) $y = 0,3x$
c) $y = \frac{x}{1,3}$
d) $y = \frac{1,3x}{0,3}$
e) $y = 0,7x$

16) **(ENEM)** Diante de um sanduíche e de uma porção de

Considerando que x e y representam, respectivamente, em gramas, as quantidades do sanduíche e das batatas que o garoto pode ingerir, assinale a alternativa correspondente à expressão algébrica que relaciona corretamente essas quantidades.

a) 2x + 2,8y = 462
b) 2,8x + 2y = 462
c) 1,8x + 2,3y = 1.060
d) $\frac{1}{2}x + 0,4y = 462$
e) $0,4x + \frac{1}{2}y = 462$

17) **(ENEM)** O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

a) y = 4.300x.
b) y = 884.905x.
c) y = 872.005 + 4.300x.
d) y = 876.305 + 4.300x.
e) y = 880.605 + 4.300x.

18) **(ENEM)** Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a 2/3 do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos. Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) 5X – 3Y + 15 = 0
b) 5X – 2Y + 10 = 0
c) 3X – 3Y + 15 = 0
d) 3X – 2Y + 15 = 0
e) 3X – 2Y + 10 = 0

19) Sabendo que f é uma função constante e que f(4) = 4, determine o valor de f(7).

20) Sabendo que f é a função identidade, determine o valor de f(-2) – f(3).

21) Considere uma função afim f tal que f(2) = 1 e f(3) = 3. Determine o valor de f(-4).

22) Na função linear f, a imagem do número 2 é igual a 6. Determine a imagem, pela função f, do número 5.

batatas fritas, um garoto, muito interessado na quantidade de calorias que pode ingerir em cada refeição, analisa os dados de que dispõe. Ele sabe que a porção de batatas tem 200g, o que equivale a 560 calorias, e que o sanduíche tem 250 g e 500 calorias. Como ele deseja comer um pouco do sanduíche e um pouco das batatas, ele se vê diante da questão: "Quantos gramas de sanduíche e quantos gramas de batata eu posso comer para ingerir apenas as 462 calorias permitidas para esta refeição?"

23) **(PUC)** Considere a função real da forma $f(x) = ax$ ...
Sabendo que $f(1) = -1$ e $f(0) = 2$, qual é o valor do produto $a \cdot b$?

a) 1
b) 6
c) −3
d) −4
e) −6

24) **(PUC)** Sejam f e g funções reais dadas por $f(x) = 2 + x^2$ e $g(x) = 2 + x$. Os valores de x tais que $f(x) = g(x)$ são:

a) $x = 0$ ou $x = -1$
b) $x = 0$ ou $x = 2$
c) $x = 0$ ou $x = 1$
d) $x = 2$ ou $x = -1$
e) $x = 0$ ou $x = ½$

25) **(ENEM)** Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q também é uma função, simbolizada por FT. O lucro total (LT) obtido pela venda da quantidade q de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$.
Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

a) 0
b) 1
c) 3
d) 4
e) 5

26) **(ENEM)** O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município.
Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas.
A primeira cobrou R$ 100.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350.000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150.000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.
Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$
b) $100n + 150 = 120n + 350$
c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
d) $100(n + 350.000) = 120(n + 150.000)$
e) $350(n + 100.000) = 150(n + 120.000)$

27) Uma função real f é definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{se } x \text{ é par} \\ -x^2, \text{se } x \text{ é impar} \end{cases}$.
Determine o valor de $f(4) - f(3)$.

28) A função f, real de variável real, é definida por
$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{se } x \in (3, +\infty) \\ -x^2 + 1, \text{se } x \in (1, 3] \\ 6, \text{se } x \in (-\infty, 1] \end{cases}$. Determine o valor da expressão
$f(-8) + 2f(1) - f(2) + 5f(3) - 4f(5)$.

29) ...

Letra	A	B	C	D	E	...	W	X	Y	Z
Número n	1	2	3	4	5	...	23	24	25	26

Para utilizar o sistema, cada número n, correspondente a uma determinada letra, é transformado em um número f(n), de acordo com a seguinte função:

$$f(n) = \begin{cases} 2n + 3, \text{ se } 1 \le n \le 10 \\ 50 - n, \text{ se } 11 \le n \le 26 \end{cases} \quad \text{na qual } n \in \mathbb{N}$$

As letras do nome ANA, por exemplo, estão associadas aos números [1 14 1]. Ao se utilizar o sistema, obtém-se a nova matriz [f(1) f(14) f(1)], gerando a matriz código [5 36 5]. Considere a destinatária de uma mensagem cujo nome corresponde à seguinte matriz código: [7 13 5 30 32 21 24]. Identifique esse nome.

31) Considere a função real f em que $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$. Sabendo-se que $f(40) = 16$, determine o valor de $f(5)$.

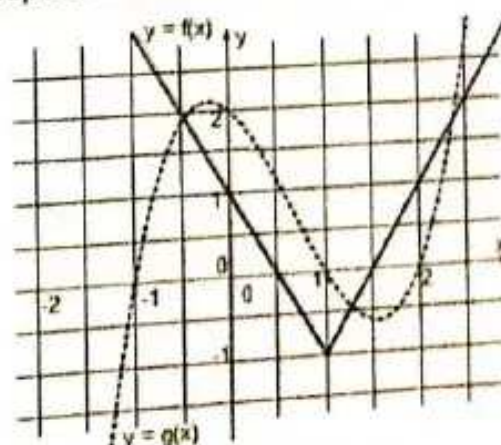
32) Dadas as funções $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x^2 + 1$, determine:

a) $f(g(2))$
b) $g(f(-1))$
c) $fof(2)$
d) $f(g(x))$
e) $gof(x)$
f) $f(f(x))$
g) $gog(x)$

33) Considere as funções reais $f(x) = 2x - k$ e $g(x) = 3x + 4$, tais que $f(g(x)) = g(f(x))$. Determine o valor do número real k.

34) **(PUC)** Seja $f(x) = \frac{x + 1}{-x + 1}$.

a) Calcule $f(2)$.
b) Para quais valores reais de x temos $f(f(x)) = x$?
c) Para quais valores reais de x temos $f(f(f(f(x)))) = 2011$?

35) **(UNICAMP)** Considere as funções f e g, cujos gráficos estão representados na figura abaixo.

O valor de $f(g(1)) - g(f(1))$ é igual a:

a) 0.
b) 1.

(PUC) Dada a função f: R: → R definida por

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & se\ x \le 1 \\ 2x - 5, & se\ x > 1 \end{cases}$.

Determine os zeros da função.

30) (UERJ) Para enviar mensagens sigilosas substituindo letras por números, foi utilizado um sistema no qual cada letra do alfabeto está associada a um único número n, formando a sequência de 26 números ilustrada na tabela:

c) -1.
d) 2.

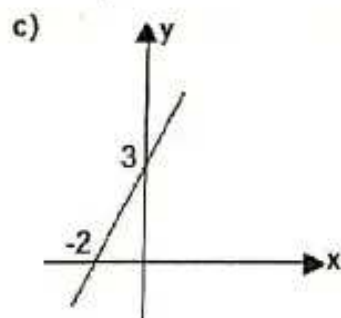
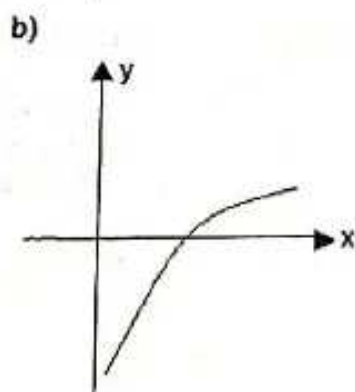
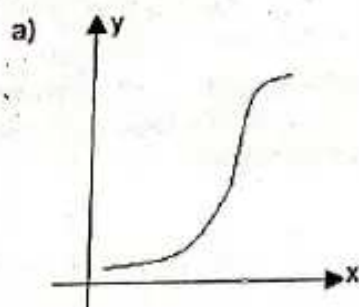
36) Determine as inversas das funções a seguir.

a) $y = 4x + 3$
b) $y = \frac{x-4}{2x-3}$
c) $y = \frac{2x+1}{x-2}$
d) $y = x^3 - 2$

37) Esboce os gráficos das inversas das funções representadas a seguir.

a)

b)

c)

38) (PUC) Seja $\begin{cases} f: R \to R \\ x \to y = -\frac{1}{2}x + b \end{cases}$, onde b ∊ R. Sabendo que $f \circ f(4) = 2$, a lei que define f^{-1} é:

a) $y = -\frac{1}{2}x + 2$
b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $y = 4 - 2x$
d) $y = 6 - 2x$
e) $y = 8 - 2x$

39) Verifique se são pares ou ímpares as funções:

a) $f(x) = 3x^2 + 1$
b) $f(x) = 2x^5 - 3x^3$
c) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$
d) $f(x) = |x|$
e) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, se\ x \ge 0 \\ 2x^2 - 3, se\ x < 0 \end{cases}$
f) $f(x) = \frac{1}{x}$
g) $f(x) = \begin{cases} x^2, se x \ge 0 \\ -x^2, se x < 0 \end{cases}$

41) (FGV) O gráfico da função real $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com vértice no ponto V(-1, 3). Sabe-se ainda que a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais de sinais contrários. Sobre os valores de a, b e c, tem-se:

a) $a<0$, $b>0$ e $c>0$
b) $a<0$, $b<0$ e $c>0$
c) $a<0$, $b<0$ e $c<0$
d) $a>0$, $b>0$ e $c<0$
e) $a>0$, $b>0$ e $c>0$

42) Resolva, em R, as inequações a seguir.

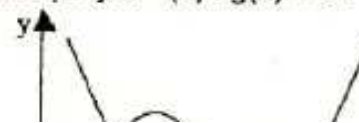
a) $x^2 - 7x + 12 \ge 0$
b) $x^2 - 6x + 9 > 0$
c) $-x^2 + 2x + 3 \le 0$
d) $2x^2 + 3x + 4 < 0$
e) $(x-2).(x+3).(4-x) \ge 0$
f) $x.(x-1).(3-x).(x+1) < 0$
g) $(x^2-4).(x^2-3x+2).(x^2+x+1) > 0$
h) $\frac{x+1}{1-x} \le 0$
i) $\frac{x^2+2x}{3-x} \ge 0$
j) $\frac{(2-x)\cdot(x+3)}{x^2-9} < 0$
k) $(x-4)^4 > 0$
l) $(6-x)^{13} \le 0$
m) $(2x-7)^{12} \le 0$
n) $(3x+5)^{37} > 0$
o) $\frac{(x+1)^5 \cdot (4-x)^6}{(3-x)^2} \ge 0$
p) $\frac{(x-2)^{15} \cdot (3-x)}{(x+3)^2} \le 0$

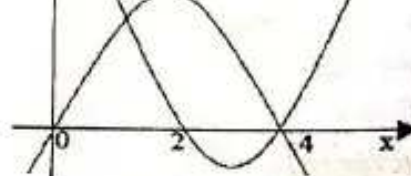
43) (PUC) Sejam as funções $f(x) = x^2 - 6x$ e $g(x) = 2x - 12$. O produto dos valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade $f(x) < g(x)$ é:

a) 8
b) 12
c) 60
d) 72
e) 720

44) (PUC) Considere as funções reais: $g(x) = x^2 + 1$ e $f(x) = ax + b$.

a) Sabendo que $f(1) = -1$ e $f(0) = 2$, encontre a e b.
b) Para quais valores de x temos $f(x) . g(x) = 0$?
c) Para quais valores de x temos $f(x) = g(x)$?

45) (FGV) No sistema cartesiano abaixo, estão representados os gráficos das funções de R em R, dadas por $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2 - 6x + 8$. Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) . g(x) \ge 0$?

40) Esboce os gráficos de:

a) $y = 2x - 4$
b) $y = 6 - x$
c) $y = 3$
d) $x = -2$
e) $y = x^2 - 6x + 8$
f) $y = -x^2 - 2x + 3$
g) $y = x^2 - 2x + 1$
h) $y = 3x^2 + 6x + 4$

46) **(FGV)** A função $f : R \to R$, associa a cada real x o menor entre os números $\frac{x+3}{2}$ e $20 - x$.

Por exemplo, se $x = 1$, temos $\frac{x+3}{2} = 2$ e $20 - x = 19$. Como $2 < 19$ então $f(1) = 2$.

Determine o valor máximo de $f(x)$.

47) **(PUC)** Quantas soluções inteiras tem a inequação $x^2 - 10x + 21 \le 0$?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

48) **(UERJ)** Observe a função f, definida por $f(x) = x^2 - 2kx + 29$, para $x \in R$. Se $f(x) \ge 4$, para todo número real x, o valor mínimo da função f é 4. Assim, o valor positivo do parâmetro k é:

a) 5
b) 6
c) 10
d) 15

49) **(PUC)** A soma das soluções da inequação $\frac{-x+3}{2x-1} > 0$, onde x pertence ao conjunto dos números naturais, é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 8

50) **(PUC)** Considere a inequação $\frac{x+1}{-x-5} \le 0$, com $x \in R$. Qual é o conjunto solução da inequação?

a) $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$
b) $(-\infty, -5) \cup [-1, \infty)$
c) $[0, \infty)$
d) $[-5, \infty)$
e) $(-1, \infty)$

51) Resolva, em R, as equações:

a) $|2x - 5| = 3$
b) $|x^2 - 2x - 5| = 3$
c) $|x^2 + x| = |3x|$
d) $|x|^2 - 3|x| - 10 = 0$

52) Esboce os gráficos das funções:

a) $f(x) = |x - 3|$
b) $f(x) = |x + 3|$
c) $f(x) = |x| + 3$
d) $f(x) = |x| - 3$
e) $f(x) = ||x| - 3|$
f) $f(x) = |x^2 - 3|$
g) $f(x) = |-x^2 + x + 6|$
h) $f(x) = |x^2 - 1| + 3$
i) $f(x) = ||x^2 - 1| - 3$

53) **(PUC)** Construa o gráfico da função real $f(x) = |-x + 1|$.

54) **(UNICAMP)** ...

55) **(FGV)** Esboce o gráfico da função $f : R - \{2\} \to R$ definida por $y = \frac{2|x-2|}{x-2}$.

56) **(PUC)** Construa o gráfico da função real $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$.

57) **(FUVEST)** Resolva a inequação $x.|x| > x$.

58) **(FGV)** O produto dos valores de $x \in Z$ que satisfazem simultaneamente as inequações $|x - 2| \le 3$ e $|3x - 2| > 5$, é:

a) 12
b) 60
c) −12
d) −60
e) 0

59) Durante certo ano, uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função $L(x) = 50(|x-100| + |x-200|)$, onde $x = 1, 2, ..., 365$ corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais.

Determine em que dias (x) do ano o lucro foi de R$ 10 000,00.

60) **(UERJ)** Três corredores – I, II e III – treinam sobre uma pista retilínea. As posições ocupadas por eles, medidas a partir de um mesmo referencial fixo, são descritas pelas funções $S_I = 5t + 3$, $S_{II} = 2t + 9$ e $S_{III} = t^2 - 2t + 9$. Nestas funções, a posição S é medida em metros e o tempo t é medido em segundos.

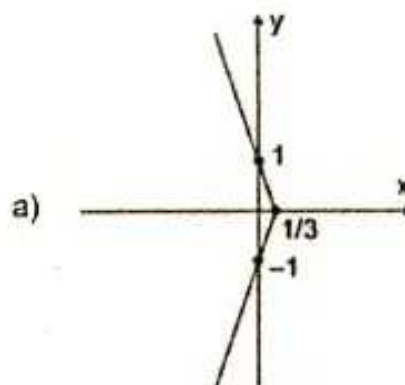
Durante a corrida, o número de vezes em que a distância entre os corredores I e II é igual à distância entre os corredores II e III corresponde a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

61) **(UERJ)** O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte equação:
$V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$, $t \in R_+$. Nela, V é o volume medido em m^3 após **t** horas, contadas a partir de 8h de uma manhã.

Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante.

62) **(PUC)** Qual dos gráficos abaixo representa a função real $f(x) = |3x - 1|$?

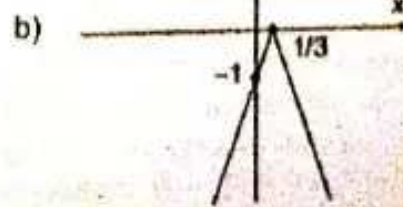
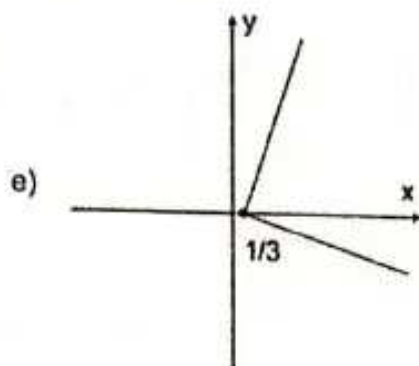
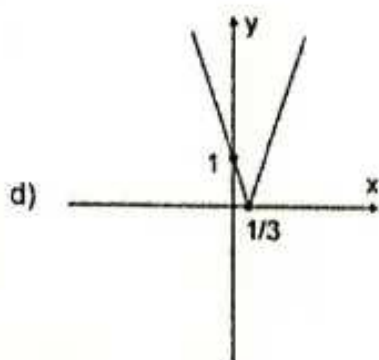
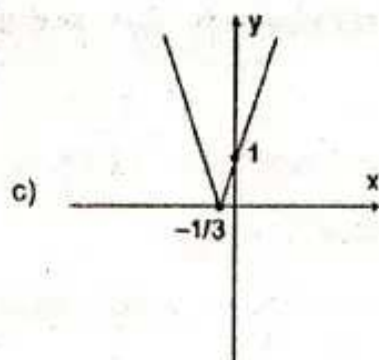
a)
y

...) Dadas as funções $f : R \to R$ e $g : R \to R$ definidas por $f(x) = |1 - x^2|$ e $g(x) = |x|$, o número de pontos na interseção do gráfico de f com o gráfico de g é igual a:

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

b)

c)

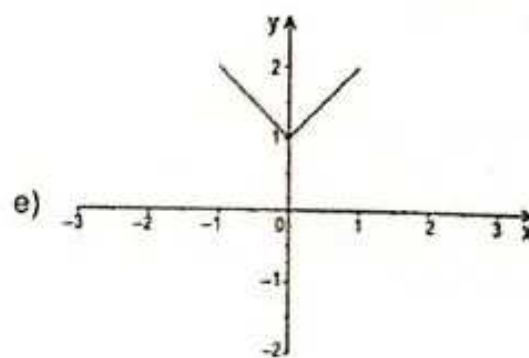
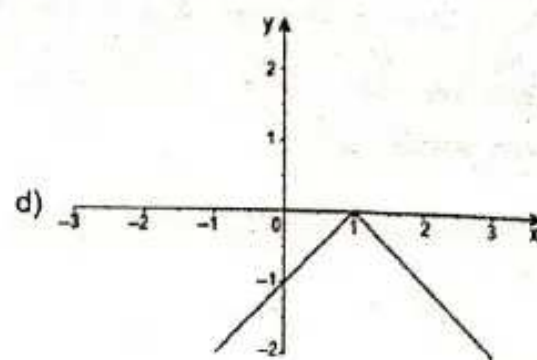
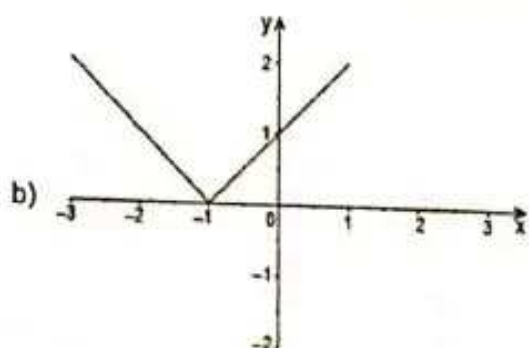
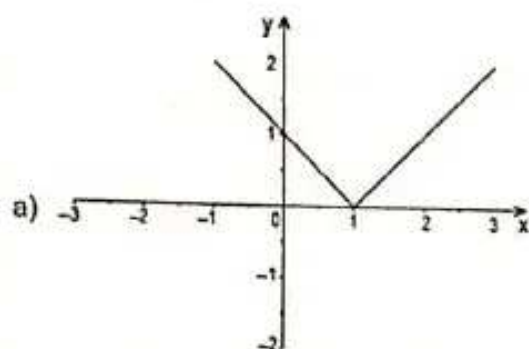
d)

e)

63) **(PUC)** Considere a função real $f(x) = |-x + 1|$. O gráfico que representa a função é:

a)

b)

d)

e)

64) **(PUC)** Assinale o gráfico que melhor representa a curva de equação $y = \frac{1}{x^2}$.

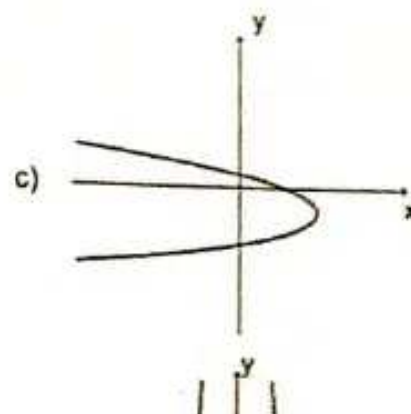
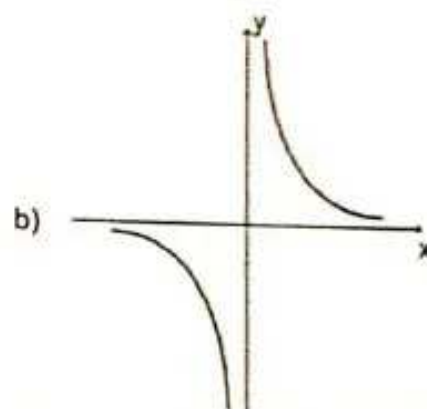
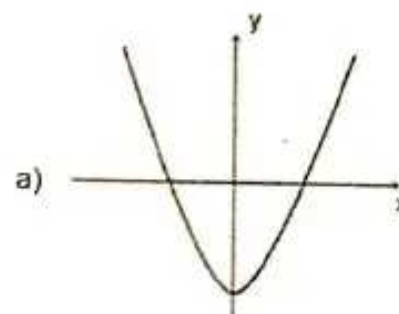
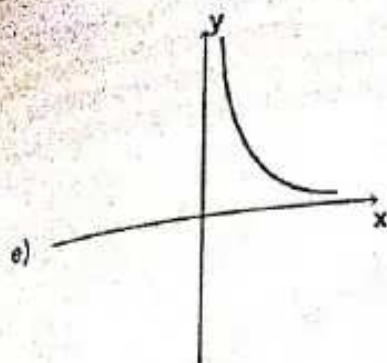
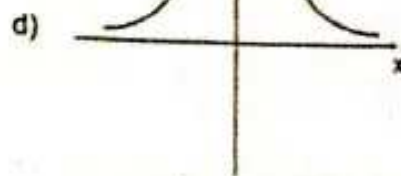
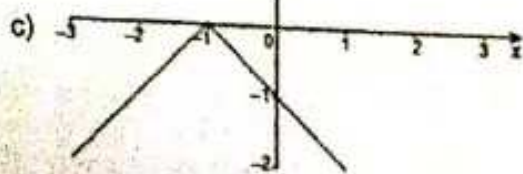
a)

b)

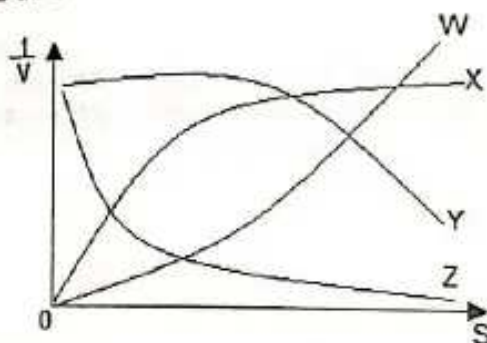
c)

c)

d)

e)

65) Considere o gráfico de uma função f(x). Assinale a opção em que encontramos duas funções cujos gráficos sejam simétricos ao gráfico de f(x) em relação a uma reta.

a) $g(x) = f(x) + 2$ e $h(x) = f(x) - 2$
b) $g(x) = f(x + 2)$ e $h(x) = f(x - 2)$
c) $g(x) = f(-x)$ e $h(x) = -f(x)$
d) $g(x) = -f(x)$ e $h(x) = f(-x)$

66) (UERJ) Em um experimento, em condições adequadas, foram medidas as velocidades de reação **V** de uma enzima, em função do aumento da concentração de seu substrato **S**. O gráfico abaixo indica variações de $\frac{1}{V}$ em função de S.

A curva que deve representar o resultado experimental é a identificada por:

a) W
b) X
c) Y
d) Z

67) Um açougue vende cada quilo de alcatra por R$ 25,00, para compras até três quilos. Cada quilo excedente a três é vendido por R$ 20,00. Esboce o gráfico que melhor representa o preço por quilo (y) em função da quantidade comprada (x).

68) **(ENEM)** O fisiologista Archibald Vivian Hill propôs, em seus estudos, que a velocidade v de contração de um músculo ao ser submetido a um peso p é dada pela equação $(p + a).(v + b) = K$, com a, b e K constantes.
Um fisioterapeuta, com o intuito de maximizar o efeito benéfico dos exercícios que recomendaria a um de seus pacientes, quis estudar essa equação e a classificou desta forma:

TIPO DE CURVA
Semirreta oblíqua
Semirreta horizontal

a) Semirreta oblíqua.
b) Semirreta horizontal.
c) Ramo de parábola.
d) Arco de circunferência.
e) Ramo de hipérbole.

69) **(FGV)** Sérgio vende coco gelado em uma barraca na Lagoa Rodrigo de Freitas, cobrando, por unidade, R$4,00. A cada dia de trabalho, ele paga R$20,00 pelo aluguel da barraca e para o fornecedor de cocos, paga R$12,00 mais R$1,50 por unidade vendida. Em certo dia Sérgio teve lucro de R$73,00. Quantos cocos ele vendeu nesse dia?

a) 54
b) 46
c) 42
d) 50
e) 38

70) **(ENEM)** A empresa E fornece linhas para telefones celulares da Companhia de Telefonia X a dois de seus funcionários. Os funcionários 1 e 2 usam, em média, 170 minutos e 195 minutos mensais, em ligações, respectivamente.

O plano das linhas desses celulares possui uma franquia de 90 minutos mensais (ou seja, 90 minutos de ligações grátis a cada mês), e custo de R$ 0,20 por minuto adicional, além de um custo fixo de R$ 30,00 mensais.

A companhia X lançou novos planos que podem baratear o custo da empresa E com esses celulares e ofereceu-lhes, com preços mostrados a seguir:

	Franquia (em minutos)	Custo por minuto adicional (em reais)	Custo fixo (em reais)
Plano Dourado	120	0,22	20
Plano Parceria	110	0,25	15

Mas, por contrato, E só pode migrar uma das contas para um novo plano, enquanto a outra precisa continuar no plano em que está.

De modo a ter o menor custo possível com os pagamentos dessas contas de celulares, qual é a melhor atitude a ser tomada pela empresa E em relação às ofertas descritas?

a) Fornecer o Plano Dourado para o funcionário 1.
b) Fornecer o Plano Parceria para o funcionário 1.
c) Fornecer o Plano Dourado para o funcionário 2.
d) Fornecer o Plano Parceria para o funcionário 2.
e) Manter os planos atuais.

71) **(UNICAMP)** O custo de uma corrida de táxi é constituído por um valor inicial Q_0, fixo, mais um valor que varia proporcionalmente à distância D percorrida nessa corrida. Sabe-se que, em uma corrida na qual foram percorridos 3,6 km, a quantia cobrada foi de R$ 8,25, e que em outra corrida, de 2,8 km, a quantia cobrada foi de R$ 7,25.

a) Calcule o valor inicial Q_0.
b) Se, em um dia de trabalho, um taxista arrecadou R$ 75,00 em 10 corridas, quantos quilômetros seu

Ramo de parábola
Arco de circunferência
Ramo de hipérbole

O fisioterapeuta analisou a dependência entre v e p na equação de Hill e classificou de acordo com sua representação geométrica no plano cartesiano, utilizando o par de coordenadas (p, v). Admita que K > 0.
O gráfico da equação que o fisioterapeuta utilizou para maximizar o efeito dos exercícios é do tipo

carro percorreu naquele dia?

72) **(ENEM)** Em Economia, costuma-se representar o consumo mensal C de uma família por uma função linear $C = c_0 + c_1Y$, em que c_0 é o consumo independente da renda, c_1 é a chamada propensão ao consumo e Y é a renda mensal da família.

Uma determinada família possui a seguinte função consumo: C = 500 + 0,8Y. Nesse caso, ela possui um gasto de R$ 500,00, independente da renda, e propensão

ao consumo de 0,8. Nessa família, a renda mensal provém somente dos salários do pai e da mãe, que são, respectivamente, R$ 3 000,00 e R$ 4 000,00.

Qual o consumo mensal dessa família?

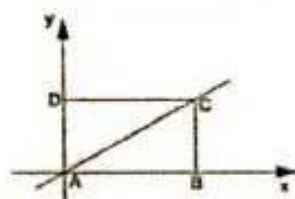
a) R$ 2 900,00.
b) R$ 3 300,00.
c) R$ 3 700,00.
d) R$ 6 100,00.
e) R$ 6 600,00.

73) **(ENEM)** Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação q = 400 – 100p, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

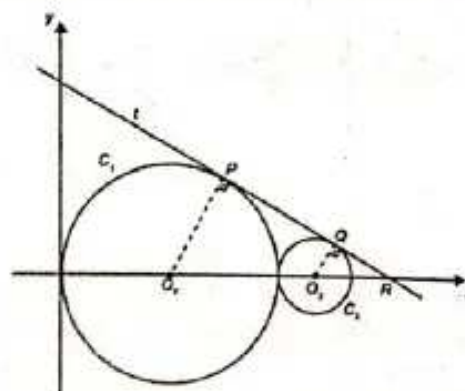
O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) R$ 0,50 ≤ p < R$ 1,50
b) R$ 1,50 ≤ p < R$ 2,50
c) R$ 2,50 ≤ p < R$ 3,50
d) R$ 3,50 ≤ p < R$ 4,50
e) R$ 4,50 ≤ p < R$ 5,50

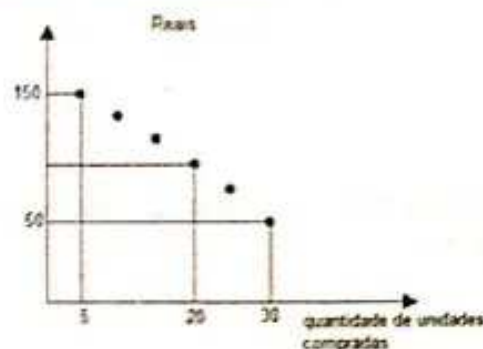
74) **(PUC)** O retângulo ABCD tem um lado sobre o eixo x e um lado sobre o eixo y, como mostra a figura. A área do retângulo ABCD é 15, e a medida do lado AB é 5. A equação da reta que passa por A e por C é:

a) y = 3x
b) y = -3x
c) y = 5x
d) $y = \frac{3}{5}x$
e) $y = \frac{5}{3}x$

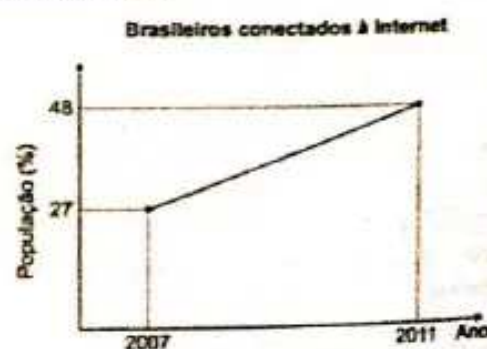
75) **(PUC)** O retângulo ABCD tem um lado sobre o eixo x e um lado sobre o eixo y, como mostra a figura. A equação da reta que passa por A e por C é $y = \frac{2}{3}x$, e a medida do lado AB é 6. A área do triângulo ABC é:

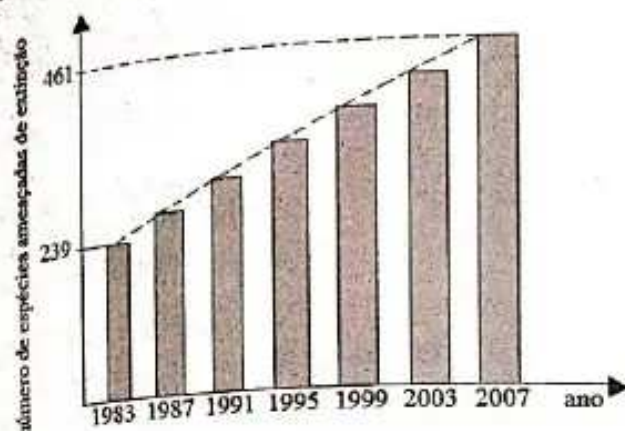
y

76) **(ENEM)** Na figura estão representadas, em um plano cartesiano, duas circunferências: C_1 (de raio 3 e centro O_1) e C_2 (de raio 1 e centro O_2), tangentes entre si, e uma reta *t* tangente às duas circunferências nos pontos P e Q.

Nessas condições, a equação da reta *t* é

a) $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$
b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3}$
c) y = -x + 4
d) $y = -\frac{2}{3}x + 4$
e) $y = -\frac{4}{5}x + 4$

77) **(UERJ)** A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada no gráfico abaixo, por 6 pontos de uma mesma reta:

Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, quanto pagará por unidade, em reais?

78) **(ENEM)** O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.

Suponha que foi mantida, para os anos seguintes,

79) **(ENEM)** O gráfico abaixo, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.

Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a

a) 465.
b) 493.
c) 498.
d) 538.
e) 699.

80) **(ENEM)**

O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear. Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será

a) menor que 1.150.
b) 218 unidades maior que em 2004.
c) maior que 1.150 e menor que 1.200.
d) 177 unidades maior que 2010.
e) maior que 1.200.

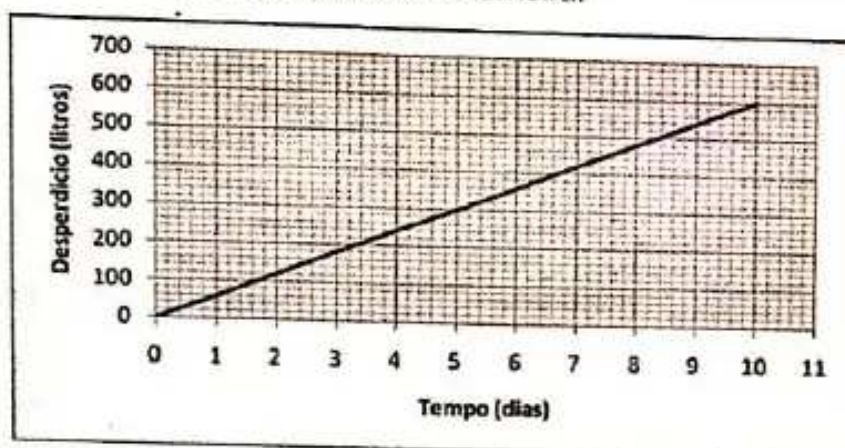
81) O valor de uma máquina agrícola, adquirida por R$ 5.000,00, sofre, nos primeiros anos, depreciação (desvalorização) linear de R$ 240,00 por ano, até atingir 28% do valor de aquisição, estabilizando-se em torno desse valor mínimo.

a) Qual é o tempo transcorrido até a estabilização de seu valor?
b) Qual é o valor mínimo da máquina?
c) Faça um gráfico que representa a situação descrita no problema.

82) **(UERJ)**

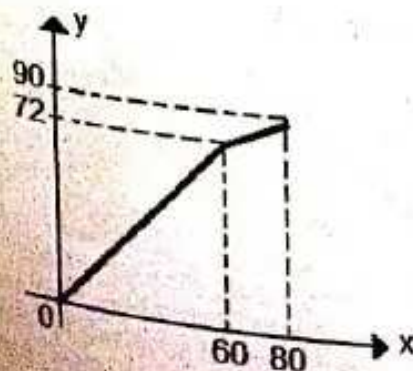
No gráfico, x representa a quantidade de batatas, em quilogramas, vendidas na barraca do Custódio, em um dia de feira, e y representa o valor, em reais, arrecadado com essa venda. A partir das 12 horas, o movimento diminui e o preço do quilograma de batatas também diminui.

a) Calcule a redução percentual do preço do quilograma das batatas a partir das 12 horas.
b) Se o preço não diminuísse, teria sido arrecadado um valor V na venda de 80 kg. Determine o percentual de que corresponde à perda causada pela redução do preço.

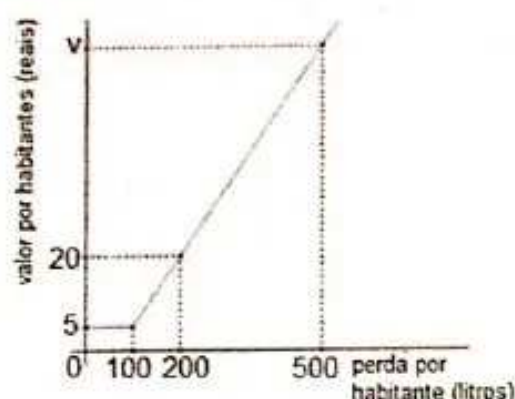
83) **(ENEM)** Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira:

Se y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias, a relação entre x e y é

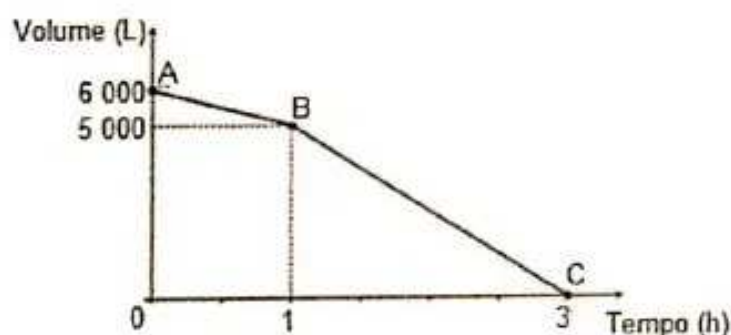
a) $y = 2x$
b) $y = \frac{1}{2}x$
c) $y = 60x$
d) $y = 60x + 1$
e) $y = 80x + 50$

84) **(ENEM)** Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.

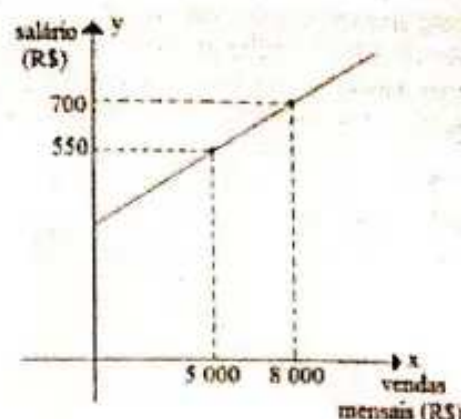
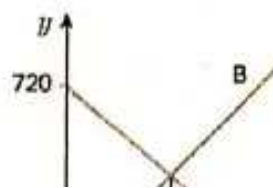
Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua

capacidade?

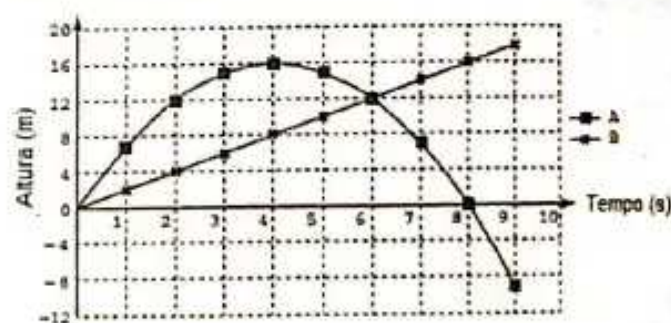
a) 2 meses e meio.
b) 3 meses e meio.
c) 1 mês e meio.
d) 4 meses.
e) 1 mês.

85) **(UERJ)** O resultado de um estudo para combater o desperdício de água, em certo município, propôs que as companhias de abastecimento pagassem uma taxa à agência reguladora sobre as perdas por vazamento nos seus sistemas de distribuição. No gráfico, mostra-se o valor a ser pago por uma companhia em função da perda por habitante.

Calcule o valor V, em reais, representado no gráfico, quando a perda for igual a 500 litros por habitante.

86) **(ENEM)** Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.

Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

a) 1 000.
b) 1 250.
c) 1 500.
d) 2 000.
e) 2 500.

87) **(UERJ)** O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x.

a) Encontre a lei da função cujo gráfico é essa reta.
b) Qual é a parte fixa do salário?

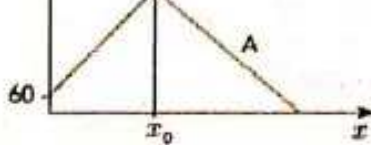
89) **(ENEM)** Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades.
b) diminuir em 4 unidades.
c) aumentar em 2 unidades.
d) aumentar em 4 unidades.
e) aumentar em 8 unidades.

90) **(ENEM)** Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.

88) **(FGV)** Um vendedor recebe um salário fixo e mais uma parte variável, correspondente à comissão sobre o total vendido em um mês. O gráfico seguinte informa algumas possibilidades de salário em função das vendas.

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$

e) $y = x$

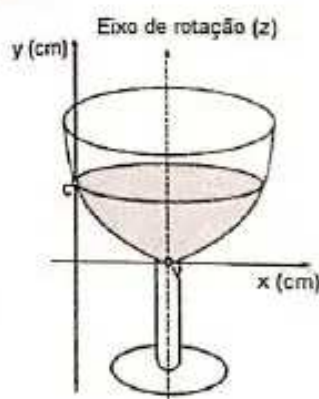
91) **(PUC)** Para que a curva representativa da equação $y = px^2 - 4x + 2$ tangencie o eixo dos **x**, o valor da constante **p** deve ser:

a) –6
b) –2
c) 0
d) 2
e) 6

92) **(ENEM)** A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t=0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0
b) 19,8
c) 20,0
d) 38,0
e) 39,0

93) **(ENEM)** A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$ onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a) 1
b) 2
c) 4
d) 5
e) 6

94) **(FUVEST)** A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura.

do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?

95) **(UNICAMP)** O Instituto de Meteorologia de uma cidade no Sul do país registrou a temperatura local nas doze primeiras horas de um dia de inverno. Uma lei que pode representar a temperatura (y) em função da hora (x) é $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + k$, com $0 \leq x \leq 12$, e k uma constante real.

a) Determine o valor de k, sabendo que às 3 horas da manhã a temperatura indicou 0°C.
b) Qual foi a temperatura mínima registrada?

96) **(ENEM)** Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

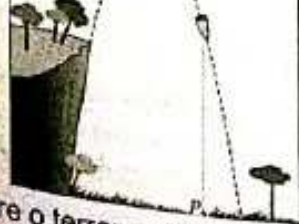
Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

a) muito baixa.
b) baixa.
c) média.
d) alta.
e) muito alta.

97) **(PUC)** Um vendedor de picolés verificou que a quantidade diária de picolés vendidos (y) varia de acordo com o preço unitário de venda (p), conforme a lei $y = 90 - 20p$. Seja P o preço pelo qual o picolé deve ser vendido para que a receita seja máxima. Assinale o valor de P.

a) R$ 2,25
b) R$ 3,25
c) R$ 4,25
d) R$ 5,25
e) R$ 6,25

98) **(ENEM)** Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.

O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima

Área para o público

y (metro)

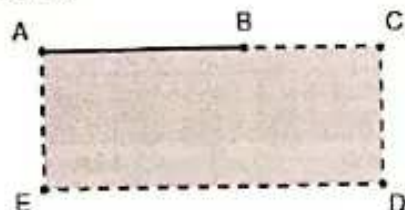
x (metro)

A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R$ 20,00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R$ 5,00.

A empresa dispõe de R$ 5 000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público. A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

a) 50m da tela tipo A e 800m da tela tipo B.
b) 62,5m da tela tipo A e 250m da tela tipo B.
c) 100m da tela tipo A e 600m da tela tipo B.
d) 125m da tela tipo A e 500m da tela tipo B.
e) 200m da tela tipo A e 200m da tela tipo B.

99) **(FGV)** Joel possui um sítio e deseja construir um galinheiro retangular com a cerca que possui. Para conseguir uma área bem grande para o galinheiro, ele deseja aproveitar um muro que já existe no seu quintal. Na figura abaixo, *AB* é o muro existente, *ACDE* é o galinheiro que Joel pretende construir e as linhas tracejadas representam toda a cerca que Joel possui.

O comprimento do muro *AB* é de 6m e Joel possui 34m de cerca.
Qual é a maior área que ele poderá cercar?

100) **(PUC)** Um quadrado e um retângulo cujo comprimento é triplo da largura, são construídos usando-se um arame de 28 cm. Determine as dimensões do quadrado e do retângulo do modo que a soma das duas áreas seja menor possível.

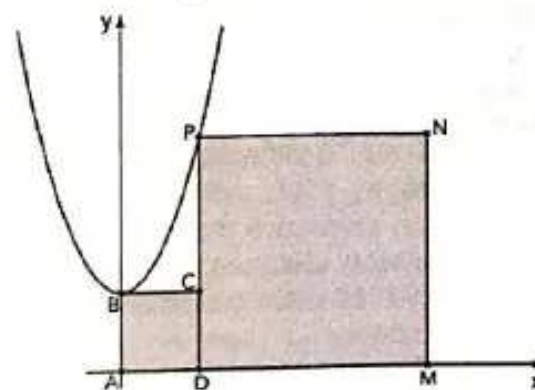
101) **(ENEM)** Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola $y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a 2/3 da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

(A) 18
(B) 20
(C) 36

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

a) 19º dia.
b) 20º dia.
c) 29º dia.
d) 30º dia.
e) 60º dia.

103) **(UERJ)** No plano cartesiano a seguir, estão representados o gráfico da função definida por $f(x) = x^2 + 2$, com $x \in \mathbb{R}$, e os vértices dos quadrados adjacentes ABCD e DMNP.

Observe que B e P são pontos do gráfico da função f e que A, B, D e M são pontos dos eixos coordenados. Desse modo, a área do polígono ABCPNM, formado pela união dos dois quadrados, é:

a) 20
b) 28
c) 36
d) 40

104) **(PUC)** Sabendo que a curva abaixo é a parábola de equação $y = x^2 - x - 6$, a área do triângulo ABC é:

a) 4
b) 6
c) 9
d) 10
e) 12

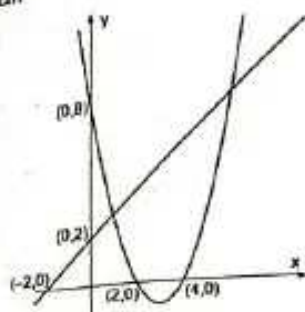
105) **(PUC)** O retângulo ABCD tem dois vértices na parábola de equação $y = \frac{x^2}{6} - \frac{11}{6}x + 3$ e dois vértices no eixo x, como na figura abaixo.

(D) 45
(E) 54

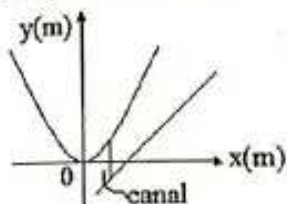
102) **(ENEM)** Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

Sabendo que $D = (3,0)$, faça o que se pede.

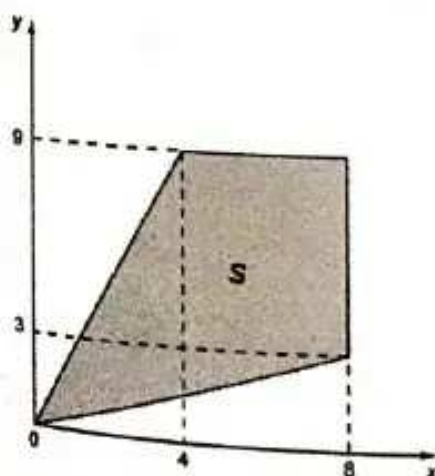
a) Determine as coordenadas do ponto A.
b) Determine as coordenadas do ponto C.
c) Calcule a área do retângulo ABCD.

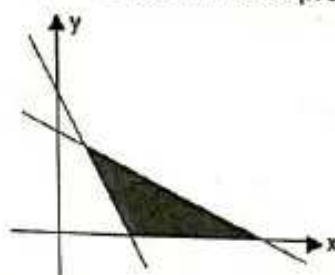
106) **(PUC)** A figura abaixo mostra uma reta e uma parábola de eixo vertical.

a) Sabendo que a reta corta os eixos nos pontos $(-2, 0)$ e $(0, 2)$, encontre a equação da reta.
b) Sabendo que a parábola corta os eixos nos pontos $(0, 8)$, $(2, 0)$ e $(4, 0)$, encontre a equação da parábola.
c) Encontre os pontos de interseção entre a reta e a parábola.

107) **(FUVEST)** A figura abaixo representa, na escala $1 : 50$, os trechos de dois rios: um descrito pela parábola $y = x^2$ e o outro pela reta $y = 2x - 5$.

y(m)
x(m)
0
canal

De todos os possíveis canais retilíneos ligando os dois rios e construídos paralelamente ao eixo Oy, o de menor comprimento real, considerando a escala da figura, mede:

a) 250m
b) 300m
c) 350m
d) 400m
e) 200m

108) **(ENEM)** Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área S) na figura.

Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por [illegible]

109) **(UERJ)** João e José têm, respectivamente, x e y moedas de R$ 1,00. Juntando essas quantias, não conseguiram os R$ 8,00 necessários para comprar dois lanches com o mesmo preço. Vanessa chegou e contribuiu com (2x) moedas de R$ 1,00. Assim, os três puderam comprar três daqueles lanches e ainda sobrou dinheiro. A figura abaixo é uma representação gráfica, em R^2, do sistema de inequações que soluciona esse problema.

O menor número de moedas de R$ 1,00 com que Vanessa poderia contribuir para a solução desse problema é:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8

110) **(UERJ)** Sabe-se que, nos pulmões, o ar atinge a temperatura do corpo e que, ao ser exalado, tem temperatura inferior à do corpo, já que é resfriado nas paredes do nariz. Através de medições realizadas em um laboratório foi obtida a função $T_E = 8,5 + 0,75T_A$, $12° \leq T_A \leq 30°$, em que T_E e T_A representam, respectivamente, a temperatura do ar exalado e a do ambiente.

Calcule:

a) a temperatura do ambiente quando $T_E = 25°C$;
b) o maior valor que pode ser obtido para T_E.

111) **(UNICAMP)** O preço unitário de um produto é dado por $p = \frac{k}{n} + 10$, para $n \geq 1$ em que k é uma constante e n é o número de unidades adquiridas.

a) Encontre o valor da constante k, sabendo que, quando foram adquiridas 10 unidades, o preço unitário foi de R$ 19,00.
b) Com R$ 590,00, quantas unidades do referido produto podem ser adquiridas?

112) **(PUC)** A produção diária de certo produto, realizada por um operário, é avaliada pela função $p(x) = 8x + 9x^2 - x^3$ unidades, onde x é o número de horas após as 8 horas da manhã.

a) Qual é a sua produção até o meio-dia?
b) Qual é a sua produção durante a quarta hora de trabalho?

113) **(ENEM)** Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a van, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral. O dono de uma van, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão [illegible] R$ 60,00 de cada passageiro

... por toda a fábrica. Para confeccioná-los, um programador utilizará um software que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas. As desigualdades que devem ser utilizadas no referido software, para o desenho da região de isolamento, são

a) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$
b) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
c) $3y - x \geq 0$; $2y - x \leq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
d) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$
e) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

até a capital de seu estado R$ 60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da van, cada passageiro pagará mais R$ 2,00 por lugar vago.

Sendo x o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado V(x), em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é

a) $V(x) = 902x$
b) $V(x) = 930x$
c) $V(x) = 900 + 30x$
d) $V(x) = 60x + 2x^2$
e) $V(x) = 900 - 30x - 2x^2$

114) **(FGV)** Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R$ 200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$ 4,00 por cada lugar não ocupado (por exemplo, se existirem 10 lugares não ocupados, o preço de cada passagem será R$ 240,00). Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo?

115) **(ENEM)** Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.

No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante. O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é

a)

b)

c)

d)

e)

Gabarito

1)
a) R = { (1, -1), (5, 7), (7, 11)}

c) Função injetora
d) Função bijetora
e) Não é função
f) Função

4) e

5) b

6)
a) 10
b) 1
c) -2
d) 2
e) 3
f) -1
g) 6
h) $\frac{5}{4}$
i) - 75

7) 15

8)
a) $f(x) = \frac{4x - 10}{3}$
b) -14

9)
a) -3 e 3
b) 8

10)
a) Função
b) Não é função
c) Função injetora
d) Função
e) Não é função

11)
a) D = {2, 3, 5} e Im = {0, 2}
b) D = {2, 3, 4} e Im = {1, 2, 3}
c) D = [-3, 6] e Im = [-4, 0]
d) D = [-2, 5] e Im = [-2, 2]
e) D = R e Im = R

12)
a) -4
b) -2
c) 6
d) 0
e) -3
f) -2
g) 0

13) c
14) b
15) a
16) a
17) c
18) b
19) 4

b) D = { 1, 5, 7}
c) Im = {-1, 7, 11}

2)
R = {(1, 0), (2, 0), (3, 0), (3, 2), (4, 0), (4, 2)}
D = {1, 2, 3, 4}
Im = {0, 2}

3)
a) Função sobrejetora
b) Não é função

20) -5
21) -11
22) 15
23) e
24) c
25) d
26) a
27) 25
28) -59
29) -2; 0 e $\frac{5}{2}$

30) Beatriz

31) 2

32)
a) 7
b) 26
c) 2
d) $2x^2-1$
e) $4x^2-6x+10$
f) $4x-6$
g) x^4+2x^2+2

33) -2

34)
a) -3
b) ∄ x
c) 2011

35) b

36)
a) $y=\frac{x-3}{4}$

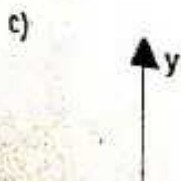
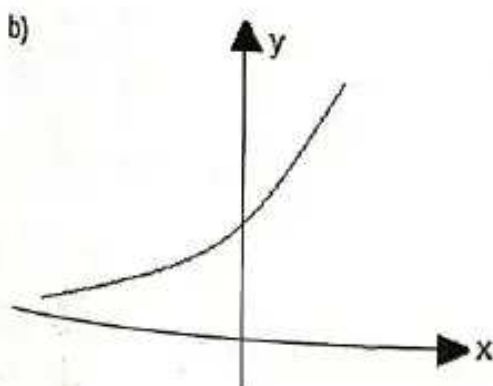
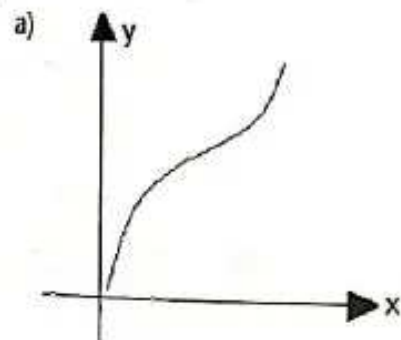
b) $y=\frac{3x-4}{2x-1}$

c) $y=\frac{2x-1}{x-2}$

d) $y=\sqrt[3]{x+2}$

37)
a) y, x

b) y, x

c) y

39)
a) Par
b) Ímpar
c) Nem par e nem ímpar
d) Par
e) Par
f) Ímpar
g) Ímpar

40)
a) y, x, 2, -4

b) y, x, 6, 6

c) y, x, 3

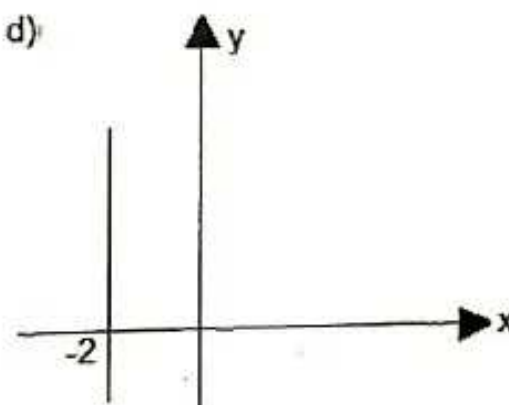
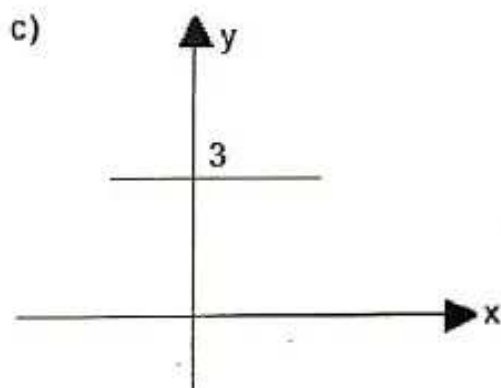
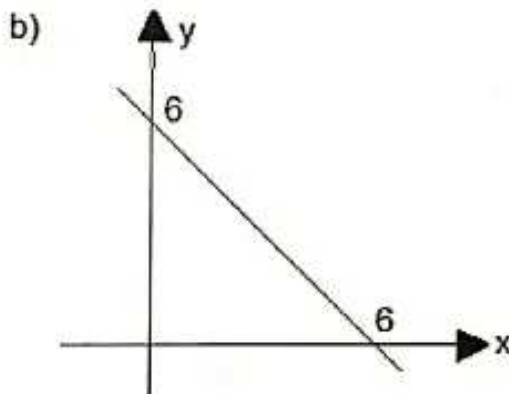
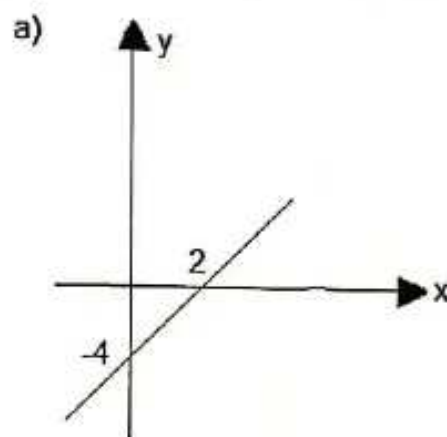
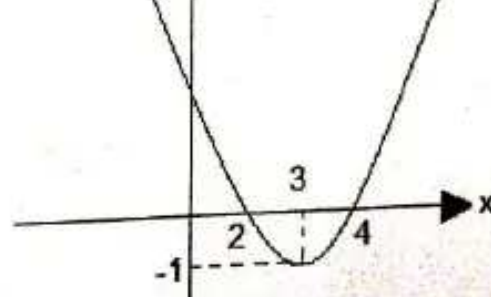
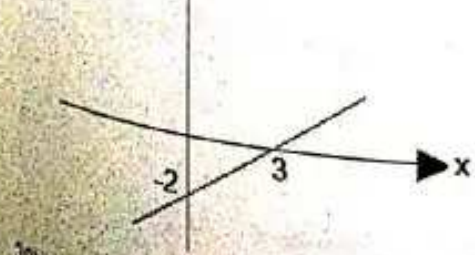
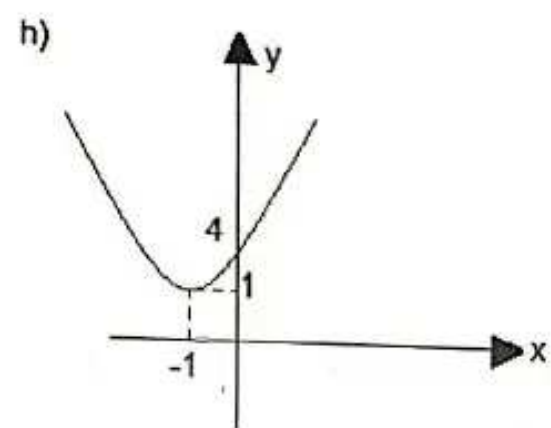
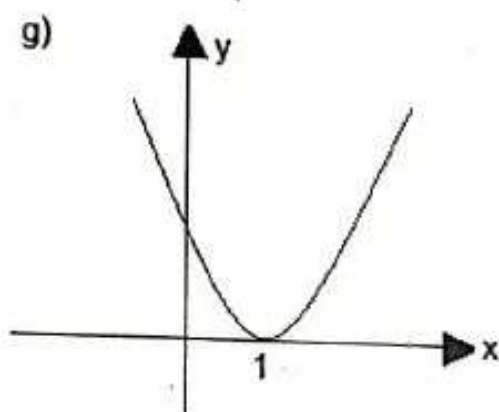
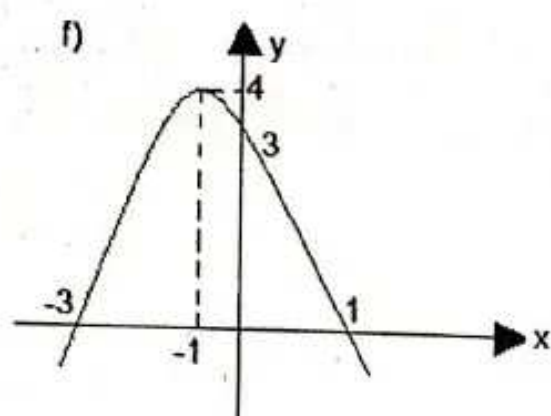
d) y, x, -2

e) y

38) c

f)

g)

h)

41) b

42)

a) S =]-∞, 3] ∪ [4, +∞[
b) S = R – {3}
c) S =]-∞, -1] ∪ [3, +∞[
d) S = ∅
e) S =]-∞, -3] ∪ [2, 4]
f) S =]-∞, -1 [∪] 0,1[∪]3,+∞[
g) S =]-∞, -2 [∪]1,2[∪]2,+∞[
h) S =]-∞, -1] ∪]1, +∞[
i) S =]-∞, -2] ∪ [0, 3[
j) S =]-∞, -3 [∪]-3,2[∪]3,+∞[
k) S = R – {4}
l) S =]-∞,6]
m) S = $\left\{\frac{7}{2}\right\}$
n) S =]-5 / 3,+∞[
o) S = [-1, 2 [∪] 2, +∞[
p) S =]-∞, -3 [∪] -3,-2] ∪ [3,+∞[

43) c

44)

a) a = -3 e b = 2

51)

a) S = {1, 5}
b) S = {-2, 1 - $\sqrt{3}$, 1 + $\sqrt{3}$, 4}
c) S = { -4, 0, 2}
d) S = {-5, 5}

52)

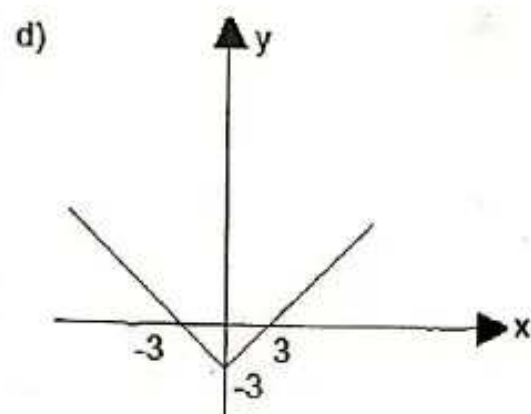
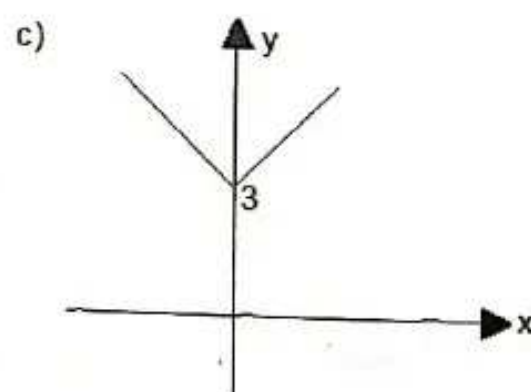
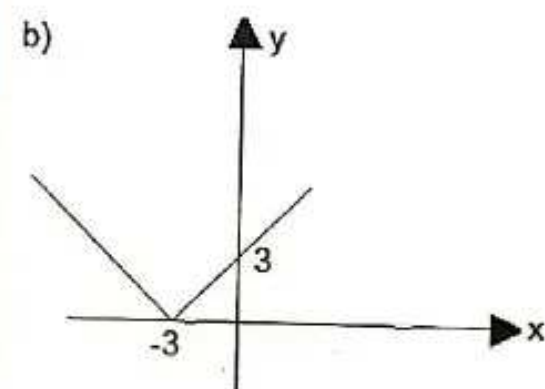
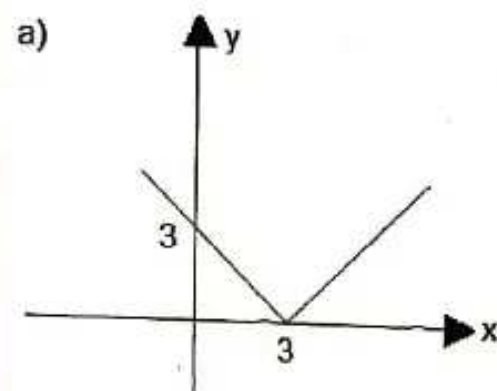
a)

b)

c)

d)

e)

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

45) $S = [0, 2] \cup \{4\}$

46) $\frac{23}{3}$

47) c

48) a

49) a

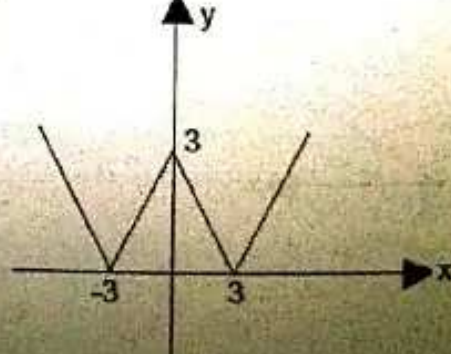
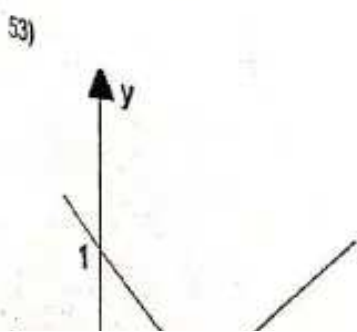
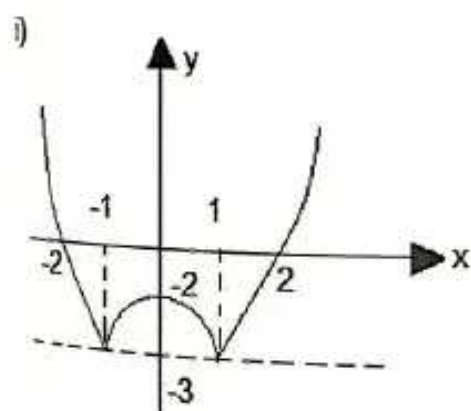
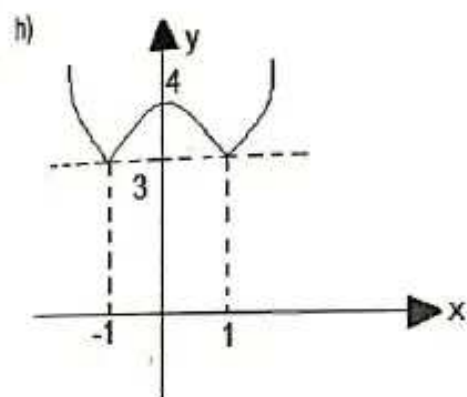
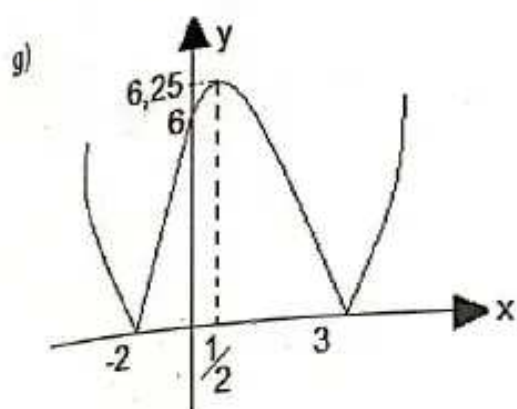
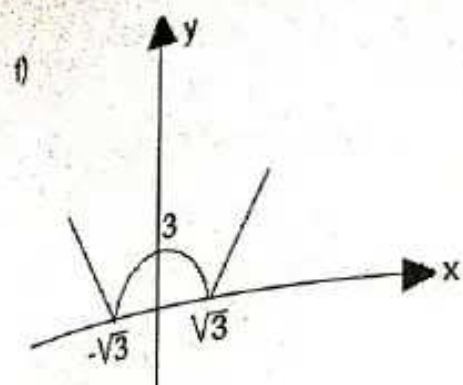
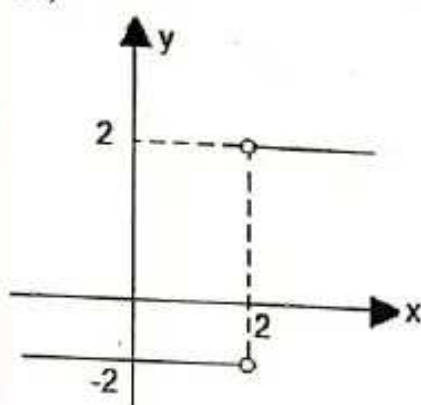
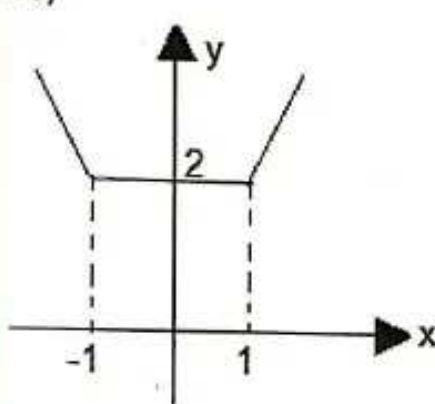
50) b

f)

g)

h)

i)

53)

55)

56)

57) $S =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

58) b

59) x = 50 ou x = 250

60) c

61) Entre 10h e 11h

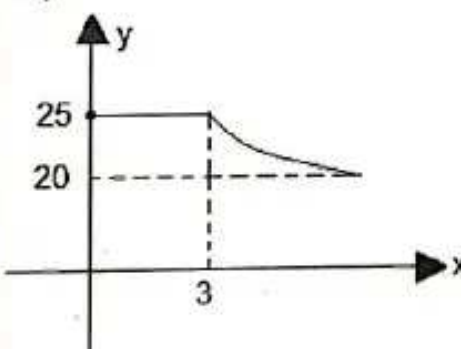
62) d

63) a

64) d

65) d

66) d

67)

68) e

69) c

70) b

71)

a) R$ 3,75

b) 30 km

72) d

73) a

74) d

1 x

54) b

74) d

75) d

76) b

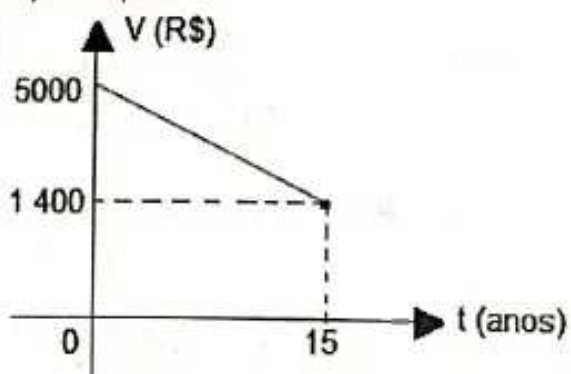
77) R$ 4,50

78) b

79) c

80) c

81)
a) 15 anos
b) R$ 1 400,00
c)

V (R$)
5000
1 400
0
15
t (anos)

82)
a) 25%
b) 6,25%

83) c

84) a

85) R$ 65,00

86) c

87) 30

88)
a) $y = 0,05\,x + 300,\ x \geq 0$
b) R$ 300,00

89) c

90) a

91) d

92) d

93) e

94) d

95)
a) 8,25
b) -4ºC

96) d

97) a

98) d

99) $100m^2$

100) Quadrado: 5 cm
Retângulo: 2 cm x 6 cm

101) c

102) b

103) d

104) c

105)
a) (3, -1)
b) (8, 0)
c) 5 u.a.

106)

111)
a) 90
b) 50

112)
a) 112 unidades
b) 34 unidades

113) e

114) 25

115) d

Anotações

a) $y = x + 2$
b) $y = x^2 - 6x + 8$
c) $(1, 3)$ e $(6,8)$

107) e

108) c

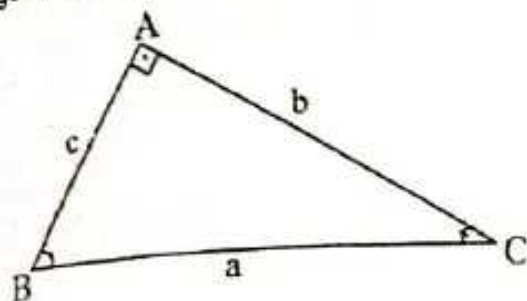
109) c

110)
a) 22ºC
b) 31ºC

Capítulo IV

TRIGONOMETRIA

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

É sabido da Geometria Plana que triângulo retângulo é aquele que apresenta um ângulo reto e portanto dois outros ângulos agudos complementares.

a → hipotenusa

b, c → catetos

$$\boxed{\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ}$$

Cabe lembrar a aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo visto: "Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Definições

Em um triângulo retângulo os ângulos agudos estão associados aos números seno, cosseno e tangente, de inidos a seguir:

Seno - é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}}$$

Cosseno - é razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\cos \hat{B} = \frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos \hat{C} = \frac{b}{a}}$$

Tangente - é a razão entro o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo

Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b}}$$

Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\sec \hat{B} = \frac{a}{c}} \quad \text{e} \quad \boxed{\sec \hat{C} = \frac{a}{b}}$$

Cossecante - é a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto ao ângulo.

Na figura anterior, temos:

$$\boxed{\csc \hat{B} = \frac{a}{b}} \quad \text{e} \quad \boxed{\csc \hat{C} = \frac{a}{c}}$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Observe pelo exposto anteriormente que sen $\hat{B}$= cos $\hat{C}$, sen $\hat{C}$= cos $\hat{B}$, tg $\hat{B}$= ctg $\hat{C}$, tg $\hat{C}$= ctg $\hat{B}$, sec $\hat{B}$= csc $\hat{C}$ e sec $\hat{C}$ = csc $\hat{B}$. Isto se deve ao fato de que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares. Assim: **"se dois ângulos são complementares o seno de um deles é igual ao cosseno do outro, a tangente de um é igual à cotangente do outro e a secante de um é igual à cossecante do outro."**

Exemplos:

sen 40° = cos 50°

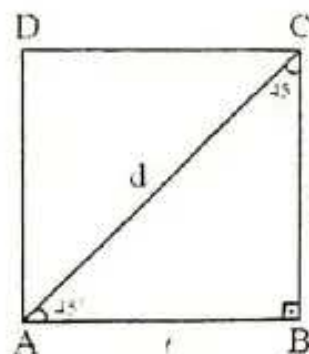
tg 70°= ctg 20°

sec 10° = csc 80°

Razões Trigonométricas do Ângulo de 45°

A seguir obteremos as principais razões trigonométricas do ângulo de 45° que são seno, cosseno e tangente. Para isto, consideremos o quadrado ABCD abaixo, de lado ℓ. Calculemos sua diagonal **d** utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC.

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$d^2 = 2\ell^2 \quad \therefore \quad \boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$

Aplicando no mesmo triângulo as definições:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{\ell}{d} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Cotangente - é a razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto ao ângulo.

Na figura anterior, temos:

$$\boxed{ctg\ \hat{B} = \frac{c}{b}} \quad e \quad \boxed{ctg\ \hat{C} = \frac{b}{c}}$$

Secante - é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente ao ângulo.

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{CATETO ADJACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{\ell}{d} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

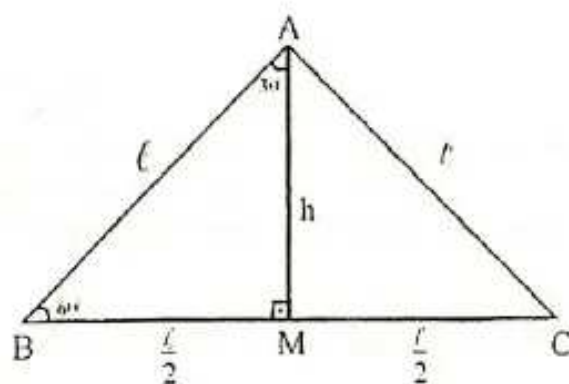
$$tg\ 45^\circ = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{CATETO ADJACENTE}} = \frac{\ell}{\ell} \Rightarrow \boxed{tg\ 45^\circ = 1}$$

Razões Trigonométricas dos Ângulos de 30° e 60°

Para obtermos tais razões lançaremos mão do triângulo equilátero ABC de lado ℓ e altura h da figura abaixo. Daí aplicaremos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABM:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \quad \therefore \quad \boxed{h = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Utilizando as relações nesse mesmo triângulo:

$$sen\ 30^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Rightarrow \boxed{sen\ 30^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Rightarrow \boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg\ 30^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{h} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{tg\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$sen\ 60^\circ = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Rightarrow \boxed{sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Rightarrow \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$tg\ 60^\circ = \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell} \Rightarrow \boxed{tg\ 60^\circ = \sqrt{3}}$$

Exercícios

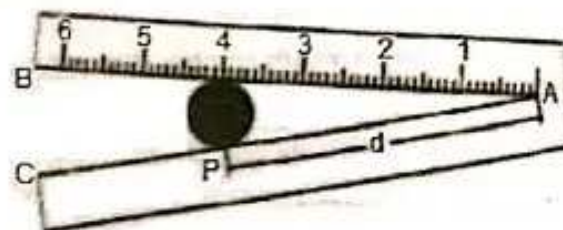
Considere a tabela a seguir para a resolução dos exercícios

1) Um pedreiro encostou uma escada de 6 m de comprimento em um muro, formando um ângulo de 58° com o solo. Determine a altura máxima que ele consegue alcançar utilizando a escada.

2) Um homem encontra-se a 150 m da entrada de um edifício. Quando olha para o topo do prédio, seu raio visual forma um ângulo de 59° com a horizontal. Quantos andares tem esse prédio, considerando-se que a distância entre um andar e o imediatamente superior a ele é de 3 m?

3) Um teleférico, cujo cabo tem 180 m de comprimento e forma 57° com a plataforma de embarque, leva os turistas do ponto A, o solo, até o ponto B, no alto do morro do Matoso. Há também, para o visitante, a opção de acessar o alto do morro através de um elevador panorâmico, que parte do pé do morro. Gertrudes estava na fila, aguardando o teleférico. Devido à demora, ela resolveu caminhar do ponto A até o elevador. Qual a distância que ela percorreu nesse trajeto?

4) **(UERJ)** Um instrumento, em forma de V, é usado para medir o diâmetro dos fios elétricos. Para efetuar a medida, basta inserir um fio na parte interna do V e observar o ponto da escala que indica a tangência entre esse fio e o instrumento. Nesse ponto, lê-se o diâmetro do fio, em milímetros.

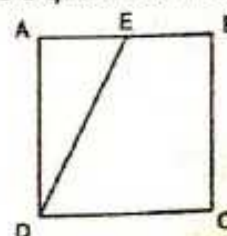
Considere, agora, a ilustração a seguir, que mostra a seção reta de um fio de 4 mm de diâmetro inserido no instrumento.

Se o ângulo BÂC do instrumento mede 12°, a distância d, em milímetros, do ponto A ao ponto de tangência P é igual a:

a) $\frac{2}{\cos 12^\circ}$

b) $\frac{6}{sen 12^\circ}$

c) $\frac{6}{\cos 6^\circ}$

d) $\frac{2}{tg 6^\circ}$

5) **(PUC)** Considere o quadrado ABCD como na figura.

Considere a tabela a seguir para a resolução dos exercícios de números 1 a 3.

Graus	Sen	Cos	Tg
56	0,83	0,56	1,48
57	0,84	0,55	1,54
58	0,85	0,53	1,60
59	0,86	0,52	1,66
60	0,87	0,50	1,73

Sabendo que E é o ponto médio do lado AB, assi... valor do cosseno do ângulo CDE.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) **(FUVEST)** No quadrilátero ABCD, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são retos, $AB = AD = 1$, $BC = CD = 2$ e BD é uma diagonal. O cosseno do ângulo $B\hat{C}D$ vale

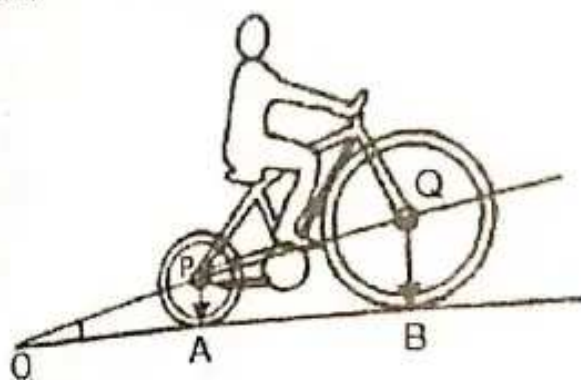
a) $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

b) $\frac{2}{5}$.

c) $\frac{3}{5}$.

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

e) $\frac{4}{5}$.

7) **(UERJ)** Observe a bicicleta e a tabela trigonométrica.

Ângulo (em graus)	Seno	Cosseno	Tangente
10	0,174	0,985	0,176
11	0,191	0,982	0,194
12	0,208	0,978	0,213
13	0,225	0,974	0,231
14	0,242	0,970	0,249

Os centros das rodas estão a uma distância PQ igual a 120 cm e os raios PA e QB medem, respectivamente, 25 cm e 52 cm.

De acordo com a tabela, o ângulo $A\hat{O}P$ tem o seguinte valor:

a) 10°
b) 12°
c) 13°
d) 14°

8) **(ENEM)** As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indi...

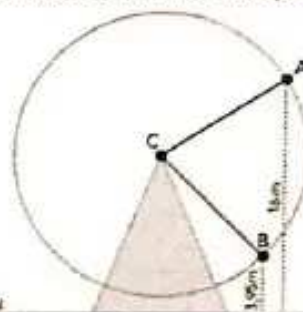
Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

a) menor que 100 m².
b) entre 100 m² e 300 m².
c) entre 300 m² e 500 m².
d) entre 500 m² e 700 m².
e) maior que 700 m².

9) **(UERJ)** Um foguete é lançado com velocidade igual a 180 m/s, e com um ângulo de inclinação de 60° em relação ao solo. Suponha que sua trajetória seja retilínea e sua velocidade se mantenha constante ao longo de todo o percurso. Após cinco segundos, o foguete se encontra a uma altura de x metros, exatamente acima de um ponto no solo, a y metros do lançamento.

Os valores de x e y são, respectivamente:

a) 90 e $90\sqrt{3}$
b) $90\sqrt{3}$ e 90
c) 450 e $450\sqrt{3}$
d) $450\sqrt{3}$ e 450

10) **(UERJ)** O raio de uma roda gigante de centro C mede $\overline{CA} = \overline{CB} = 10$ m. Do centro C ao plano horizontal do chão, há uma distância de 11 m. Os pontos A e B, situados no mesmo plano vertical, $A\hat{C}B$, pertencem à circunferência dessa roda e distam, respectivamente, 16 m e 3,95 m do plano do chão. Observe o esquema e a tabela:

θ (graus)	sen θ
15°	0,259
30°	0,500
45°	0,707
60°	0,866

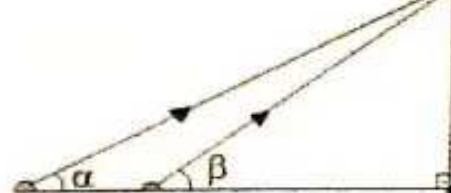
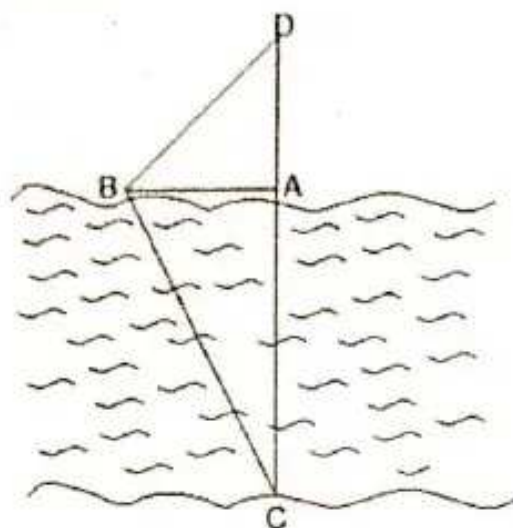
A medida, em graus, mais próxima do menor ângulo $A\hat{C}B$ corresponde a:

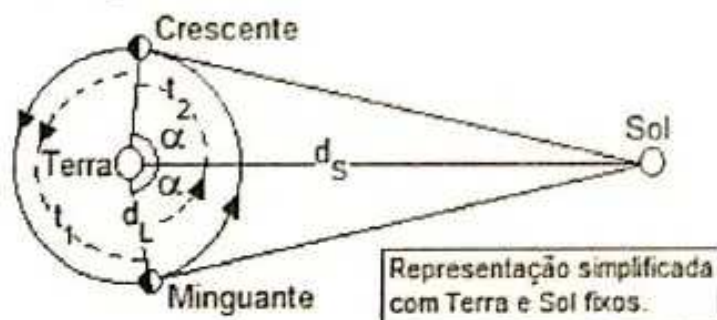
a) 45
b) 60
c) 75
d) 105

11) **(FUVEST)** Para se calcular a altura de uma torre, utilizou-se o seguinte procedimento ilustrado na figura: um aparelho (de altura desprezível) foi colocado no solo, a certa distância da torre, e emitiu um raio em direção ao ponto mais alto da torre. O ângulo determinado entre o raio e o solo foi de $\alpha = \frac{\pi}{3}$ radianos. A seguir, o aparelho foi deslocado 4 metros em direção à torre e o ângulo então foi obtido de β radianos, com $\text{tg}\,\beta = 3\sqrt{3}$.

É correto afirmar que a altura da torre, em metros, é

...indicada na figura pelo segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

a) $4\sqrt{3}$.
b) $5\sqrt{3}$.
c) $6\sqrt{3}$.
d) $7\sqrt{3}$.
e) $8\sqrt{3}$.

12) **(UNICAMP)** Para medir a largura AC de um rio, um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto B de onde podia ver na margem oposta o coqueiro C, de forma que o ângulo $A\hat{B}C$ fosse 60°; determinou o ponto D do prolongamento CA de forma que o ângulo $C\hat{B}D$ fosse de 90°. Medindo AD = 40 metros, achou a largura do rio.

Determine essa largura.

13) **(FUVEST)** Quando a lua está em quarto crescente ou quarto minguante, o triângulo formado pela Terra, pelo Sol e pela Lua é retângulo, com a Lua no vértice do ângulo reto. O astrônomo grego Aristarco, do século III a.C., usou este fato para obter um valor aproximado da razão entre as distâncias da Terra à Lua, d_L, e da Terra ao Sol, d_S.

É possível estimar a medição do ângulo α, relativo ao vértice da Terra, nessas duas fases, a partir da observação de que o tempo t_1, decorrido de uma lua quarto crescente a uma lua quarto minguante, é um pouco maior do que o tempo t_2, decorrido de uma lua quarto minguante a uma lua quarto crescente. Supondo que a Lua descreva em torno da Terra um movimento circular uniforme, tomando t_1 = 14,9 dias e t_2 = 14,8 dias, conclui-se que a razão d_L/d_S seria aproximadamente dada por

a) cos 77,7°
b) cos 80,7°
c) cos 83,7°
d) cos 86,7°
e) cos 89,7°

14) **(FUVEST)** O paralelepípedo retângulo ABCDEFGH,

O seno do ângulo $H\hat{A}F$, é igual a

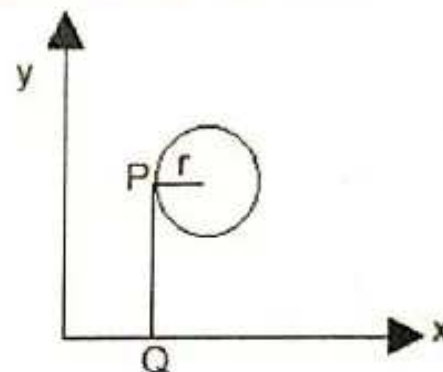
a) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

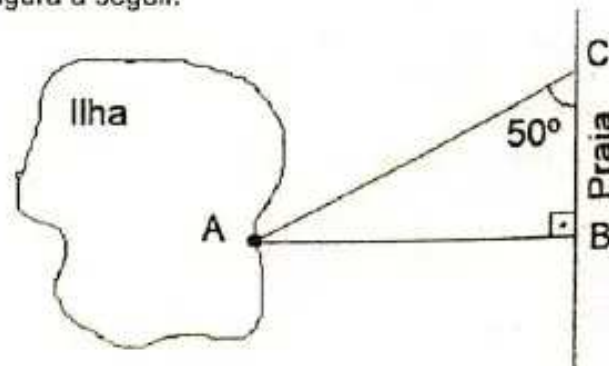
c) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

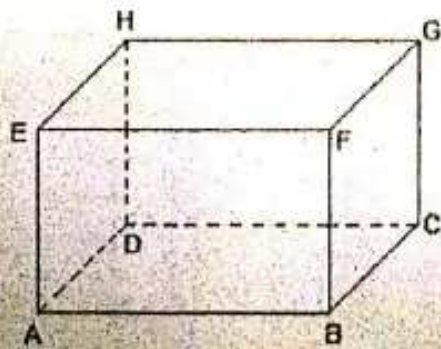
e) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

15) **(ENEM)** Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.

Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por

a) r(1 – sen d/r).
b) r(1 – cos d/r).
c) r(1 – tg d/r).
d) r sen (r/d).
e) r cos (r/d).

16) Em um trecho reto e plano de uma praia, um topógrafo encontra-se em uma rocha (ponto B) e observa uma árvore à beira de uma ilha (ponto A), como mostra a figura a seguir.

Para estimar a distância entre essa ilha e a praia, ele usa um teodolito, instrumento para a medição de ângulos. Primeiramente, em B, ele mede um ângulo de 90° entre a praia e alinha de visão da árvore. Depois disso, ele sai do ponto B, desloca-se em linha reta 160 metros pela praia

representado na figura, tem medida dos lados AB = 4, BC = 2 e BF = 2.

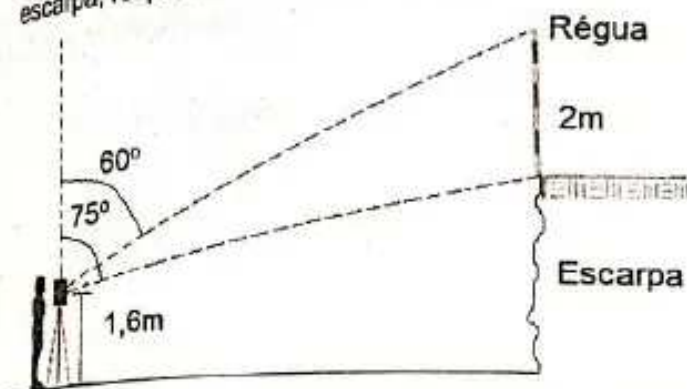
H G E F D C A B

e mede, de um ponto C, um ângulo de 50° também entre a praia e a linha de visão da árvore.

Considerando que essa parte da praia se situa no mesmo nível que a ilha, a distância da rocha (ponto B) até a árvore usada como referencial (ponto A) vale, em metros,

Dados: sen 50° = 0,76 e cos 50° = 0,64.

a) 250.
b) 230.
c) 210.
d) 190.
e) 170.

17) **(UNICAMP)** De uma praia, um topógrafo observa uma pequena escarpa sobre a qual foi colocada, na vertical, uma régua de 2 m de comprimento. Usando seu teodolito constatou que que o ângulo formado entre a reta vertical que passa pelo teodolito e o segmento de reta que une o teodolito ao topo da régua é de 60°, enquanto o ângulo formado entre a mesma reta vertical e o segmento que une o teodolito à base da régua é de 75°. Sabendo que o teodolito está a uma altura de 1,6 m do nível da base da escarpa, responda às questões a seguir.

Régua
2m
60°
75°
Escarpa
1,6m

a) Qual a distância horizontal entre a reta vertical que passa pelo teodolito e a régua sobre a escarpa?
b) Qual a altura da escarpa?

18) **(UERJ)** Um triângulo equilátero ABC (fig. 1) de papelão foi dobrado na sua altura AH. Apoia-se o papelão dobrado com os lados AB e AC sobre a mesa, de modo que o ângulo $B\hat{H}C$ tenha 60° (fig. 2).

C A H B

Fig. 1

H C θ A M B

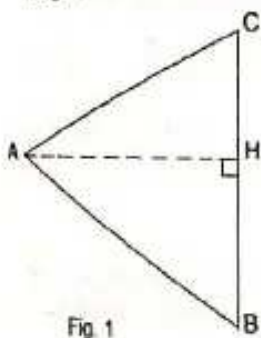
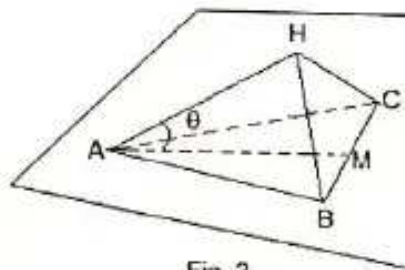



Fig. 2

A tangente do ângulo θ que AH faz com o plano da mesa é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{3}$

Gabarito

1) 5,1 m
2) 83
3) 99 m
4) d
5) b

13) e
14) e
15) b

Anotações

6) c
7) c
8) e
9) d
10) c
11) c
12) 120 m

16) d

17) a) $(3 + 2\sqrt{3})$m

b) $(1{,}6 + \sqrt{3})$m

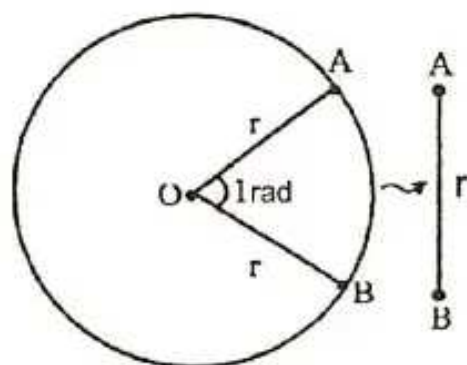
18) c

Capítulo V

ARCOS E ÂNGULOS

Da Geometria Plana sabemos que, em todo círculo, a cada ângulo central (vértice no centro) está associado um arco (fração da circunferência) cuja medida é igual à do ângulo considerado. Além disso devemos lembrar o sistema sexagesimal utilizado na medição de ângulos, cuja unidade padrão é o grau. Neste sistema, a circunferência equivale a 360°. Na Trigonometria, a medição de arcos e ângulos é normalmente feita utilizando-se um outro sistema, o qual analisaremos em seguida.

O Sistema Circular ou Radiométrico

A unidade padrão deste sistema é o Radiano (rad ou rd). Definimos o ângulo de 1 radiano como sendo o ângulo central que em um círculo qualquer subentende na circunferência um arco que tem o mesmo comprimento do raio do círculo utilizado.

O arco $\widehat{AB}$ retificado tem comprimento igual a r.

É sabido da Geometria Plana que o comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$. Assim, para determinarmos a quantos radianos equivale uma circunferência, devemos montar uma regra de três, pois, um arco de comprimento r está associado ao valor 1rad, logo a circunferência de comprimento $2\pi r$ está associada a x rad. Daí:

comprimento do arco		ângulo
r		1 rad
$2\pi r$		x rad
$x \cdot r = 2\pi r$	$\therefore$	$x = 2\pi$

Ou seja, a circunferência equivale a 2π rad.

Relação importante:

2π rad $\equiv$ 360°
ou
π rad $\equiv$ 180°

b) O ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad a quantos graus equivale?

Solução:

$$\frac{3}{4}\pi \text{ rad} = \frac{3}{4} \cdot 180° = 135°$$

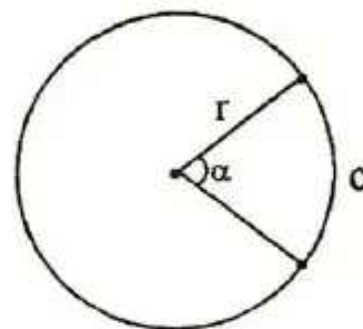
Comprimento de um arco

Consideremos agora um círculo de raio r no qual é marcado um arco de comprimento c associado a um ângulo central α dado em radianos. Mais uma vez a regra de três nos auxiliará a obter o comprimento deste arco:

Comprimento	ângulo
$2\pi r$	2π rad
c	$\hat{\alpha}$

$$2\pi \cdot c = \hat{\alpha} \cdot 2\pi r$$

$$c = \frac{\hat{\alpha} \cdot 2\pi r}{2\pi}$$

$$\boxed{c = \hat{\alpha} \cdot r}$$

Exemplo:

Determine o comprimento de um arco que, num círculo de raio 10 cm, mede 144°.

Solução:

Para aplicarmos a fórmula demonstrada acima, o ângulo deve ser dado em radianos. Vamos então convertê-lo:

180° —— π rad
144° —— x

$$x = \frac{144 \cdot \pi}{180} = \frac{4\pi}{5} \text{rad}$$

$$c = \alpha \cdot r$$

$$c = \frac{4\pi}{5} \cdot 10$$

$$\therefore$$

$$\boxed{c = 8\pi\text{cm}}$$

O Círculo Trigonométrico

Para o estudo das linhas trigonométricas utilizaremos o círculo trigonométrico que, por definição tem raio unitário (r = 1) e circunferência orientada. Na circunferência orientada, convencionou-se o ponto A como origem na marcação de arcos e a partir daí arbitrou-se o sentido anti-horário como positivo e o sentido horário como negativo.

Exemplos:

a) A quantos radianos equivale o ângulo de 150°?

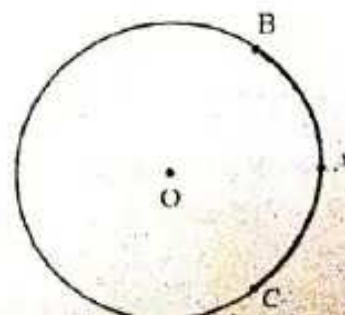
Solução:

180° – π rad

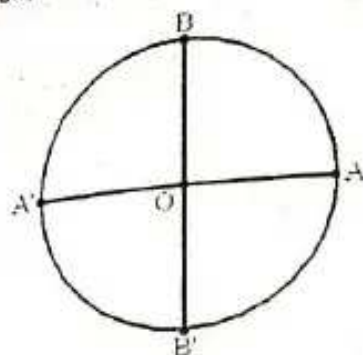
150° – x

$180 \cdot x = 150 \cdot \pi$

$x = \frac{150 \cdot \pi}{180} \quad \therefore \quad x = \frac{5\pi}{6}\text{rad}$

Exemplo:

$\widehat{AB} = +70°$
$\widehat{AC} = -30°$

Os Quadrantes

A partir da origem A dividimos a circunferência em quatro arcos congruentes, como mostra a figura:

Os diâmetros $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são perpendiculares e dividem o círculo trigonométrico em quatro quadrantes que são numerados, a partir de A, no sentido positivo da trigonometria:

1° quadrante → Setor AOB;
2° quadrante → Setor BOA';
3° quadrante → Setor A'OB';
4° quadrante → Setor B'OA.

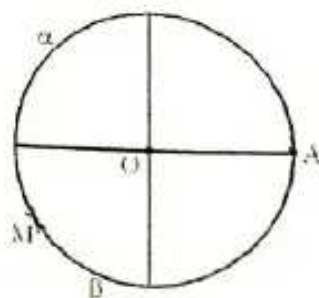
OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Os arcos com extremidades em A, B, A' ou B' são chamados de arcos quadrantais.

Arcos Côngruos

Dois arcos são côngruos quando possuem a mesma origem e a mesma extremidade, diferindo apenas no número de voltas inteiras dadas por eles.

Exemplo:

Se no círculo trigonométrico marcarmos os arcos α = 200° e β = -160°, observamos que eles têm a mesma origem e a mesma extremidade, logo são côngruos. Podemos constatar tal fato através da diferença entre eles 200° - (-160°) = 360° que é um número inteiro de voltas.

Conclusão:

Se α e β são dois arcos côngruos, então:

$\alpha - \beta = k \cdot 360°; k \in z$
ou
$\alpha - \beta = 2 \cdot k \cdot \pi; k \in z$

Assim um ...

c) $\frac{19\pi}{2}\text{rad}$ e $\frac{3\pi}{2}\text{rad} \rightarrow \frac{19\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 8\pi$ rad que é múltiplo de 2π, logo são côngruos.

Menor Determinação (MD)

Dado um arco x, sua menor determinação é o menor arco não negativo que é côngruo de x.

Exemplos:

A menor determinação do arco de 840° é 120°.
A menor determinação do arco de 2000° é 200°.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Quando um arco não negativo é menor que 360°, ele é sua própria menor determinação.

Exemplo:

A menor determinação de 130° é 130°.

Principal Determinação Negativa (PDN)

Dado um arco x, sua principal determinação negativa é o maior arco negativo que é côngruo de x.

Importante:

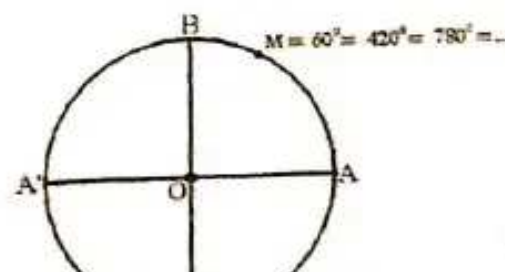
MD + |PDN| = 360°
ou
MD + |PDN| = 2π rad

Exemplo:

Dado o arco 910°, temos que:
MD (910°) = 190°
PDN = 190° - 360° = -170°

Expressão Geral

Na circunferência orientada, um ponto M qualquer é extremidade de uma infinidade de arcos côngruos. Como não podemos escrever todos esses arcos, vamos nos valer de uma expressão que determine todos os arcos que têm essa extremidade. Estamos falando da expressão geral. Tomemos como exemplo a família de arcos da figura abaixo, de extremidade M.

Podemos escrever todos os arcos dessa família, de uma forma semelhante, até um arco x genérico.

...um processo prático para verificarmos se dois arcos são côngruos é observarmos se a diferença entre eles é um múltiplo de 360°, se estivermos trabalhando com graus, ou um múltiplo de 2π no caso de usarmos radianos.

Exemplos:

Verifique se são côngruos os arcos.

a) 700° e -220° → 700° - (-220) = 920° não é múltiplo de 360°, logo não são côngruos.

b) 1700° e 980° → 1700° - 980° = 720° que é múltiplo de 360°, logo são côngruos.

B'

$60° = 0 \times 360° + 60°$
$420° = 1 \times 360° + 60°$
$780° = 2 \times 360° + 60°$
|
|
|
|
$x = k \times 360° + 60°, k \in Z$

Esta é a expressão geral dos arcos côngruos que têm extremidades em M. Nela, o k representa o número inteiro de voltas dadas pelo arco considerado.

Conclusão:

Expressão geral

$x = k \cdot 360° + MD; k \in Z$
ou
$x = 2k\pi + MD; k \in Z$

Exercícios

1) Transforme em graus os arcos:

a) $\frac{4\pi}{3}$ rad

b) $\frac{7\pi}{6}$ rad

c) $\frac{43\pi}{12}$ rad

2) Transforme em radianos os arcos:

a) 225°
b) 144°
c) 330°

3) Quanto mede um arco que, em um círculo de diâmetro 24 m, equivale a $\frac{5\pi}{4}$ rad?

4) Determine a medida de um arco subtendido por um ângulo central de 210°, em um círculo de raio 18 cm.

5) Determine a medida de um arco que, em um círculo de raio 6 cm, equivale a 10π cm.

6) Determine a medida do raio de um círculo em que um arco de 15π m equivale a $\frac{5\pi}{3}$ rad.

7) Calcule a menor determinação de cada um dos arcos a seguir.

a) 1 500°
b) 2 160°
c) 210°
d) $\frac{17\pi}{3}$ rad
e) $\frac{59\pi}{5}$ rad
f) -1 300°

8) Dê as expressões gerais dos arcos côngruos a:

a) 2 000°
b) -840°

a)

b)

c)

d)

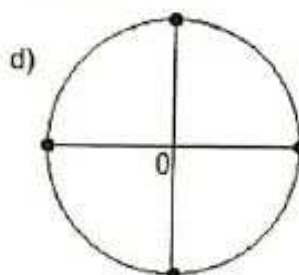
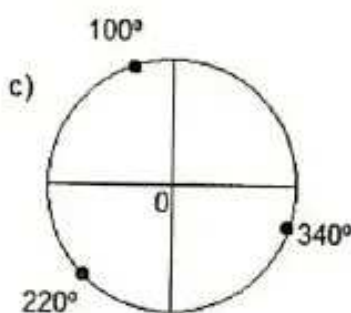
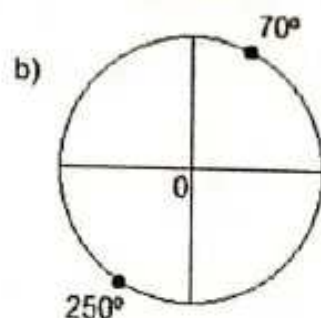
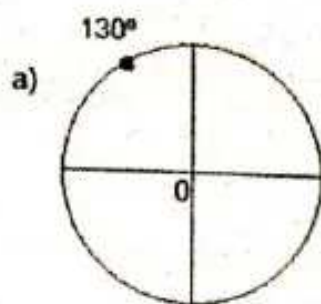
10) Verifique se os pares de arcos a seguir são côngruos.

a) 1 010° e 290°
b) 2 220° e 600°
c) $\frac{35\pi}{4}$ rad e $\frac{7\pi}{4}$ rad
d) $\frac{83\pi}{4}$ rad e $\frac{59\pi}{4}$ rad

11) Os arcos de medidas, em graus, $4x - 20°$ e $x + 40°$ são côngruos. Determine x.

12) Em que quadrantes encontram-se as extremidades dos arcos da forma $k.180° + (-1)^k.110°$, $k \in N$?

13) **(FUVEST)** ABCDEF são os vértices de um hexágono regular, inscrito no círculo trigonométrico, com A na origem dos arcos e B, C, D, E e F em sentido anti-horário. Citar o(s) ponto(s) correspondente(s) aos números s seguir, com $k \in Z$:

a) $k2\pi$
b) $k\pi$
c) $\frac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $\frac{36\pi}{7}$ rad

d) $-\frac{29\pi}{6}$ rad

e) 27π rad

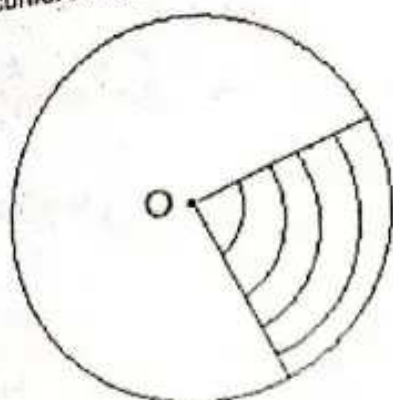
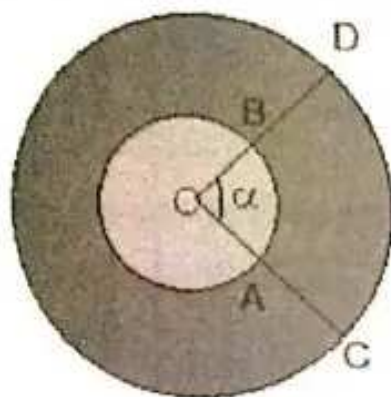
9) Determine a expressão geral dos arcos assinalados em cada um dos seguintes itens.

d) $\frac{\pi}{3} + k\pi$

e) $-\frac{\pi}{3} + k\pi$

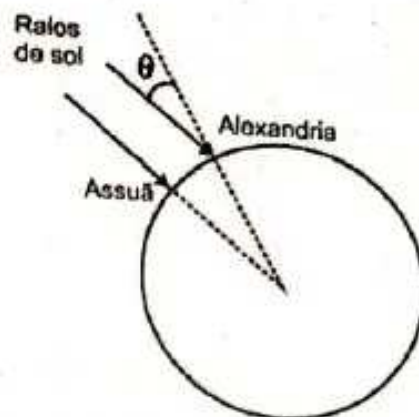
f) $-\frac{\pi}{3} + k2\pi$

g) $\frac{k\pi}{3}$

14) A circunferência abaixo mostra cinco arcos de circunferências concêntricas, igualmente espaçadas entre si, que dividem o raio da circunferência em cinco segmentos congruentes. Sabendo-se que a soma dos comprimentos desses arcos é igual ao comprimento da circunferência maior, determine a medida do ângulo central comum a todas as circunferências.

15) (PUC) Na figura, $\alpha = 1,5$ rad, $\overline{AC} = 1,5$ e o comprimento do arco AB é 3. Qual é a medida do arco CD ?

a) 1,33
b) 4,50
c) 5,25
d) 6,50
e) 7,25

16) (ENEM) As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6 370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente

a) 16 horas.
b) 20 horas.
c) 25 horas.
d) 32 horas.
e) 36 horas.

17) (FUVEST) Uma das primeiras estimativas de raio da Terra é atribuída a Eratóstenes, estudioso grego que viveu, aproximadamente, entre 275 a.C. e 195 a.C.. Sabendo que Assuã, cidade localizada ao sul do Egito, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical não apresentava sombra, Eratóstenes decidiu investigar o que ocorreria, nas mesmas condições, em Alexandria, cidade ao norte do Egito. O estudioso observou ... 900 km ...

O mês em que foram realizadas as observações e o valor de θ, considerando a aproximação 3 para π, são

a) junho; 7°.
b) junho; 23°.
c) junho; 0,3°.
d) dezembro; 7°.
e) dezembro; 23°.

Gabarito

1)
a) 240°
b) 210°
c) 645°

2)
a) $\frac{5\pi}{4}$ rad
b) $\frac{4\pi}{5}$ rad
c) $\frac{11\pi}{6}$ rad

3) 15π m

4) 21π cm

5) $\frac{5\pi}{3}$ rad

6) 9 m

7)
a) 60°
b) 0°
c) 210°
d) $\frac{5\pi}{3}$ rad
e) $\frac{9\pi}{5}$ rad
f) 140°

8)
a) $x = k \cdot 360° + 200°$; $k \in Z$
b) $x = k \cdot 360° + 240°$; $k \in Z$

10)
a) Sim
b) Não
c) Não
d) Sim

11) $x = k \cdot 120° + 20°$; $k \in Z$

12) 1° ou 2°

13)
a) A
b) A e D
c) B
d) B e E
e) C e F
f) F
g) A, B, C, D, E e F

14) 120°

15) c

16) c

17) a

...observou que, em Alexandria, distante ... de Assuã, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical apresentava sombra e determinou o ângulo θ entre as direções do bastão e de incidência dos raios do sol. O valor do raio da Terra, obtido a partir de θ e da distância entre Alexandria e Assuã foi, de aproximadamente, 7 500km.

c) $x = 2k\pi + \frac{8\pi}{7}$; $k \in Z$

d) $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$; $k \in Z$

e) $x = 2k\pi + \pi$; $k \in Z$

9)
a) $x = k \cdot 360° + 130°$; $k \in Z$
b) $x = k \cdot 180° + 70°$; $k \in Z$
c) $x = k \cdot 120° + 100°$; $k \in Z$
d) $x = k \cdot 90°$; $k \in Z$

Capítulo VI

AS LINHAS TRIGONOMÉTRICAS

Razões Trigonométricas no Círculo

Passamos agora a avaliar as linhas trigonométricas. Cabe esclarecer que o estudo das funções trigonométricas será feito em um capítulo posterior quando então gráficos, domínios, períodos, etc. serão destacados.

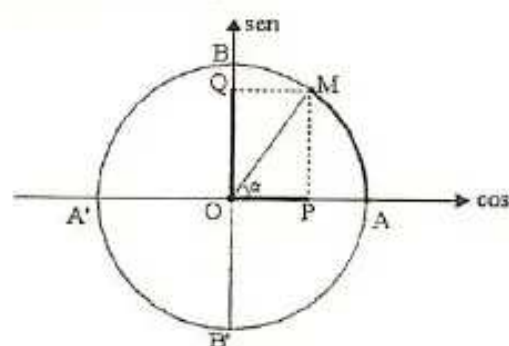
Começamos posicionando um sistema de eixos coordenados com origem coincidente com o centro do círculo trigonométrico e cujos eixos contêm os diâmetros $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$. Consideremos agora um arco $\widehat{AM} = \alpha$. Pela definição das linhas trigonométricas:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}}$$

Como $\overline{PM} = \overline{OQ}$ e $\overline{OM} = 1$ (raio)

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha = \overline{OQ}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{CATETO ADJACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} \rightarrow \boxed{\cos\alpha = \overline{OP}}$$

Daí, o eixo horizontal será o eixo dos cossenos enquanto o vertical será o eixo dos senos.

Na figura que se segue, no triângulo OAT, temos que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{CATETO ADJACENTE}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} \rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha = \overline{AT}}$$

Então o eixo paralelo ao eixo dos senos que tangencia a circunferência em A é o eixo das tangentes, tendo tal ponto como origem.

Para a marcação da secante não existe eixo específico. Para tal, vamos nos valer do eixo das tangentes. Ainda no triângulo OAT:

$$\sec\alpha = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO ADJACENTE}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \rightarrow \boxed{\sec\alpha = \overline{OT}}$$

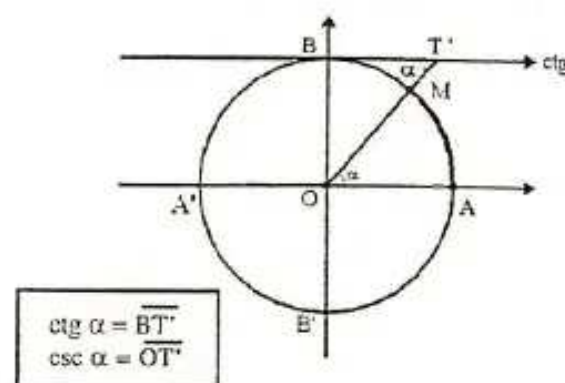
Concluímos que a secante é a distância do centro do círculo

A seguir observamos que os ângulos $O\hat{T}'B$ e $A\hat{O}T'$ são congruentes (alternos internos). Então, no triângulo OBT':

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\text{CATETO ADJACENTE}}{\text{CATETO OPOSTO}} = \frac{\overline{BT'}}{\overline{OB}} \rightarrow \boxed{\text{ctg}\,\alpha = \overline{BT'}}$$

Podemos concluir que o eixo paralelo ao eixo dos cossenos, tangentes à circunferência em B e que tem este ponto como origem é o eixo das cotangentes. Utilizando ainda o triângulo OBT'.

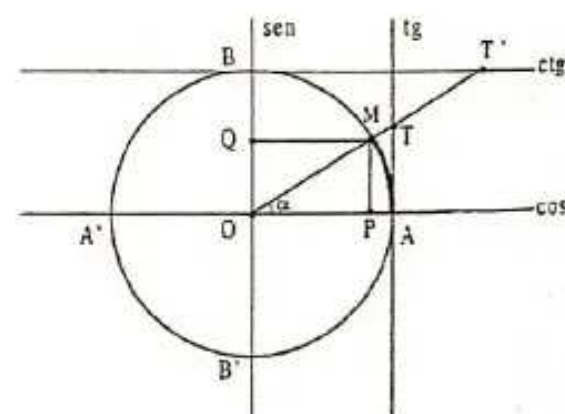
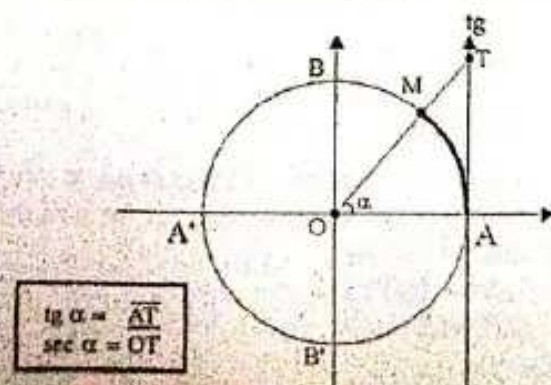
$$\csc\alpha = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO OPOSTO}} = \frac{\overline{OT'}}{\overline{OB}} \rightarrow \boxed{\csc\alpha = \overline{OT'}}$$

Observamos que a cossecante é a distância do centro do círculo até o ponto de encontro com o eixo das cotangentes. Assim como no caso da secante, a cossecante também não dispõe de eixo específico para a marcação, se valendo, como foi visto anteriormente, do eixo das cotangentes. O sinal da cossecante será analisado posteriormente.

As Relações Trigonométricas

Para demonstrarmos as relações trigonométricas vamos lançar mão do círculo trigonométrico no qual marcaremos simultaneamente seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, como mostramos a seguir:

$\text{sen}\,\alpha = \overline{OQ}$ $\quad\cos\alpha = \overline{OP}$

$\text{tg}\,\alpha = \overline{AT}$ $\quad\text{ctg}\,\alpha = \overline{BT'}$

$\sec\alpha = \overline{OT}$ $\quad\csc\alpha = \overline{OT'}$

até o ponto de encontro com o eixo das tangentes. O sinal da secante será analisado posteriormente.

1. Relação Fundamental

Apliquemos o teorema de Pitágoras no triângulo OMP:

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2$$

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

NOTA: Como OPMQ é um retângulo $\overline{PM} = \overline{OQ} = sen\alpha$ e OM é raio logo vale 1.

2. Como △ OAT ~ △ OPM, temos:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \rightarrow \frac{tg\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \rightarrow \boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}$$

3. Como △ OBT' ~ △ OQM, temos:

$$\frac{\overline{BT'}}{\overline{QM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OQ}} \rightarrow \frac{ctg\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{sen\alpha} \rightarrow \boxed{ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}}$$

Corolário: $ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$

4. Como △ OAT ~ △ OPM, temos:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \rightarrow \frac{\sec\alpha}{1} = \frac{1}{\cos\alpha} \rightarrow \boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$

5. Como △ OBT' ~ △ OQM, temos:

$$\frac{\overline{OT'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OQ}} \rightarrow \frac{\csc\alpha}{1} = \frac{1}{sen\alpha} \rightarrow \boxed{\csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha}}$$

6. Aplicando o teorema de Pitágoras no △ OAT:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2$$

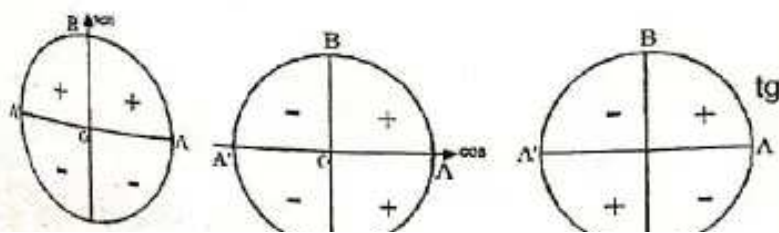
$$\boxed{\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha}$$

7. Aplicando o teorema de Pitágoras no △ OBT':

$$\overline{OT'}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BT'}^2$$

$$\boxed{\csc^2\alpha = 1 + ctg^2\alpha}$$

Os Sinais das Linhas Trigonométricas

Devemos lembrar que o inverso de $+\frac{3}{2}$ é $+\frac{2}{3}$ e o inverso de $-\frac{3}{5}$ é $\frac{-5}{3}$, ou seja, dois números inversos têm o mesmo sinal. Assim seno e cossecante têm a mesma variação de sinal, o mesmo ocorrendo com o cosseno e secante também com tangente e cotangente.

Linhas Trigonométricas dos Arcos Quadrantais

	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	–1
cos	1	0	-1	0
tg	0	∄	0	∄

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Os valores máximo e mínimo do seno e cosseno são respectivamente 1 e -1.

Exercícios

1) Determine o valor da expressão E = 2.sen 450° – 3.cos 900° + tg 1080°+ 4.csc 990°.

2) **(PUC)** O valor de $\frac{\cos 60° + tg45°}{sen90°}$ é:

a) $\frac{3}{2}$
b) 2
c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
e) 0

3) **(PUC)** Assinale a alternativa correta:

a) cos(2000°) < 0
b) sen(2000°) > 0
c) sen(2000°) = cos(2000°)
d) sen(2000°) = –sen(2000°)
e) sen(2000°) = –cos(2000°)

4) **(PUC)** Se tg θ = 1 e θ pertence ao primeiro quadrante, então cos θ é igual a:

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) 1

5) **(FUVEST)** Dentre os números a seguir, o mais próximo de sen 50° é:

a) 0,2
b) 0,4

	1°Q	2°Q	3°Q	4°Q
sen e csc	+	+	–	–
cos e sec	+	–	–	+
tg e ctg	+	–	+	–

c) 0,6
d) 0,8
e) 1,0

6) Determine o intervalo de variação de cada uma das expressões abaixo.

a) $\frac{3\text{sen}x + 5}{4}$

b) $\frac{2 - 4\cos x}{3}$

c) $4 - \cos^2 x$

7) Determine o valor positivo de k que satisfaz simultaneamente às condições estabelecidas em cada um dos itens a seguir.

a) $\text{sen}\, x = 4k$ e $\cos x = 1 - 2k$

b) $\csc x = 3k + 1$ e $\text{ctg}\, x = \sqrt{16 - k^2}$

8) Sabendo que x e um arco do 4° quadrante e que cos x = 4/5, determine:

a) sen x
b) tg x
c) ctg x
d) sec x
e) csc x

9) Dado o arco x do 2° quadrante, cuja cossecante vale 17/15, determine os valores de:

a) sen x
b) cos x
c) tg x
d) ctg x
e) sec x

10) Sabendo que $x = \frac{\pi}{6}$ rad, determine o valor da expressão

$$y = \frac{(\sec x)\cdot(\text{sen}3x) - \csc(9x)}{2\cos(2x) + \text{tg}\left(\frac{3x}{2}\right)}.$$

11) Verifique que as igualdades abaixo são identidades.

a) $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \,.\, \csc^2 x$

b) $\frac{2 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x + 2$

c) $\text{tg}\, x \,.\, \text{sen}\, x = \sec x - \cos x$

d) $(\text{tg}\, x + 1).(1 - \text{tg}\, x) = 2 - \sec^2 x$

12) **(FUVEST)** O menor valor de $\frac{1}{3 - \cos x}$, com x real, é:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 1
e) 3

13) **(ENEM)** A quantidade de certa espécie de crustáceos, medida em toneladas, presente num trecho de mangue, foi modelada pela equação

$$Q(t) = \frac{600}{6 + 4\text{sen}(wt)},$$

onde t representa o número de meses transcorridos após o início de estudo e w é uma constante.

O máximo e o mínimo de toneladas observadas durante...

14) **(ENEM)** Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro.
b) abril.
c) junho.
d) julho.
e) outubro.

15) **(ENEM)** Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($0 < h < 24$) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) A = 18 e B = 8
b) A = 22 e B = -4
c) A = 22 e B = 4
d) A = 26 e B = -8
e) A = 26 e B = 8

16) **(FUVEST)** Uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida a temperatura constante, e seu volume varia com o tempo de acordo com a fórmula $V(t) = \log_2^{[5+2\text{sen}(\pi t)]}$, $0 \le t \le 2$, em que t é medido em horas e V(t) é medido em m^3. A pressão máxima do gás no intervalo de tempo [0, 2] ocorre no instante

a) t = 0,4
b) t = 0,5
c) t = 1
d) t = 1,5
e) t = 2

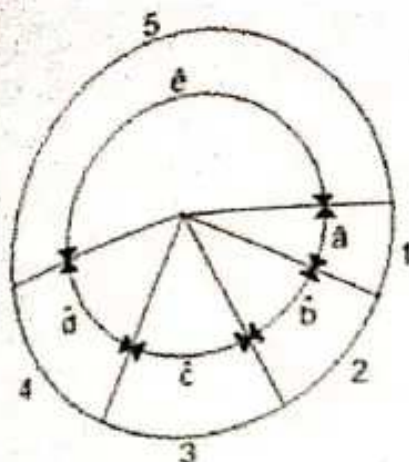
17) Em certo país, uma pequena porcentagem da arrecadação

... de toneladas observados durante este estudo são, respectivamente,

a) 600 e 100.
b) 600 e 150.
c) 300 e 100.
d) 300 e 60.
e) 100 e 60.

das loterias destina-se aos esportes.

O gráfico de setores a seguir representa a distribuição dessa verba, segundo os dados da tabela seguinte.

Setor	Destinação	Valor (R$)
1	Projetos de fomento	3 240 000,00
2	Esporte universitário	4 590 000,00
3	Esporte escolar	6 750 000,00
4	Manutenção do Comitê Olímpico	9 180 000,00
5	Confederações	30 240 000,00
Total		54 000 000,00

Quanto aos ângulos assinalados no diagrama, é verdade que

a) $\frac{1}{2} < \text{sen}\, a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos b < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} < \text{tg}\, c < 1$.

d) $\frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen}\, d < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $1 < \text{tg}\, e < 2$.

18) **(PUC)** Sabendo que $\cos(3x) = -1$, quais são os possíveis valores para $\cos(x)$?

a) $\frac{1}{2}$ e -1

b) $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}$ e 1

d) -1 e 5

e) 0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19) **(FUVEST)** O dobro do seno de um ângulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, o valor de seu cosseno é:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sqrt{\frac{3}{7}}$

d) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

21) Determine os valores de m para que as igualdades $\text{cotg}\, x = \sqrt{m+1}$ e $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{m^3 + 2m^2 + m + 1}}{m+2}$ sejam verificadas simultaneamente.

22) Considere a função $S(x) = 1 + 2\text{sen}\, x + 4\text{sen}^2 x + 8\text{sen}^3 x$, para $x \in R$.

a) Calcule $S(\frac{\pi}{3})$.

b) Resolva a equação $S(x) = 0$, para $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

23) **(PUC)** Os ângulos (em graus) θ entre 0° e 360° para os quais $\text{sen}\, \theta = \cos \theta$ são:

a) 45° e 90°
b) 45° e 225°
c) 180° e 360°
d) 45°, 90° e 180°
e) 90°, 180° e 270°

24) **(PUC)** A equação $\text{tg}(x) = \cos(x)$ tem, para x no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, uma raiz $x = \theta$ sobre a qual podemos dizer que:

a) $\theta = \frac{\pi}{4}$

b) $\text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{sen}(\theta) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

d) $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

e) $\theta = \frac{\pi}{3}$

25) Determine $0 \le \theta \le 2\pi$, sabendo que a equação $x^2 - 2x\cos\theta + \text{sen}^2\theta = 0$ possui raízes reais iguais.

26) Resolva a inequação $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \le 0$, considerando que $0 \le x < 2\pi$.

Gabarito

20) (FUVEST) Se α está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz $sen^4\alpha - cos^4\alpha = \frac{1}{4}$, então o valor da tangente de α é:

a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

1) 1
2) a
3) a
4) c
5) d
6)
a) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
b) $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$
c) $[3, 4]$
7)
a) $\frac{1}{5}$
b) 1
8)
a) $\frac{-3}{5}$
b) $\frac{-3}{4}$

c) $\frac{-4}{3}$
d) $\frac{5}{4}$
e) $\frac{-5}{3}$
9)
a) $\frac{15}{17}$
b) $\frac{-8}{17}$
c) $\frac{-15}{8}$
d) $\frac{-8}{15}$
e) $\frac{-17}{8}$
10) $\frac{2\sqrt{3}+3}{6}$
11) Aplicação das relações trigonométricas.
12) b
13) d
14) d
15) b
16) d
17) b
18) a
19) b
20) b
21) -1 ou $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
22)
a) $4(1+\sqrt{3})$
b) $S = \left\{\frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
23) b
24) c
25) $\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
26) $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} \le x < 2\pi$

Anotações

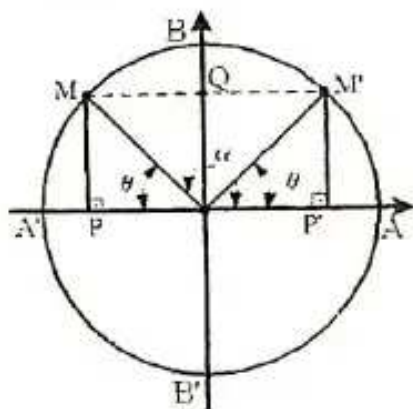
Capítulo VII

REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

No estudo da trigonometria, em algumas ocasiões, necessitamos dos valores das linhas trigonométricas de arcos do 2º, 3º ou 4º quadrantes. Seria um trabalho muito árduo sabermos de cor as linhas trigonométricas de arcos dos quatro quadrantes. Assim, sabendo apenas os valores das linhas de arcos do 1º quadrante, podemos determinar os valores das linhas de arcos de outros quadrantes, como mostraremos a seguir.

Redução do 2º Para o 1º Quadrante

Consideremos um arco $\widehat{AM}$ do 2º quadrante de medida α. Traçando-se uma paralela ao eixo horizontal, partindo de M, obtemos o ponto M' no 1º quadrante, extremidade do arco $\widehat{AM'}$ de medida θ.

Devido ao paralelismo de $\overline{MM'}$ e $\overline{A'A}$, os arcos $\widehat{MA'}$ e $\widehat{AM'}$ são congruentes, e em consequência disto $M\hat{O}P = M'\hat{O}P' = \theta$. Então como os triângulos OMP e OM'P' são retângulos com ângulos e hipotenusas respectivamente congruentes, então eles são congruentes. Pelas definições das linhas trigonométricas:

$\text{sen}\,\alpha = \overline{OQ} = \text{sen}\,\theta$

$\cos\alpha = \overline{OP}$, $\cos\theta = \overline{OP'}$ ⟩ $\cos\alpha = -\cos\theta$

Pela figura anterior, observamos que:

$\alpha + \theta = 180°$

$\theta = 180° - \alpha$

Então:

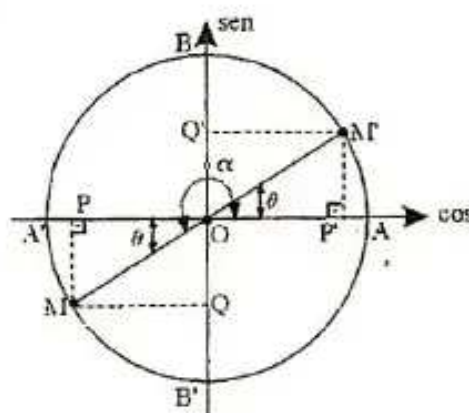
$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(180° - \alpha)$ (I)

$\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ (II)

Dividindo ...

Redução do 3º Para o 1º Quadrante

Consideremos um arco $\widehat{AM}$ de medida α do 3º quadrante. O segmento que parte de M e passa pelo centro intercepta a circunferência em M', extremidade do arco $\widehat{AM'}$ de medida θ. Os ângulos $M'\hat{O}P'$ e $P\hat{O}M$ são opostos pelo vértice, logo são congruentes. Daí, os triângulos POM e M'OP' são congruentes pois têm os mesmos ângulos e hipotenusas congruentes.

Assim:

$\text{sen}\,\alpha = \overline{OQ} = \overline{PM}$, $\text{sen}\,\theta = \overline{OQ'} = \overline{P'M'}$ ⟩ $\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,\theta$

$\cos\alpha = \overline{OP}$, $\cos\theta = \overline{OP'}$ ⟩ $\cos\alpha = -\cos\theta$

Como:

$\alpha - \theta = 180°$

$\theta = \alpha - 180°$

Logo:

$\text{sen}\alpha = -\text{sen}(\alpha - 180)$

$\cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°)$

$\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha - 180°)$

$\text{ctg}\alpha = \text{ctg}(\alpha - 180°)$

$\sec\alpha = -\sec(\alpha - 180°)$

$\csc\alpha = -\csc(\alpha - 180°)$

Redução do 4º Para o 1º Quadrante

Consideremos um arco $\widehat{AM}$ de medida α do 4º quadrante. Pelo ponto M suspendemos uma perpendicular ao diâmetro $\overline{AA'}$ que intercepta a circunferência em M', extremidade de $\widehat{AM'}$ arco do 1º quadrante, de medida θ. O triângulo OMM' é isósceles ($\overline{OM} = \overline{OM'}$) de altura principal $\overline{OP}$. Como a altura principal de um triângulo isósceles é simultaneamente bissetriz, concluímos que $M'\hat{O}P = P\hat{O}M = \theta$.

Assim os triângulos MOP e POM' são congruentes pois ...

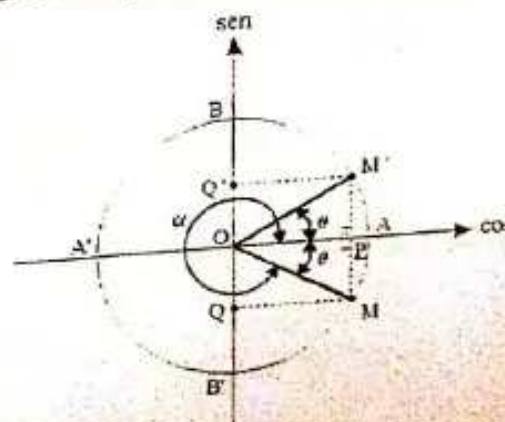
...do-se (I) por (II):
$\text{tg}\,\alpha = -\,\text{tg}(180° - \alpha)$

Dividindo-se (II) por (I):
$\text{ctg}\alpha = -\,\text{ctg}(180° - \alpha)$

Invertendo-se (II):
$\sec\alpha = -\sec(180° - \alpha)$

Invertendo-se (I):
$\csc\alpha = \csc(180° - \alpha)$

têm os ângulos e hipotenusas respectivamente congruentes.

Então:

$\text{sen}\alpha = \overline{OQ}$

$\text{sen}\theta = \overline{OQ'}$

$\text{sen}\alpha = -\text{sen}\,\theta$

$\cos\alpha = \overline{OP} = \cos\theta$

Como:
$\alpha + \theta = 360°$
$\theta = 360° - \alpha$

Daí:
$\text{sen}\alpha = -\,\text{sen}(360° - \alpha)$
$\cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$
$\text{tg}\alpha = -\,\text{tg}(360° - \alpha)$
$\text{ctg}\alpha = -\,\text{ctg}(360° - \alpha)$
$\sec\alpha = \sec(360° - \alpha)$
$\csc\alpha = -\csc(360° - \alpha)$

Exercícios

1) Determine os valores das linhas :

a) sen 210°
b) cos 135°
c) tg 300°
d) cos 840°
e) ctg 585°
f) sec 1 680°

2) Determine o valor numérico da expressão:

$$y = \frac{\cos 150° \,.\, \text{tg}\,765°}{\csc 690° \,.\, \text{sen}(-90°)}$$

3) Determine o valor de $\cos\frac{199\pi}{4} + \text{tg}\frac{29\pi}{3}$

4) Simplifique as expressões:

a) $\cos(180° - x) - 5\ \text{sen}(270° + x) + 4\cos(180° + x)$

b) $\dfrac{\text{sen}(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\pi + x)\,.\,\text{tg}(2\pi - x)}$

c) $\dfrac{\cos(2\pi - x)\,.\,\cos(\pi - x)}{\text{sen}(\pi + x)\,.\,\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)}$

5) Sendo $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{5}}{7}$ determine o valor da expressão $\text{sen}(13\pi + x) - \text{sen}(32\pi - x)$:

8) Se simplificarmos a expressão

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\text{tg}(\pi-\beta)}{\sec\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\text{sen}(\pi-\beta)\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$$, obteremos:

a) $\text{sen}\beta$
b) $\text{tg}\beta$
c) $\cos\beta$
d) $-\cos\beta$
e) $-\text{sen}\beta$

9) **(FUVEST)** Se α é um ângulo tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\,\alpha = a$, então $\text{tg}(\pi - \alpha)$ é igual a:

a) $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
b) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
c) $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
d) $-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
e) $-\frac{1+a^2}{a}$

10) O valor numérico da expressão

$$\frac{\text{sen}\frac{\pi}{4} + \cos 240° - [\text{tg}(-750°)]^2}{(\sec 1200°)(\text{cossec}\frac{9\pi}{4}) + (\text{cotg}\frac{5\pi}{6})^2}$$ é:

a) $\frac{3+\sqrt{2}}{6}$
b) $-\frac{3+\sqrt{2}}{6}$
c) $\frac{3-\sqrt{2}}{6}$
d) $-\frac{3-\sqrt{2}}{6}$
e) 0

11) **(CEFET)** O valor da expressão: $\dfrac{\text{sen}^2 35° + \text{sen}^2 45° + \text{sen}^2 55°}{\sec^2 780°}$

a) $\frac{3}{8}$
b) $2 + \frac{\sqrt{2}}{4}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $2 + \sqrt{2}$
e) $\frac{3}{2}$

12) O menor valor real é positivo de x tal que $4^{\text{sen}\,x} = 1/2$ é:

a) π
b) 3π/2
c) 5π/3
d) 3π/4
e) 7π/6

13) As medidas dos ângulos A, B, C, e D de um quadrilátero convexo estão em progressão aritmética. Sabendo-se que o menor ângulo é A = 30°.

a) encontre o maior ângulo;

b) calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{\text{sen}3A + \cos 2A + \sec 8A}{1 + \text{tg}\frac{3A}{2}}$$

sen 2460° ... cos 1110°

6) Sendo dado que $M = \frac{sen 2460° . cos 1110°}{tg 2205°}$, M é igual a:

a) $\frac{-3\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{-3}{8}$ c) $\frac{-1}{8}$ d) zero e) $\frac{-3}{4}$

7) **(PUC)** O valor de $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ é:

a) sen α
b) - sen α
c) cos α
d) - cos α
e) cos α -1

Gabarito

1) a) $\frac{-1}{2}$
b) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
c) $-\sqrt{3}$
d) $\frac{-1}{2}$
e) 1
f) -2

2) $\frac{-\sqrt{3}}{4}$

3) $\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$

4) a) 0
b) 2
c) ctg x

5) 0

284

6) e
7) a
8) c
9) a
10) b
11) a
12) e
13) a) 150°
b) -1/4

Gabarito

Capítulo VIII

FÓRMULAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

A seguir vamos enumerar fórmulas importantes na resolução de uma série de exercícios:

Seno da soma e diferença de arcos

sen (a + b) = sen a . cos b + sen b . cos a
sen (a - b) = sen a . cos b - sen b . cos a

Cosseno da soma e diferença de arcos

cos (a + b) = cos a . cos b - sen a . sen b
cos (a - b) = cos a . cos b + sen a . sen b

Tangente da soma e diferença de arcos

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$$

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}$$

Duplicação de arcos

sen2a = sen (a + a) = sen a . cos a + sen a . cos a
sen 2a= 2 . sen a . cos a

cos2a = cos (a+a) = cos a . cos a - sen a . sen a

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$tg\,2a = tg(a+a) = \frac{tga + tga}{1 - tga \cdot tga}$$

$$tg\,2a = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}$$

Arco-metade

É sabido que cos 2a= $\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

Se fizermos 2a= x, então $a = \frac{x}{2}$, daí

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

$$\cos x = 1 - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

Aplicando a relação fundamental:

Da definição de tangente:

$$tg^2\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$tg^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Exercícios

1) Dado um arco x do primeiro quadrante para o qual tem-se sen x = 4/5, determine:

a) sen 2x
b) cos 2x
c) tg 2x
d) sen $\left(\frac{x}{2}\right)$
e) cos $\left(\frac{x}{2}\right)$
f) tg $\left(\frac{x}{2}\right)$

2) **(PUC)** Sabendo que $\pi < x < 3\pi/2$ e sen (x) = –1/3 , é correto afirmar que sen (2x) é:

a) $-\frac{2}{3}$
b) $-\frac{1}{6}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
d) $\frac{1}{27}$
e) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

3) **(PUC)** Sabemos que $\cos x = \frac{4}{5}$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Quanto vale tg 2x?

a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{7}{24}$
c) $\frac{24}{7}$
d) $\frac{1}{25}$
e) $\frac{1}{24}$

4) **(PUC)** Sendo x um arco satisfazendo [cut off]

$$\text{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$$

$$\frac{1-\cos x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=1-\frac{1-\cos x}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos x}{2}$$

... x um arco satisfazendo $\pi/2 < x < \pi$ e $\text{sen}(x) = 24/25$, o valor de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ é:

a) $\frac{1}{25}$

b) $-\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $-\frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{5}$

5) Determine os valores de:
a) $\cos 75°$
b) $\text{sen } 105°$
c) $\text{tg } 15°$

6) Considere um arco $\in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ tal que $\text{sen } x + \cos x = 4/3$.
Determine os valores de:
a) $\text{sen } 2x$
b) $\cos 2x$
c) $\text{tg } 2x$

7) Sabendo que $\text{sen } 2x = k$, determine o valor de $|\text{sen } x - \cos x|$.

8) Considere dois arcos do 1º quadrante, a e b, tais que $\text{sen } a = \frac{3}{5}$ e $\cos b = \frac{15}{17}$. Determine valor de $\cos(a + b)$.

9) A expressão $\text{ctg } x - \text{tg } x$ equivale a:
a) $\text{tg } 2x$
b) $\text{ctg } 2x$
c) $2\text{tg } 2x$
d) $2\text{ctg } 2x$
e) $\text{ctg } 2x - \text{tg } 2x$

10) Simplifique a expressão $\text{sen}(x + y) \cdot \text{sen } y + \cos(x + y) \cdot \cos y$.

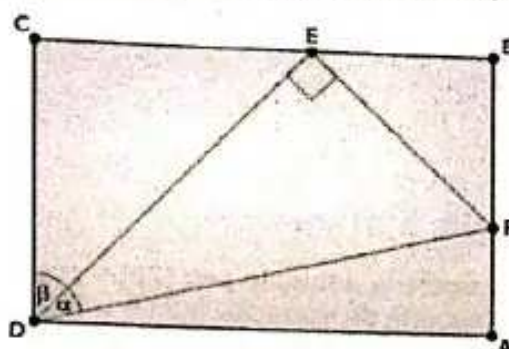
11) Determine o valor de $\text{tg}(a - c)$, sabendo que $\text{tg}(a - b) = m + 1 - n$ e $\text{tg}(b - c) = n - 1 - m$.

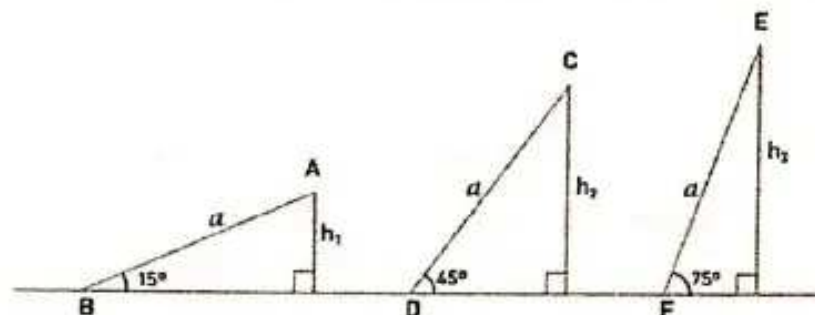
12) Sabendo que $\text{tg}(x - y) = 0{,}99$ e $\text{tg } y = 1$, determine o valor de $\text{tg } x$.

13) Em um triângulo ABC, não retângulo, as tangentes dos ângulos internos nos vértices B e C valem, respectivamente, 2 e 3. Determine a medida do ângulo Â.

14) Um caminhão sobe uma ladeira com inclinação de 15°. A diferença entre a altura final e a altura inicial de determinado ponto do caminhão, depois de percorridos 100 m de ladeira, será de, aproximadamente,
(Dados: $\sqrt{2} = 1{,}41$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$.)
a) 22 m.
b) 24 m.
c) 26 m.
d) 28 m.
e) 30 m.

15) (UERJ) Os gráficos 1 e 2 representam a posição S de dois corpos em função do tempo t.

16) **(UERJ)** Na figura abaixo, observa-se o retângulo ABCD, que contém o triângulo retângulo DEF, no qual DF = 1.

Considerando os ângulos $E\hat{D}F = \alpha$ e $C\hat{D}E = \beta$, determine o comprimento do lado $\overline{DA}$ em função de α e β.

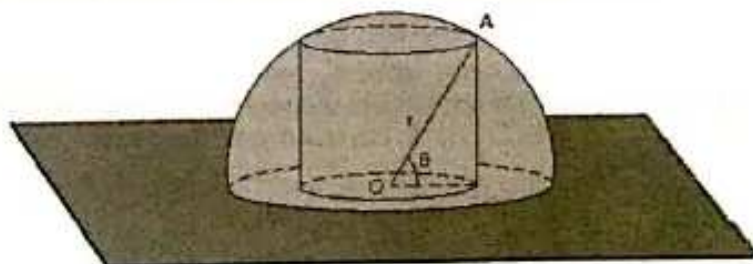
17) **(UERJ)** Um esqueitista treina em três rampas planas de mesmo comprimento **a**, mas com inclinações diferentes. As figuras abaixo representam as trajetórias retilíneas AB = CD = EF, contidas nas retas de maior declive de cada rampa.

Sabendo que as alturas, em metros, dos pontos de partida A, C e E são, respectivamente, h_1, h_2 e h_3, conclui-se que $h_1 + h_2$ é igual a:

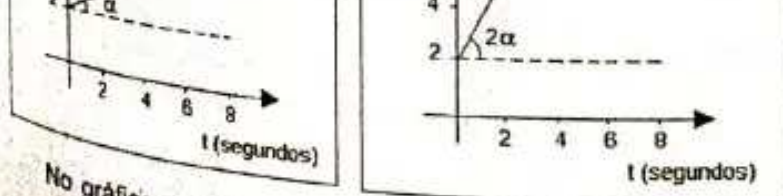
a) $h_3\sqrt{3}$

b) $h_3\sqrt{2}$

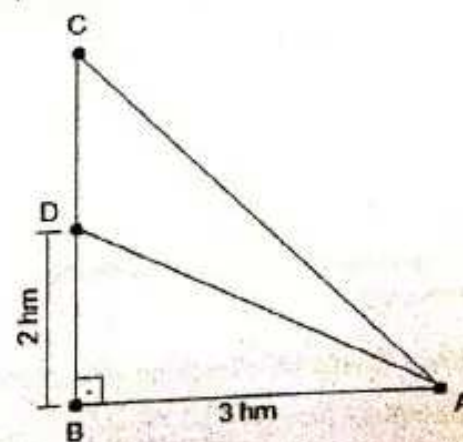
c) $2h_3$

d) h_3

18) **(UERJ)** Observe a figura abaixo, que representa um cilindro circular reto inscrito em uma semiesfera, cujo raio AO forma um ângulo θ com a base do cilindro.

Se θ varia no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e o raio da semiesfera mede r, calcule a área lateral máxima deste cilindro.

19) Um time de futebol conseguiu um terreno para seu futuro centro de treinamento (CT). O terreno tem a forma de um triângulo e suas dimensões são apresentadas na figura

No gráfico 1, a função horária é definida pela equação $S = 2 + \frac{1}{2}t$. Assim, a equação que define o movimento representado pelo gráfico 2 corresponde a:

a) $S = 2 + t$
b) $S = 2 + 2t$
c) $S = 2 + \frac{4}{3}t$
d) $S = 2 + \frac{6}{5}t$

a seguir. O projeto de construção do CT prevê um muro ligado os pontos A e C.

Sabendo que o segmento AD é bissetriz do ângulo com vértice em A, pode-se afirmar que o comprimento do muro AC, em metros, corresponde a

a) 760.
b) 780.
c) 800.
d) 820.
e) 840.

20) **(PUC)** Considere a equação sen $(2\theta) = \cos\theta$. A soma de todas as soluções da equação com $\theta \in [0,2\pi]$ vale:

a) $\frac{2\pi}{3}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{3\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{6}$
e) 3π

21) **(PUC)** Resolva a equação sen $2\theta = \text{tg}\,\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

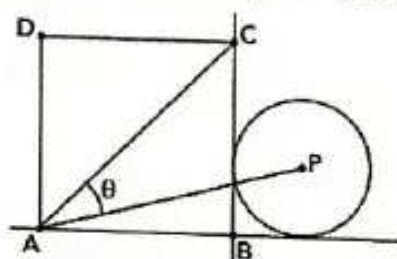
22) **(UNICAMP)** Ache todos os valores de x, no intervalo $[0, 2\pi]$, para os quais sen x + cos x = $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$.

23) **(ITA)** Sendo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ o contradomínio da função arco-seno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arco-cosseno, determine o valor de cos (arcsen $\frac{3}{5}$ + arccos $\frac{4}{5}$).

24) **(UERJ)** Alguns cálculos matemáticos ficam mais simples quando usamos identidades, tais como:

1) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
2) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
3) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Considerando essas identidades, calcule os valores numéricos racionais mais simples para a expressão $\cos^6 15° + \text{sen}^6 15°$.

25) **(UERJ)** No esquema abaixo, estão representados um quadrado ABCD e um círculo de centro P e raio r, tangente às retas AB e BC. O lado do quadrado mede 3r.

A medida θ do ângulo CÂP pode ser determinada a partir da seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}(\alpha) - \text{tg}(\beta)}{\ldots}$$

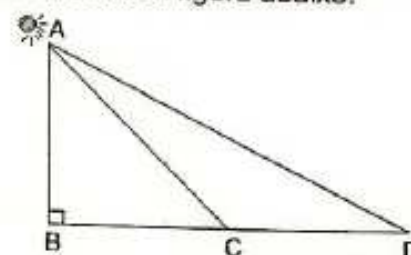
Sabe-se que a, b e c são três ângulos agudos, sendo tg b = 2 e tg (a + b + c) = $\frac{4}{5}$.
Calcule tg (a – b + c).

27) **(FUVEST)** Sejam x e y números reais positivos tais que $x + y = \frac{\pi}{2}$. Sabendo-se que sen $(y - x) = \frac{1}{3}$, o valor de $\text{tg}^2 y - \text{tg}^2 x$ é igual a

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{5}{4}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{8}$

28) **(FUVEST)** O número real x, com $0 < x < \pi$, satisfaz a equação $\log_3(1-\cos x) + \log_3(1+\cos x) = -2$.
Então, cos 2x + sen x vale

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{7}{9}$
d) $\frac{8}{9}$
e) $\frac{10}{9}$

29) **(UERJ)** Um holofote está situado no ponto A, a 30 metros de altura, no alto de uma torre perpendicular ao plano do chão. Ele ilumina, em movimento de vai e vem, uma parte desse chão, do ponto C ao ponto D, alinhados à base B, conforme demonstra a figura abaixo.

Se o ponto B dista 20 metros de C e 150 metros de D, a medida do ângulo CÂD corresponde a:

a) 60°
b) 45°
c) 30°
d) 15°

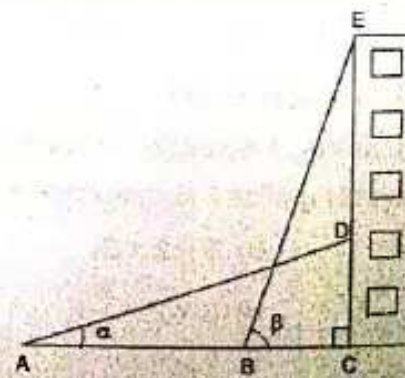
$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha) \times tg(\beta)}$$

O valor da tangente de θ é igual a:

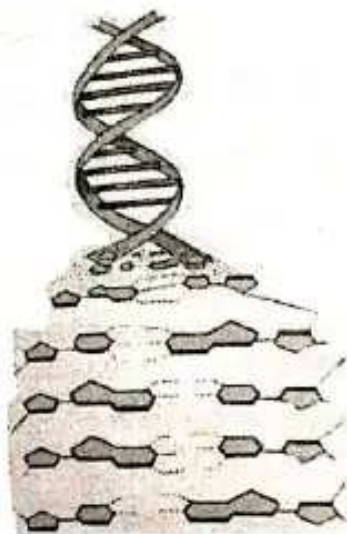
a) 0,65
b) 0,60
c) 0,55
d) 0,50

26) **(UERJ)** Considere o teorema e os dados a seguir para a solução desta questão.

"Se α, β e α + β são três ângulos diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, então $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - (tg\alpha)(tg\beta)}$".

30) **(UERJ)** Para combater um incêndio, os bombeiros utilizaram duas escadas AD e BE, que formavam entre si um ângulo de 45°, conforme mostra a figura a seguir:

Considere $tg\,\alpha = \frac{7}{17}$ e as distâncias AC = 17 m e BC = 5 m. Determine:

a) O comprimento de CD.
b) A altura CE do prédio.

31) **(UNB)** Nos últimos 50 anos, a genética sofreu uma reviravolta e deu espaço a uma nova ciência, a biologia molecular. Descobertas nessa área permitiram o avanço acelerado da biotecnologia, em virtude do desenvolvimento de técnicas de engenharia genética, também denominada de DNA recombinante. O modelo da molécula de DNA utilizado atualmente é o de Watson e Crick, ilustrado na figura a seguir.

Considere que uma das fitas da molécula de DNA, demonstradas na figura em destaque, possa ser descrita pelo conjunto de equações: $x(t) = a \cdot \cos(wt)$; $y(t) = a \cdot \text{sen}(wt)$ e $z(t) = bt$, em que t é um parâmetro em unidades de comprimento e a, b e w são constantes para as quais as condições I a III são satisfeitas.

I) $x(0) = 12$

II) $x(6) = 6$; $y(6) = 6\sqrt{3}$ e $z(6) = 18$

III) $w \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Considerando a função $f(t) = \frac{x(t)}{6} + \frac{\sqrt{3}.y(t)}{6}$, pode-se afirmar que f(t) equivale a

a) $f(t) = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{18} - \frac{\pi}{6}\right)$.

b) $f(t) = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{18} + \frac{\pi}{6}\right)$.

c) $f(t) = 4 \cdot tg\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{6}\right)$.

d) $f(t) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$.

e) $f(t) = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Gabarito

b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

c) $2 - \sqrt{3}$

6)

a) $\frac{7}{9}$

b) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c) $\frac{7\sqrt{2}}{8}$

7) $\sqrt{1-k}$

8) $\frac{36}{85}$

9) d

10) cos x

11) 0

12) 199

13) 45°

14) c

15) c

16) sen (α + β)

17) d

18) πr^2

19) b

20) e

21)

$S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$

22) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$

23) $\frac{7}{25}$

24) $\frac{13}{16}$

25) b

26) -32

27) a

28) e

29) b

30)
a) 7
b) 12

31) b

Anotações

Gabarito

1)

a) $\frac{24}{25}$

b) $\frac{-7}{25}$

c) $\frac{-24}{7}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

e) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

f) $\frac{1}{2}$

2) e

3) c

4) e

5)

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Capítulo IX

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

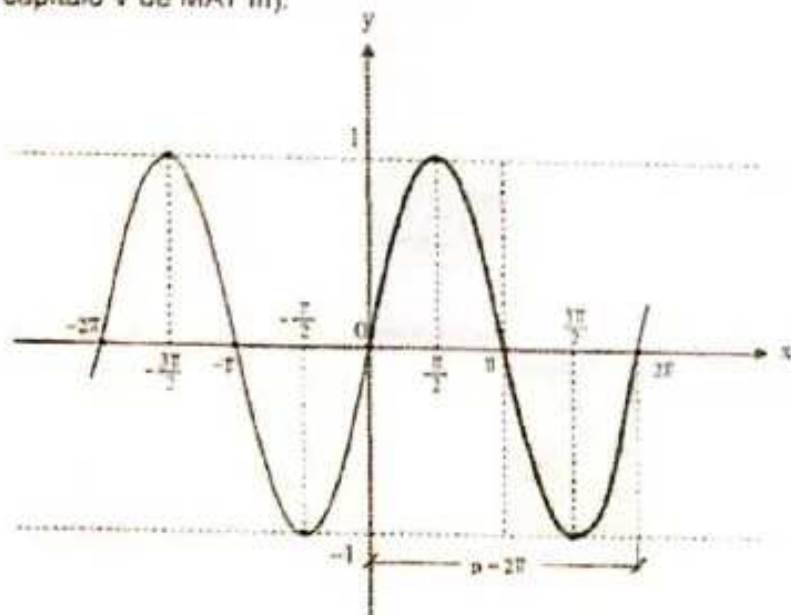
Funções trigonométricas são aquelas que envolvem as linhas trigonométricas já estudadas em capítulos anteriores. Neste capítulo estudaremos as principais funções trigonométricas (funções seno, cosseno e tangente), já que tal estudo nos permitirá o entendimento pleno de uma série de outras funções delas derivadas.

1. Função Seno

Chamamos de função seno à função real de variável real, definida por :

$$f(x) = \text{sen } x$$

Representação Gráfica

Vamos construir o gráfico desta função. Para isto sugerimos a montagem de uma tabela de valores para que possamos identificar alguns dos pontos pertinentes a ele. Os valores atribuídos a x serão os valores dos arcos quadrantais (ver capítulo V de MAT III).

Do gráfico acima, assim como dos demais gráficos das funções trigonométricas, podemos retirar informações muito importantes. Vamos destacá-las:

x	y=sen x
-2π	0
$-\frac{3\pi}{2}$	1
$-\pi$	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1

a) O domínio da função seno é o conjunto R.

b) O conjunto - imagem é o intervalo [-1, 1]. Portanto os valores mínimo e máximo são, respectivamente, -1 e 1.

c) A função seno é cíclica, repetitiva. No gráfico anterior destacamos um ciclo (mostrada na parte mais escura do gráfico), o qual serve como "modelo" para a construção do gráfico da função em todo o domínio real. As interseções

destacamos com hachuras os quatro quadrantes, e assim podemos constatar que:

1º Quadrante > $x \in (0, \pi/2)$ > Função positiva e crescente.

2º Quadrante > $x \in (\pi/2, \pi)$ > Função positiva e decrescente.

3º Quadrante > $x \in (\pi, 3\pi/2)$ > Função negativa e decrescente.

4º Quadrante > $x \in (3\pi/2, 2\pi)$ > Função negativa e crescente.

e) Como estudado no capítulo de funções, raiz de uma função é o valor da variável que anula a função. Graficamente falando, é a abscissa do ponto em que o gráfico da função encontra o eixo horizontal. No caso de função seno são raízes: ..., -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, ... cuja expressão geral é da forma:

$$\{x \in IR \mid x = k\pi;\ k \in Z\}$$

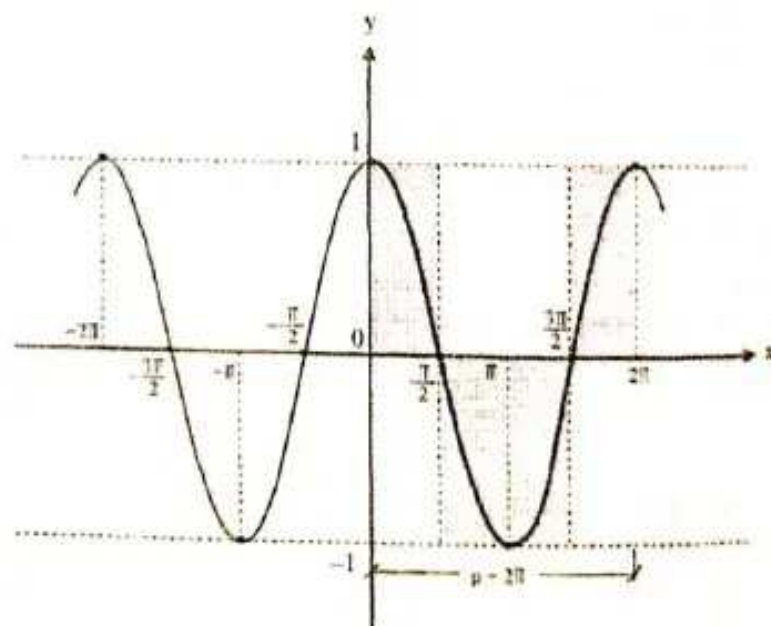
f) A função seno é **ímpar**, pois $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen } x = -f(x)$.

Observe que é devido a este fato que o gráfico é simétrico em relação à origem, como toda função ímpar.

2. Função Cosseno

Chamamos de função cosseno à função real de variável real, definida por:

$$f(x) = \cos x$$

Para construirmos seu gráfico devemos, tal como fizemos com a função seno, montar uma tabela de valores.

Analisando o gráfico acima, podemos ressaltar alguns aspectos e observações importantes:

x	y=cos x
-2π	1
$-\frac{3\pi}{2}$	0

a) O domínio desta função é o conjunto R.

b) O conjunto-imagem é o intervalo [-1, 1], assim, os valores mínimo e máximo são, respectivamente, -1 e 1, tal como na função

π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

...da função em todo o domínio real. Ao intervalo mínimo do domínio para que este ciclo ocorra, ou seja, para que os valores da função se repitam, chamamos de **período**, o qual representamos pela letra p. No caso da função seno, temos p= 2π, pois o intervalo [0,2π] foi o intervalo mínimo para que o ciclo se completasse, e daí a função se repetirá de 2π para 2π.

d) Podemos verificar também os sinais da função em cada um dos quadrantes, lembrando que quando a curva estiver acima do eixo "x" a função será positiva, enquanto que quando estiver abaixo do eixo "x" a função será negativa. No gráfico

$-\pi$	-1
$-\frac{\pi}{2}$	0
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

...respectivamente, -1 e 1, tal como na função seno.

c) O período da função cosseno também é 2π, tal como na função seno. Verifique o destaque do ciclo mínimo no gráfico.

d) Analisando o sinal de função, temos que:
1º Quadrante > x ∈ (0,π/2) > Função positiva e decrescente
2º Quadrante > x ∈ (π/2, π) > Função negativa e decrescente
3º Quadrante > x ∈ (π, 3π/2) > Função negativa e crescente

4º Quadrante > x ∈ (3π/2, 2π) > Função positiva e crescente

e) As raízes da função são: ..., −3π/2, −π/2, π/2, 3π/2,..., de expressão geral

$$\{x \in IR \mid x = k\pi + \pi/2;\ k \in Z\}$$

f) Podemos observar que a função cosseno é par, pois:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

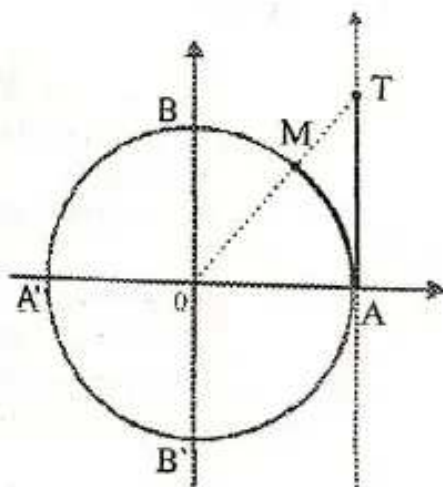
Daí, portanto, está a razão pela qual seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

3. Função Tangente

Chamamos de função tangente à função real de variável real, definida por:

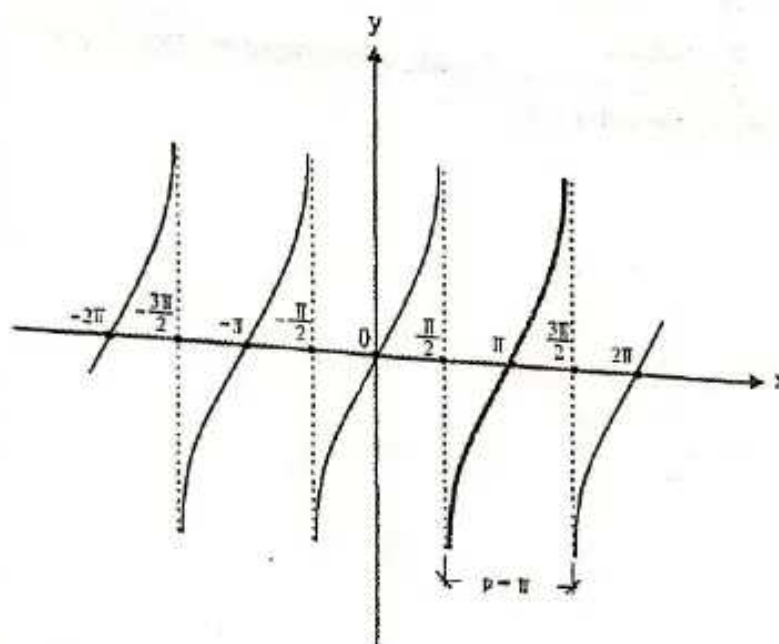
$$f(x) = tg\ x$$

Para o bom entendimento da construção gráfica desta função, sugere-se uma leitura prévia, a título de recapitulação, do capítulo VI, de Matemática III.

Devemos então lembrar que dado um arco de extremidade M, para obtermos sua tangente, devemos unir o centro à extremidade em questão, prologando até que haja o encontro com o eixo das tangentes no ponto T, quando então marcarmos a tangente $\overline{AT}$ do arco $\widehat{AM}$.

Após esse breve resumo, convidamos o leitor a fazer um "tour" pelo círculo trigonométrico. Aconselhamos que o leitor trace um círculo trigonométrico, o eixo das tangentes e em seguida vá acompanhando o desenvolvimento das idéias que se seguem, sempre traçando as tangentes dos arcos citados.

Vamos partir do arco cuja extremidade é o ponto A. Neste caso a tangente vale zero. À medida que as extremidades se aproximam do ponto B os valores das tangentes vão aumentando, aumentando, aumentando,..., até que para um arco do 1º quadrante com extremidade bem próxima do ponto B, o segmento que a une ao centro está quase que paralelo ao eixo das tangentes, o que faz com que a tangente de tal arco assuma um valor excessivamente grande, tendendo para +∞.

Para o arco de extremidade B, a tangente não existe, pois unindo-a ao centro do círc...

Assim, fazendo um "retrato" de nossa viagem, vamos construir o gráfico da função tangente.

NOTA: O símbolo Δ utilizado na tabela está representando um valor positivo infinitamente pequeno.

Podemos fazer algumas considerações importantes:

a) Dom = {x ∈ | x ≠ kπ + π/2; k ∈ Z}

b) Im = R

c) p = π

d) A função tangente é sempre crescente.

e) Vamos estudar a variação de sinais.

x	y = tg x
-2π	0
$-\frac{3\pi}{2}-\Delta$	$+\infty$
$-\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{3\pi}{2}+\Delta$	$-\infty$
$-\pi$	0
$-\frac{\pi}{2}-\Delta$	$+\infty$
$-\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{2}+\Delta$	$-\infty$
0	0
$\frac{\pi}{2}-\Delta$	$+\infty$
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}+\Delta$	$-\infty$
π	0
$\frac{3\pi}{2}-\Delta$	$+\infty$
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$

1º Quadrante > x ∈ (0, π/2) > Função positiva.

2º Quadrante > x ∈ (π/2, π) > Função negativa.

3º Quadrante > x ∈ (π, 3π/2) > Função positiva.

4º Quadrante > x ∈ (3π/2, 2π) > Função negativa.

f) Os zeros da função: ... , -2π, -π, 0, π, 2π, ... de expressão geral {x ∈ R | x = kπ, k ∈ Z}

g) A função tangente é **impar**, pois: f(-x) = tg(-x) = -tg(x) = -f(x).

... do círculo obteremos uma reta paralela ao eixo das tangentes, e portanto, não haverá interseção entre elas. Avançando para o 2° quadrante, se considerarmos um arco de extremidade bem próxima ao ponto B, ao uni-la ao centro, obteremos uma reta "quase" paralela ao eixo das tangentes, o que fará com que sua tangente seja expressa por um número de módulo excessivamente grande, porém de sinal negativo, o que a levaria a tender para -∞. À medida que as extremidades percorrem o 2° quadrante aproximando-se do ponto A', suas tangentes ficarão cada vez menos negativas, portanto aumentarão, até retornar ao valor zero, na extremidade A'. Constate que a partir daí, o comportamento da função será análogo àquele do início de nossa análise.

$\frac{3\pi}{2}+\Delta$	$-\infty$
2π	0

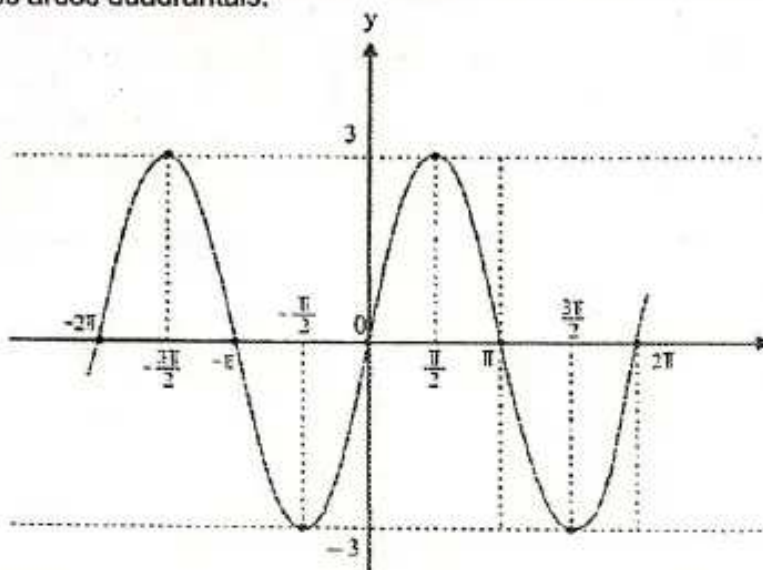
Gráficos de Funções Derivadas das Principais Funções Trigonométricas

Há casos em que podemos esboçar com certa facilidade os gráficos de funções que envolvem as principais funções trigonométricas. Vamos lançar mão de alguns exemplos ilustrativos para que possamos melhor entender os procedimentos cabíveis, nesses casos.

Exemplo Ilustrativo 1:

Construir um gráfico da função y= 3 . sen x.

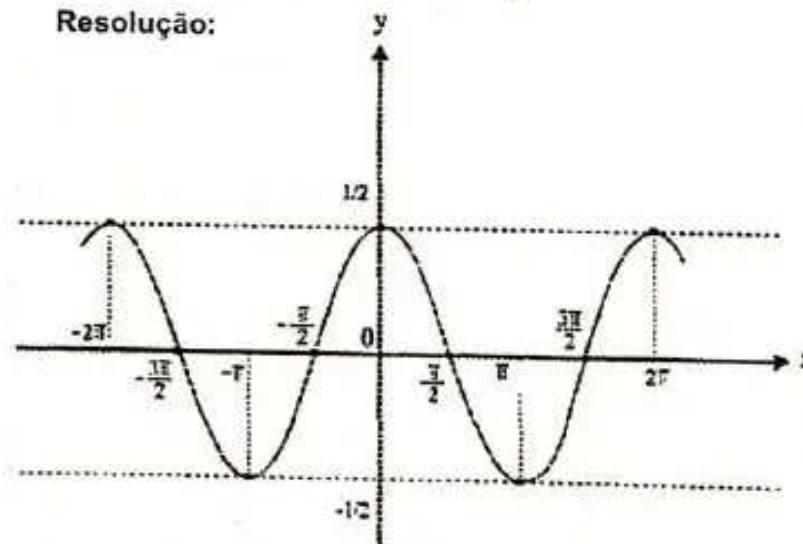
Resolução:

Vamos construir uma tabela, atribuindo à variável os valores dos arcos quadrantais.

x	y=3sen x
-2π	0
$-\frac{3\pi}{2}$	3
$-\pi$	0
$-\frac{\pi}{2}$	-3
0	0
$\frac{\pi}{2}$	3
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-3
2π	0

Exemplo Ilustrativo 2:

Construir o gráfico de função $y=\frac{\cos x}{2}$.

Resolução:

x	$y=\frac{\cos x}{2}$

Comentários:

Pudemos ...

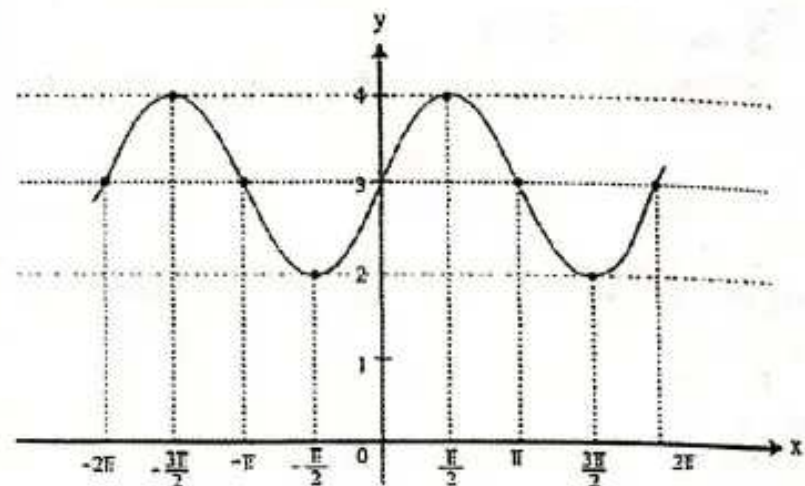
Conclusão:

Dado um número real não nulo k, temos que as funções: y= k sen x e y= k cos x têm conjuntos - imagem iguais a $Im = [-|k|,|k|]$.

Exemplo Ilustrativo 3:

Construir o gráfico de função y= 3 + sen x.

Resolução:

Vamos construir a tabela:

x	y=3+sen x
-2π	3
$-\frac{3\pi}{2}$	4
$-\pi$	3
$-\frac{\pi}{2}$	2
0	3
$\frac{\pi}{2}$	4
π	3
$\frac{3\pi}{2}$	2
2π	3

Comentários:

Ao adicionarmos o número 3 à função seno, isto fez com que o gráfico se "elevasse", ponto a ponto, de 3 unidades, fazendo com que seu conjunto-imagem passasse a ser [2, 4]. O mesmo aconteceria com a função cosseno, ou seja,a adição de um número real a ela apenas alteraria seu conjunto-imagem. Cabe ressaltar que se o número adicionado fosse negativo, o gráfico iria "descer".Constatamos também que o período não se altera, continua igual a 2π.

Conclusão:

Dado o número real k, temos que as funções: y = k + sen x e y = k + cos x têm conjuntos-imagem iguais a $Im = [k-1, k+1]$.

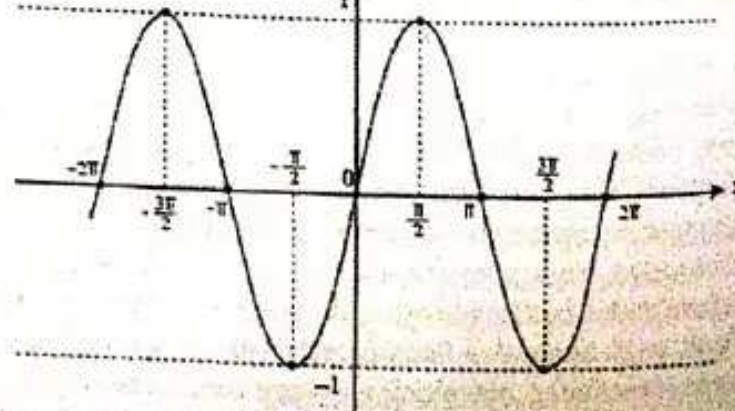
Exemplo ilustrativo 4:

Construir o gráfico da função y = cos (x - π/2).

Resolução:

Vamos construir a tabela

x	y
-2π	½
$-\frac{3\pi}{2}$	0
-π	-½
$-\frac{\pi}{2}$	0
0	½
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-½
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	½

Podemos observar que ao multiplicarmos a função seno por 3, alteramos apenas o seu conjunto-imagem, que passou a ser [-3, 3], e no caso de função cosseno, seu conjunto - imagem passou a ser [-1/2, 1/2]. Em ambos os casos não houve alteração do período, que continuou a ser 2π. Confira!

x	y=cos(x-π/2)
-2π	0
$-\frac{3\pi}{2}$	1
-π	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Comentários:

Podemos notar que o gráfico de função $y = \cos(x - \pi/2)$ é obtido deslocando-se o gráfico de função cosseno de $\pi/2$ unidades para a direita. Então, a adição ou subtração de um valor à variável das funções seno ou cosseno desloca o seu gráfico para a esquerda ou direita, sem no entanto alterar seu período, que continua sendo 2π.

Conclusão:

1) Dado um número real positivo k, as funções $y = \text{sen}(x + k)$ e $y = \cos(x + k)$ terão gráficos iguais aos das funções seno e cosseno, deslocados de k unidades para a esquerda.

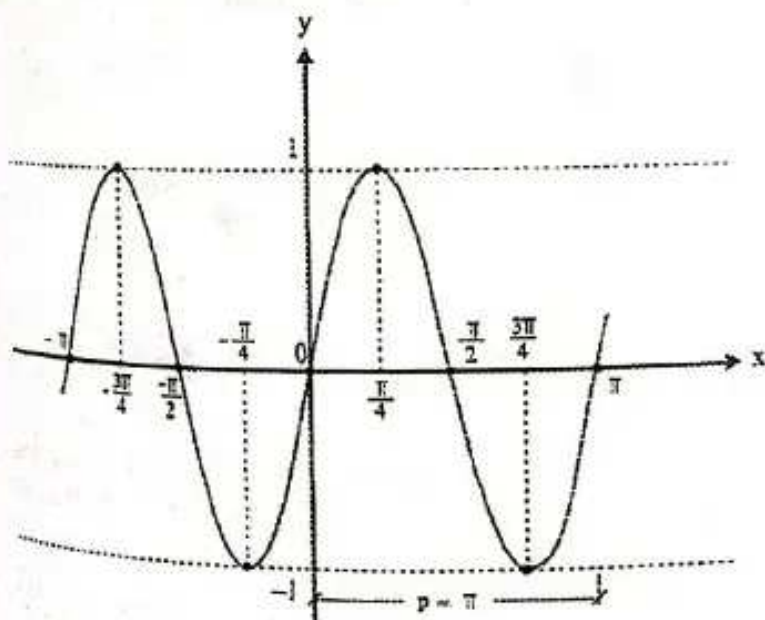
2) Dado um número real positivo k, as funções: $y = \text{sen}(x - k)$ e $y = \cos(x - k)$ terão gráficos iguais aos gráficos das funções seno e cosseno, deslocados de k unidades para a direita.

Exemplo ilustrativo 5:

Construir o gráfico da função $y = \text{sen } 2x$.

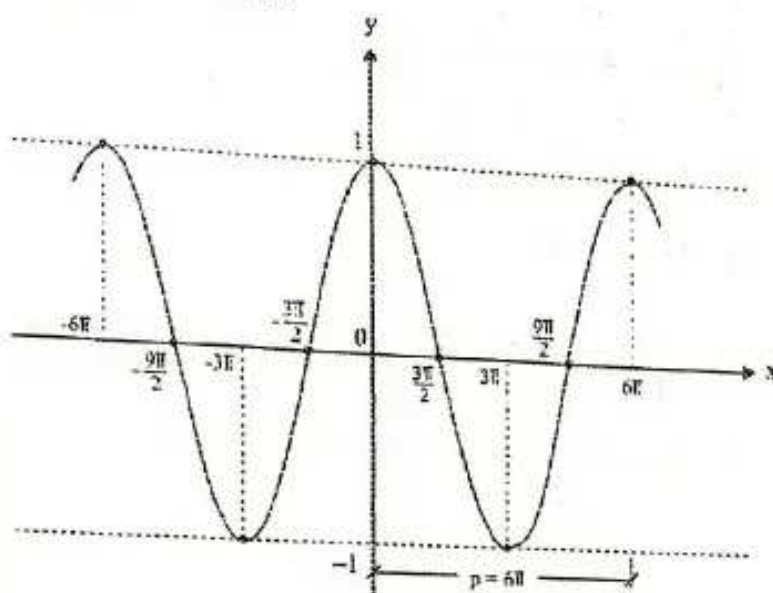
Resolução:

Construindo a tabela:

x	2x	y=sen 2x

Exemplo ilustrativo 6:

Construir o gráfico da função $y = \cos(x/3)$.

Resolução:

Construir a tabela:

x	x/3	y=cos (x/3)
-6π	-2π	0
$-\frac{9\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	1
-3π	-π	0
$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	-1
0	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	1
3π	π	0
$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
6π	2π	0

Comentários:

Podemos observar que nos dois exemplos anteriores os conjuntos-imagem das funções seno e cosseno não foram alterados, porém os períodos variaram. No exemplo 5 a variável foi multiplicada por 2 e o período da função seno, que era 2π, nesta função ficou dividido por 2 e foi igual a π. Já no exemplo 6, a variável foi dividida por 3 e o período de função co-seno, que era 2π, passou a ser 6π, ou seja, foi multiplicado por 3.

Conclusão:

Dado um número real k, as funções $y = \text{sen}(kx)$ e $y = \cos(kx)$ terão períodos iguais a $p = \frac{2\pi}{|k|}$.

Exercícios

1) Considere que a, b e c sejam números reais positivos e $0 < d < \frac{\pi}{2}$. Dada a função $f(x) = a + b.\text{sen}(c.x + d)$, determine

a) o seu período.

b) o seu conjunto imagem.

$-\pi$	-2π	0
$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	1
$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	0
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

2) **(ENEM)** Uma pessoa usa um pr[illegible] que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \text{sen}\,[b(x + c)]$, em que os parâmetros a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.

O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são)

a) a.
b) b.
c) c.
d) a e b.
e) b e c.

3) Determine o período de cada uma das funções abaixo.

a) $f(x) = 4 - 2\,\text{sen}\,x$

b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = 5 + 4\,\text{sen}\left(4x - \frac{5\pi}{6}\right)$

d) $y = 2 + 5\,\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$

e) $f(x) = 1 - \cos\left(\frac{3x}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)$

4) A função $y = k\cos(mx)$ tem período 5π e conjunto imagem igual a $[-6, 6]$. Determine os valores dos números reais k e m.

5) Dê as expressões gerais dos zeros das funções:

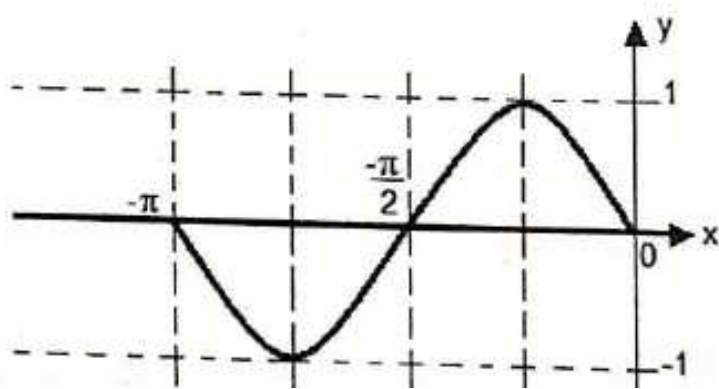
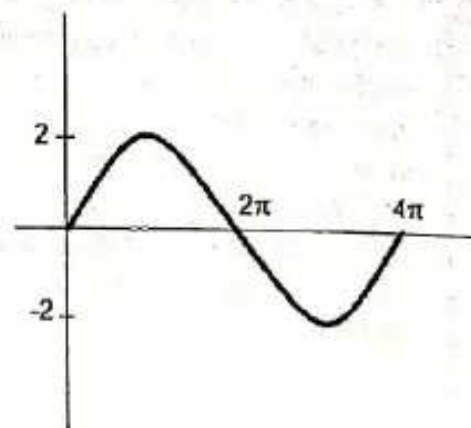
a) $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = 5 + 4\text{sen}\left(\frac{x}{3} - \frac{3\pi}{7}\right)$

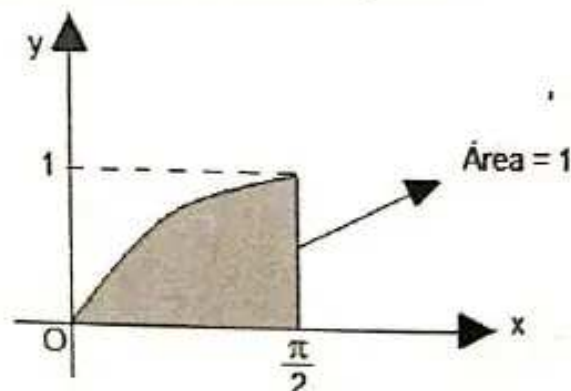
6) Esboçar os gráficos das funções:

a) $y = 6 + \text{sen}\,x$
b) $y = \cos x - 1$
c) $f(x) = 2\cos x$
d) $f(x) = -3\,\text{sen}\,x$
e) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
f) $f(x) = \cos(x - \pi)$
g) $y = \text{sen}\,(3x)$
h) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$
i) $y = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

7) Indique a função trigonométrica f(x) de domínio R, $IM = [-1, 1]$ e período π, que é representada pelo gráfico a seguir.

8) **(FUVEST)** A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:

a) sen x
b) $2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
c) 2 sen x
d) 2 sen (2x)
e) sen (2x)

9) O mais amplo domínio real da função definida por $y = \log\,[\text{sen}\,(x)]$ é o conjunto dos números reais x tais que, para todo $k \in Z$,

a) $-k\pi < x < k\pi$.
b) $k\pi < x < (k - 1)\pi$.
c) $k\pi < x < (k + 1)\pi$.
d) $2k\pi < x < (2k - 1)\pi$.
e) $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$.

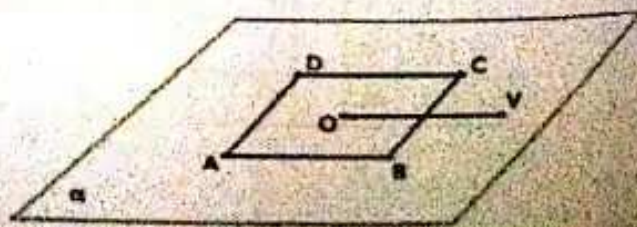
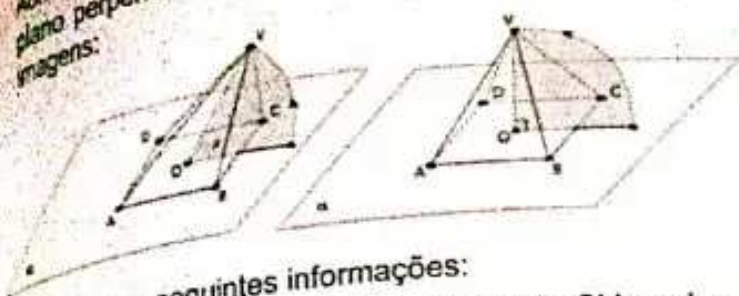
10) **(UERJ)** O aluno que estudar Cálculo poderá provar com facilidade que a área da superfície plana limitada pelos gráficos de $f(x) = \text{sen}\,x$ e $g(x) = 0$, no intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ como ilustra a figura abaixo, é igual a 1.

A partir dessa informação, pode-se concluir que a área limitada pelos gráficos $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 0$, no intervalo $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$, é:

a) 0
b) 3
c) 4
d) 5

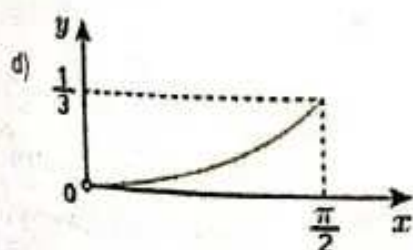
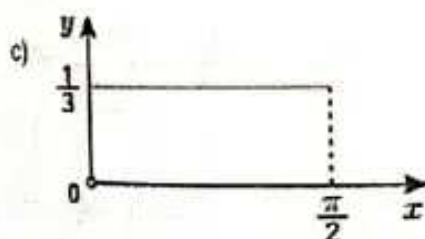
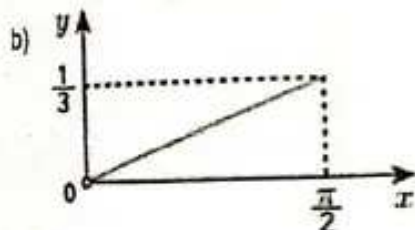
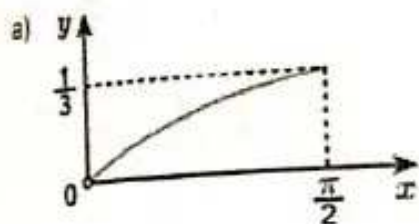
11) (UERJ) [illegible]

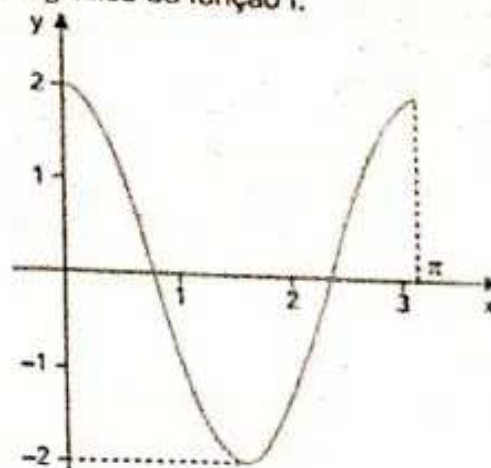
a) $y = 1 + \cos x$
b) $y = 1 - \text{sen } x$
c) $y = \text{sen}(-2x)$
d) $y = \cos(-2x)$
e) $y = -\cos x$

11) (UERJ) Os lados AB e BC de um triângulo ABC medem 1 cm e 2 cm. Represente graficamente a área y desse triângulo em função do ângulo x formado entre esses lados.

12) **(UERJ)** Um quadrado ABCD de centro O está situado sobre um plano α. Esse plano contém o segmento OV, perpendicular a BC, conforme ilustra a imagem:

Admita a rotação de centro O do segmento OV em um plano perpendicular ao plano α, como se observa nas imagens:

Considere as seguintes informações:

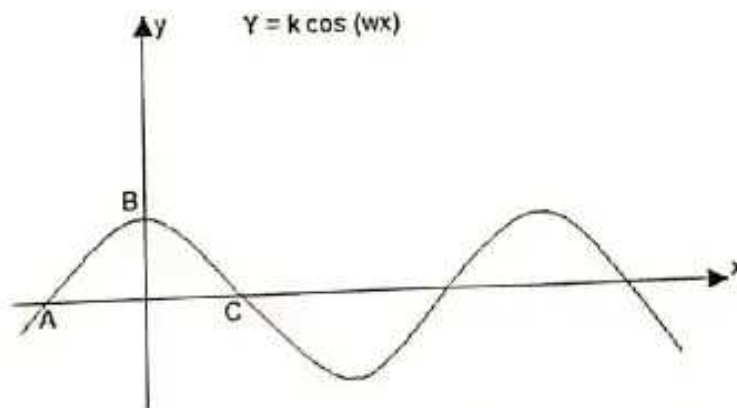
- o lado do quadrado ABCD e o segmento OV medem 1 metro;
- a rotação do segmento OV é de x radianos, sendo $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$;
- x corresponde ao ângulo formado pelo segmento OV e o plano α;
- o volume da pirâmide ABCDV, em metros cúbicos, é igual a y.

O gráfico que melhor representa o volume y da pirâmide, em m^3, em função do ângulo x, em radianos, é:

a)
b)
c)
d)
13) **(UERJ)** Considere a função real, de variável real x,

Observe o gráfico da função f.

Determine os valores de x para os quais $f(x) = 1$.

15) **(FUVEST)** O valor máximo da função $f(x) = 3\cos x + 2\,\text{sen } x$, para x real, é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) 3
c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
d) $\sqrt{13}$
e) 5

16) **(EN)** Sejam A, B e C os pontos de interseção da curva $y = k\cos(wx)$ com os eixos coordenados, conforme a figura abaixo, onde k e w são constantes reais.

Sabendo que o triângulo de vértices A, B e C tem 3π unidades de área e que $k + w - 14 = 0$, o valor de $k - w$ é:

a) -14
b) -10
c) 10
d) 12

17) **(UERJ)** O preço dos produtos agrícolas oscila de acordo com a safra de cada um: mais baixo no período da colheita, mais alto na entressafra. Suponha que o preço aproximado P, em reais, do quilograma de tomates seja $P(t) = 0{,}8 \times \text{sen}\left[\frac{2\pi}{...}(t - 101)\right] + 2{,}7$, na

definida por $f(x) = \sqrt{1 - sen^2 x} + \cos x,\ x \in [0, 2\pi]$.

Utilizando esses dados, responda aos itens a seguir.

a) Calcule $f(\pi)$.

b) Esboce o gráfico cartesiano de f.

14) (UERJ) Considere a função real f, de variável real x, definida pelo seguinte determinante:

$$f(x)\begin{vmatrix} 2\cos(x) & 2 \\ 1 & 2\cos(x) \end{vmatrix} \text{ para } 0 \le x \le \pi$$

dado pela função P(t) = 0,8 x sen [360 ...]

qual t é o número de dias contados de 1° de janeiro até 31 de dezembro de determinado ano.

Para esse período de tempo, calcule:

a) o maior e o menor preço do quilograma de tomates;

b) os valores de t para os quais o preço P seja igual a R$ 3,10.

18) **(ENEM)** Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$, em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

I) Pressão mínima: 78

II) Pressão máxima:120

III) Número de batimentos cardíacos por minuto: 90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico, foi

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

Gabarito

1)

a) $\frac{2\pi}{c}$

b) $[a - b, a + b]$

2) b

3)

a) 2π

b) 2π

c) $\frac{\pi}{2}$

d) 2π

e) $\frac{8\pi}{3}$

4) $k = 6$ e $m = \frac{2}{5}$

5)

a) $x = k\pi + \frac{\pi}{3};\ k \in Z$

b) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12};\ k \in Z$

c) f não possui zeros

6)

a)

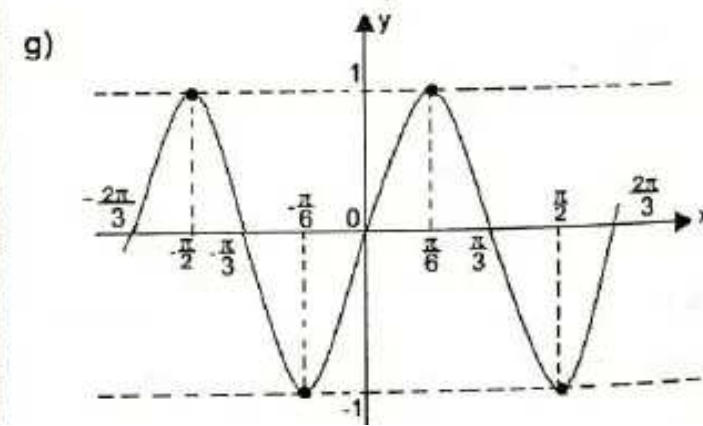
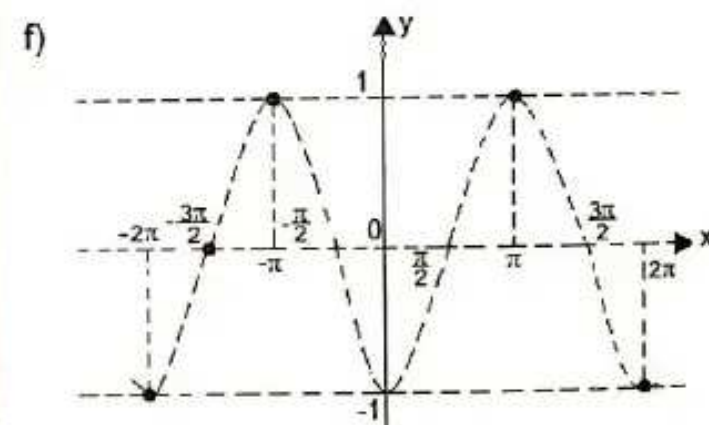
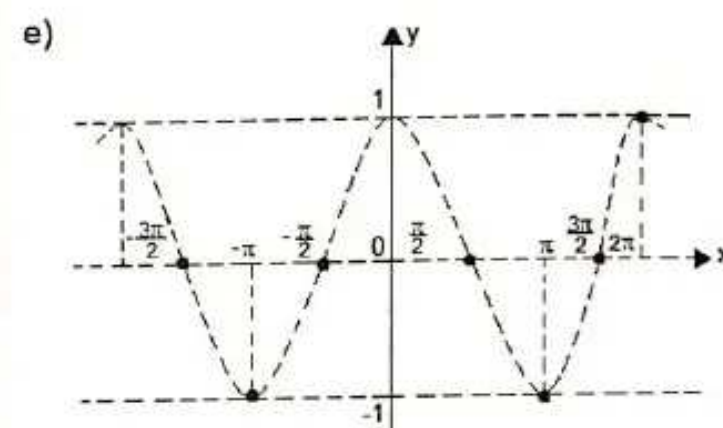
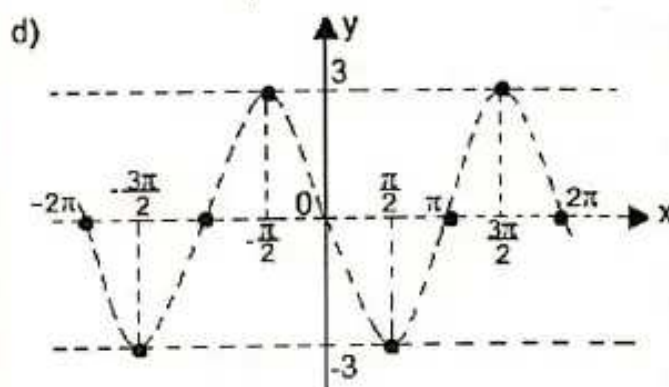
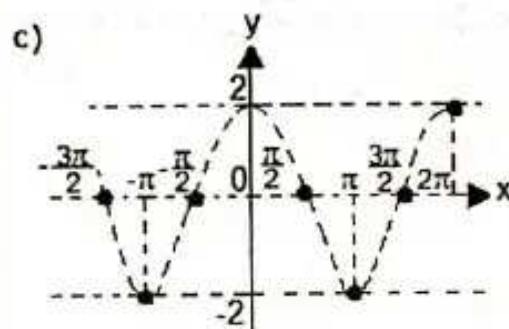
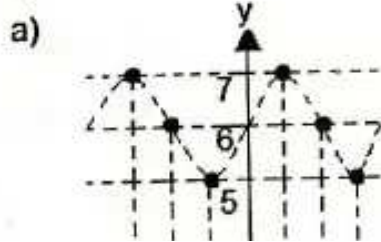
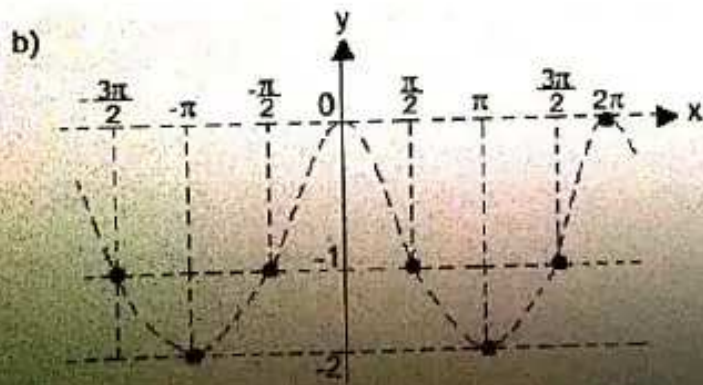
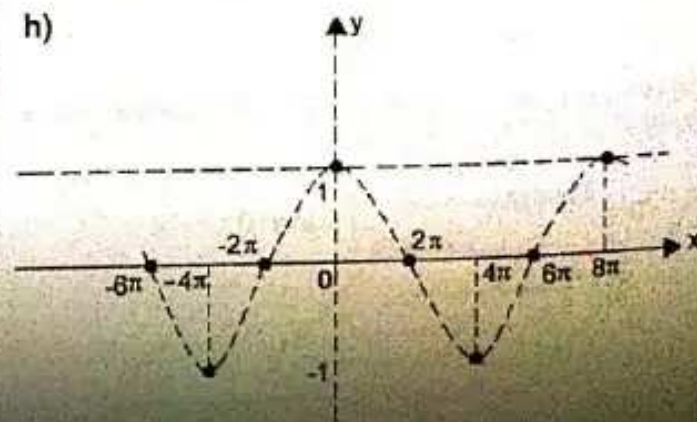
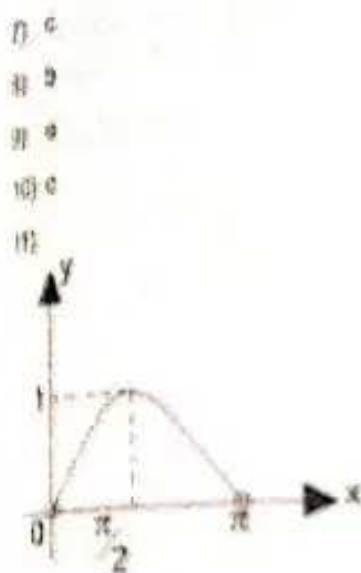
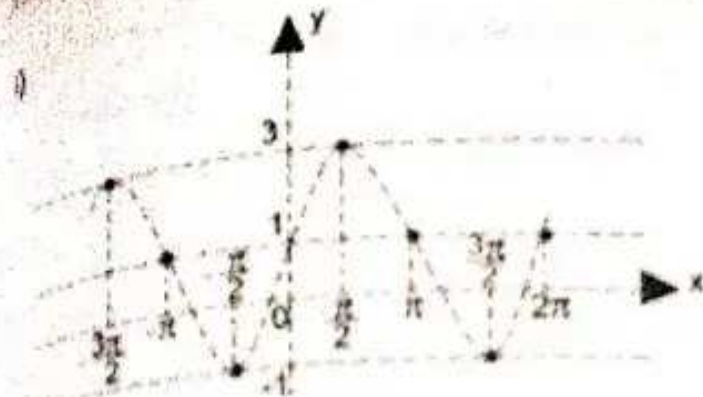
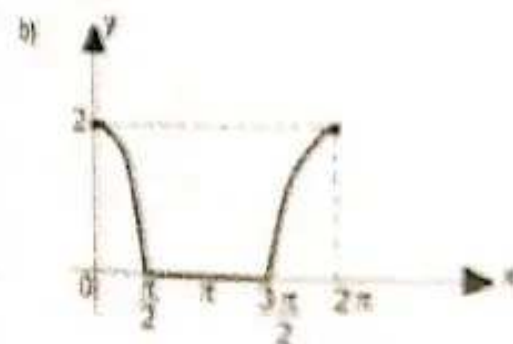
c)

d)

e)

f)

g)

Anotações

Capítulo X

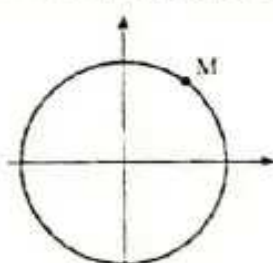
EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo iremos aprender a resolver as principais equações trigonométricas, já que a maioria delas se enquadram em um dos três tipos a seguir.

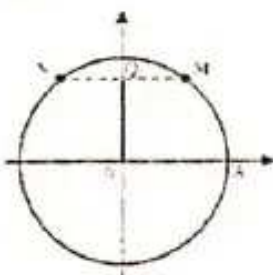
1º tipo

$$\boxed{\text{sen}\,x = \text{sen}\,y}$$

Conforme estudado anteriormente, dois arcos x e y possuem o mesmo seno em duas situações:

a) Têm a mesma extremidade M, ou seja, são côngruos.

Assim sendo, vale a relação.

$$x = 2k + y;\ k \in z$$

b) Têm extremidades M e N simétricas em relação ao eixo vertical dos senos.

$$\boxed{\text{sen}\,\widehat{AM} = \text{sen}\,\widehat{AN} = \overline{OQ}}$$

Note que $\widehat{AM} + \widehat{AN} = \pi$, logo

$$\widehat{AM} = \pi - \widehat{AN}$$

Portanto os arcos $\widehat{AM}$ e $\pi - \widehat{AN}$ são côngruos, e então

$$\widehat{AM} = 2k\pi + (\pi - \widehat{AN})$$

Como $\widehat{AM}$ e $\widehat{AN}$ são respectivamente os menores determinações dos arcos x e y, temos que

$$x = 2k\pi + (\pi - y)$$

Exemplos:
Resolver as equações:

1) $\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:
Pelo estudado em situações anteriores, sabemos que sen $\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo:

$\text{sen}\ x = \text{sen}\ \frac{\pi}{4}$

Podemos resolver tal equação de dois modos equivalentes, como vimos anteriormente.

1ª solução:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ou } 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$S = \{x \in R \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}; k \in Z\}$$

2ª solução:

$$S = \{x \in R \mid x = k\pi + (-1)^k . \frac{\pi}{4}; k \in Z\}$$

2) $\text{sen}\ 3x = -\frac{1}{2}$

Resolução:
Pelo exposto do capítulo VII, temos que $\text{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, então:

$\text{sen}\ 3x = \text{sen}\ \frac{7\pi}{6}$

1ª solução:

$$3x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \text{ ou } 3x = 2k\pi + (\pi - \frac{7\pi}{6})$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} \text{ ou } 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} \text{ ou } 3x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}$$

$$S = \{x \in R \mid x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{11\pi}{18}; k \in Z\}$$

2ª solução:

$$S = \{x \in R \mid x = k\pi + (-1)^k . \frac{7\pi}{6}; k \in Z\}$$

Observação: Na 1ª solução, na 2ª linha temos

$$3x = 2k\pi - \frac{\pi}{\ }$$

Com isto concluímos que a solução da equação sen x = sen y será a união dos conjuntos que satisfizerem às duas situações anteriores, ou seja:

$$\boxed{S = \{x \in R \mid x = 2k\pi + y \text{ ou } x = 2k\pi + (\pi - y); k \in Z\}}$$

Está solução meio complexa pode ser substituída por uma outra, bem mais simples:

$$\boxed{S = \{x \in R \mid x = k\pi + (-1)^k . y; k \in Z\}}$$

6

Como não é usual utilizarmos arcos negativos nas soluções, vamos adicionar 2π ao referido arco, pois assim não alternamos sua extremidade e ele deixa de ser negativo. Logo:

$$3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi$$

$$3x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{11\pi}{18}$$

3) sen 4x = sen 2x

Resolução:

$4x = 2k\pi + 2x$ ou $4x = 2k\pi + (\pi - 2x)$

$2x = 2k\pi$ ou $6x = 2k\pi + \pi$

$S = \{x \in R \mid x = k\pi$ ou $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}; \pi \in Z\}$

Obs: Quando há variáveis em ambos os membros não indicamos a resolução através do 2° método, pois não conseguiríamos isolar a variável em um dos membros. Tente resolver por esse método!

4) $2\,sen^2x + sen\,x - 1 = 0$

Resolução:

Em primeiro lugar vamos resolver esta euqção do 2°grau pelo método de Baskara

$$sen\,x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

Portanto:

$$sen\,x = -1 \text{ ou } sen\,x = 1/2$$

Devemos agora resolver as equações em separado, unindo-se os conjuntos-solução obtidas.

$$sen\,x = -1 = sen\,\frac{3\pi}{2}$$

1ª solução:

$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ou $x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right)$

$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ou $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ou $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

ou seja,

$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}; k \in Z$

2ª solução:

$x = k\pi + (-1)^k . \frac{3\pi}{2}; k \in Z$

$sen\,x = \frac{1}{2} = sen\,\frac{\pi}{6}$

1ª solução:

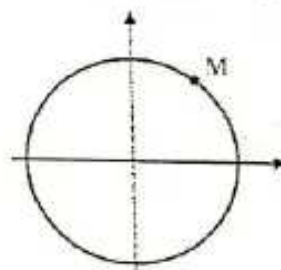
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ou $x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6})$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ou $x + 2k\pi + \frac{5\pi}{...}$

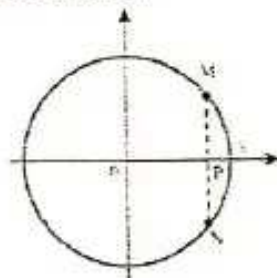
2º tipo

$$\boxed{\cos x = \cos y}$$

Fazendo-se uma análise análoga àquela feita no 1° tipo, podemos verificar que há duas hipóteses para que dois arcos x e y possuam o mesmo coseno:

a) São côngruos, com a mesma extremidade M.

Portanto, temos que :

$$x = 2k\pi + y; k \in Z$$

b) Têm extremidades M e N simétricas em relação ao eixo horizontal dos cossenos.

$$\boxed{\cos \widehat{AM} = \cos \widehat{AN} = \overline{OP}}$$

Note em $\widehat{AM} + \widehat{AN} = 2\pi$, logo

$$\widehat{AM} = 2\pi - \widehat{AN}$$

Neste caso, podemos observar que os arcos $\widehat{AM}$ e $2\pi - \widehat{AN}$ são côngruos e então:

$$\widehat{AM} = 2k\pi + (2\pi - \widehat{AN})$$

Pelo fato de $\widehat{AM}$ e $\widehat{AN}$ serem as menores determinações dos arcos x e y, temos que:

$$x = 2k\pi + (2\pi - y)$$

A solução da equação será a união das soluções descritas acima:

$$\boxed{S = \{x \in R \mid x = 2k\pi + y \text{ ou } x = 2k\pi + (2k\pi - y); k \in Z\}}$$

Podemos também utilizar uma solução que sintetiza as anteriores.

$$\boxed{S = \{x \in R \mid x = 2k\pi \pm y; k \in Z\}}$$

$$\ldots\frac{\pi}{6}; k \in Z$$

2ª solução:

$$x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}; k \in Z$$

Finalmente:

$$S = \{x \in R \mid x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ ou } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = k\pi + \frac{\pi}{6}; k \in Z\}$$

ou

$$S = \{x \in R \mid x = k\pi + (-1)^k \frac{3\pi}{2} \text{ ou } x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}; k \in Z\}$$

Exemplos:

Resolver as equações:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução:

Sabemos que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então:

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$$

1ª solução:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = 2k\pi + (2\pi - \frac{\pi}{6})$$

$$S = \{x \in R \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ou } 2k\pi + \frac{11\pi}{6}; k \in Z\}$$

2ª solução:

$$S = \{x \in R \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}; k \in Z\}$$

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

Do capítulo VII é sabido que

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

1ª solução:

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = 2k\pi + (2\pi - \frac{3\pi}{4})$$

$$S = \{x \in R \mid x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}; k \in Z\}$$

2ª solução:

$$S = \{x \in R \mid x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}; k \in Z\}$$

3) $\cos 8x = \cos 3x$

Resolução:

1ª solução:

$8x = 2k\pi + 3x$ ou $8x = 2k\pi + (2\pi - 3x)$

$5x = 2k\pi$ ou $11x = 2k\pi$

$$S = \{x \in R \mid x = \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{11}; k \in Z\}$$

2ª solução:

$8x = 2k\pi \pm 3x$

$8x = 2k\pi + 3x$ ou $8x = 2k\pi - 3x$

$5x = 2k\pi$ ou $11x = 2k\pi$

$$x = \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{11}$$

Como o cosseno só assume valores reais de -1 a 1, a opção cos 2x= -4 está descartada, portanto basta resolver a outra equação.

$$\cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

1ª solução:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ou } 2x = 2k\pi + (2\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ou } 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$$

$$S = \{x \in R \mid x = k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = k\pi + \frac{5\pi}{6}; k \in Z\}$$

2ª solução:

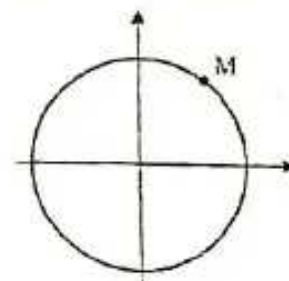
$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$S = \{x \in R \mid x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}; k \in Z\}$$

3º tipo

tg x = tg y

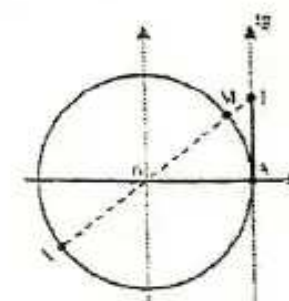
Mais uma vez lançado mão do círculo trigonométrico, podemos constatar que para que dois arcos x e y tenham tangentes iguais eles devem satisfazer a uma das condições:

a) Terem a mesma extremidade M (côngruos).

Daí, tiramos que:

$$x = 2k\pi + y; k \in Z$$

b) Terem extremidades M e N simétricas em relação à origem.

$$tg\widehat{AM} = tg\widehat{AN} = \overline{AT}$$

5 11

Que é uma solução idêntica à 1ª.

4) $2\cos^2 2x + 7\cos 2x - 4 = 0$

Resolução:

Resolvendo a equação do 2°grau:

$$\cos 2x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.(-4)}}{2.2} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}$$

$$\cos 2x = -4 \text{ ou } \cos 2x = 1/2$$

Note que $\widehat{AN} = \widehat{AM} + \pi$, logo

$$\widehat{AM} = \widehat{AN} - \pi$$

Assim sendo, temos que os arcos $\widehat{AM}$ e $\widehat{AN}$, são côngruos e portanto:

$$\widehat{AM} = 2k\pi + (\widehat{AN} - \pi)$$

Como $\widehat{AM}$ e $\widehat{AN}$ são, respectivamente, as menores determinações dos arcos x e y, temos que:

$$x = 2k\pi + (y - \pi)$$

A união das soluções dos itens anteriores pode ser resumida em uma única solução. Assim:

$$\boxed{x = k\pi + y; k \in Z}$$

Exemplos:

Resolver as equações:

I) $tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Resolução:

Sabemos que $\frac{\sqrt{3}}{3} = tg\frac{\pi}{6}$, daí nossa equação se resume em:

$$tgx = tg\frac{\pi}{6}$$

$$S = \{x \in R \mid x = k\pi + \frac{\pi}{6}; k \in Z\}$$

II) $tg\,5x = tg\,2x$

Resolução:

$5x = k\pi + 2x$

$3x = k\pi$

$x = \frac{k\pi}{3}$

$S = \{x \in R \mid x = \frac{k\pi}{3}; k \in Z\}$

Exercícios

1) Resolva as equações:

a) $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$

b) $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen}\,4x = 1$

d) $\text{sen}\,7x = \text{sen}\,2x$

e) $2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x - 1 = 0$

f) $\text{sen}^2 3x + \text{sen}\,3x = 0$

g) $\cos x = \frac{1}{2}$

h) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

i) $\cos 7x = -1$

j) $\cos 9x = \cos 2x$

l) $\cos^2 4x - \cos 4x - 6 = 0$

m) $tg\,x = \sqrt{3}$

n) $tg\,3x = -1$

o) $tg\,11x = tg\,7x$

p) $tg^2 5x - 3 = 0$

2) A soma das raízes da equação sen x - cos x= 0, no intervalo $(2\pi, 4\pi)$ é:

5) O arco x é medido em radianos. Então, a soma das duas menores raízes positivas de $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ é:

a) $\frac{4\pi}{5}$ b) π c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{2}$ e) $\frac{5\pi}{3}$

6) Se x é um arco (medido em radianos), então o número de soluções de sen x + cos x = 2 é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) maior do que 3

7) **(PUC)** A soma das soluções da equação sen 2x= sen x no intervalo $]0, \pi[$ é:

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°
e) 150°

8) O conjunto-solução da equação $\cos 2x = \frac{1}{2}$, onde x é um arco da 1ª volta positiva, é dado por:

a) {60°, 300°}
b) {30°, 330°}
c) {30°, 150°}
d) {30°, 150°, 210°, 330°}
e) {15°, 165°, 195°, 345°}

9) **(FGV)** Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, onde $0 \le x \le 2\pi$

b) $\text{sen}\,x = \cos 2x$, onde $0 \le x \le 2\pi$

Gabarito

1) a) $S = \{x \in IR \mid x = 2K\pi + \pi/6 \text{ ou } x = 2K\pi + 5\pi/6; K \in Z\}$

ou $S = \{x \in IR \mid x = K\pi + (-1)^K \cdot \pi/6; K \in Z\}$

b) $S = \{x \in IR \mid x = 2K\pi + 4\pi/3 \text{ ou } x = 2K\pi + \frac{5\pi}{3}; K \in Z\}$

ou $S = \{x \in IR \mid x = K\pi + (-1)^K \cdot 4\pi/3; K \in Z\}$

c) $S = \{x \in IR \mid x = K\pi/2 + \pi/8; K \in Z\}$

d) $S = \{x \in IR \mid x = 2K\pi/5 \text{ ou } x = 2K\pi/9 + \pi/9; K \in Z\}$

e) $S = \{x \in IR \mid x = \frac{2K\pi}{3} + \frac{\pi}{2}; K \in Z\}$ ou

ou $S = \{x \in IR \mid x = K\pi + (-1)^K \cdot \frac{7\pi}{6}$

ou $x = K\pi + (-1)^K \cdot \frac{\pi}{2}; K \in Z\}$

f) $S = \{x \in IR \mid x = K\pi/3 \text{ ou } x = 2K\pi/3 + \pi/2; K \in Z\}$

g) $S = \{x \in IR \mid x = 2K\pi + \pi/3 \text{ ou } x = 2K\pi + 5\pi/3; K \in Z\}$ ou

$S = \{x \in IR \mid x = 2K\pi \pm \pi/3; K \in Z\}$

h) $S = \{x \in IR \mid x = 2K\pi + 5\pi/6 \text{ ou } x = 2K\pi + 7\pi/6; K \in Z\}$

2 b) $\frac{11\pi}{2}$ c) $\frac{13\pi}{2}$ d) $\frac{15\pi}{2}$

3) Determine a soma das raízes das equações:

a) $2\cos^2 x + \cos 2x = 0$, no intervalo $[0, \pi]$

b) $\text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$

c) $\text{sen}\, 2x + \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, no intervalo $\left[0, 3\frac{\pi}{2}\right]$

4) (PUC) Determine todas as soluções da equação $\text{sen}\, 2x = \cos 3x$, que sejam positivas e menores que 360°.

ou $S = \{x \in IR \mid x = 2K\pi \pm 5\pi/6;\ K \in Z\}$

i) $S = \{x \in IR \mid x = 2K\pi/7 + \pi/7;\ K \in Z\}$

j) $S = \{x \in IR \mid x = 2K\pi/7$ ou $x = 2K\pi/11;\ K \in Z\}$

l) $S = \varnothing$

m) $S = \{x \in IR \mid x = K\pi + \pi/3;\ K \in Z\}$

n) $S = \{x \in IR \mid x = K\pi/3 + \pi/4;\ K \in Z\}$

o) $S = \{x \in IR \mid x = K\pi/4;\ K \in Z\}$

p) $S = \{x \in IR \mid x = K\pi/5 + \pi/15$ ou $x = K\pi/5 + 2\pi/15;\ K \in Z\}$

2) b

3) a) π

b) 5π

c) $\frac{27\pi}{16}$

4) 18°; 90°; 162°; 234°; 270°; 306°

5) b

6) a

7) c

8) d

9) a) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

Anotações

Capítulo XI

MATRIZES E DETERMINANTES

Introdução

Nos dias de hoje é cada vez mais necessária a racionalização de esforços e a minimização do tempo de acesso a determinadas informações. Assim sendo, a utilização das matrizes vem se transformando em um aliado importante no que diz respeito à organização de dados em muitas áreas do conhecimento humano, tais como a Informática, a Estatística, a Engenharia, a Química e demais ciências. Tal utilidade certamente você irá sentir no decorrer deste capítulo.

Conceito de Matriz

Matriz é um conjunto de elementos dispostos ordenadamente em linhas e colunas.

Uma matriz que possua **m** linhas e n colunas é dita uma matriz de ordem m x n (lê-se: **m** por **n**).

Exemplos:

1) O quadro abaixo representa o número de agências que os bancos A, B, C e D possuem nos estados do Rio de Janeiro, São Paulo e Minas Gerais.

Bancos \ Estados	RJ	SP	MG
A	32	47	28
B	49	13	8
C	20	21	18
D	4	6	39

De uma forma matemática poderíamos associar tal tabela a uma matriz. Tal matriz pode ser representada de três maneiras distintas.

$$\begin{pmatrix} 32 & 47 & 28 \\ 49 & 13 & 8 \\ 20 & 21 & 18 \\ 4 & 6 & 39 \end{pmatrix} \text{ou} \begin{bmatrix} 32 & 47 & 28 \\ 49 & 13 & 8 \\ 20 & 21 & 18 \\ 4 & 6 & 39 \end{bmatrix} \text{ou} \begin{Vmatrix} 32 & 47 & 28 \\ 49 & 13 & 8 \\ 20 & 21 & 18 \\ 4 & 6 & 39 \end{Vmatrix}$$

Como em qualquer uma dessas matrizes existem 4 linhas e 3 colunas são ditas de ordem 4 x 3.

Ao observarmos tais matrizes, verificamos que o maior número é o 49 que ocupa a 2ª linha (banco B) e a 1ª coluna (estado do Rio de Janeiro).

Também pode

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) A matriz é ordem 3 x 2

b) O casal com maior número de filhos é o X (3 meninas e 1 menino)

c) O casal que possui o maior número de filhos homens é o Y (maior valor da 2ª coluna)

d) O único casal que não possui filhos de ambos os sexos é o Z (não possui filho homem pois o elemento que ocupa a 3ª linha e a 2ª coluna é nulo).

Matriz Genérica

Devemos utilizar letras maiúsculas para as matrizes e letras minúsculas para seus elementos. Assim, consideremos uma matriz **A** de ordem m x n onde cada elemento é representado por a_{ij}, onde **i** representa o número de linha e **j** o número da coluna à qual o elemento pertence. Obviamente que $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Logo, a matriz genérica **A** é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

E através de uma notação simbólica:

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, com $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$

Exemplo:

A matriz genérica de ordem 3 x 2 é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Forme matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i + j$.

Resolução:

Em primeiro lugar, devemos construir a matriz genérica de ordem 2 x 2:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

E agora vamos obter elemento a elemento da matriz, lembrando que $a_{ij} = i + j$.

$a_{11} = 1 + 1 = 2$ $\qquad$ $a_{12} = 1 + 2 = 3$

...podemos notar que o único dentre estes banco que possui menos que 5 agências em outros estados citados é o banco D (4ª linha) no estado do Rio de Janeiro (1ª coluna).

Assim, de uma matriz podemos obter uma série de informações, bastando para isto que saibamos o que representam cada linha e cada coluna.

2) A matriz abaixo representa o número de filhos que os casais X (1ª linha), Y (2ª linha) e Z (3ª linha) têm de cada sexo, sendo a 1ª coluna representando o sexo feminino e a 2ª coluna o sexo masculino.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{21} = 2 + 1 = 3$ $\quad a_{22} = 2 + 2 = 4$

Logo: $A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$

Principais Tipos de Matrizes

1. *Matriz linha*

Matriz linha é aquela que possui uma única linha. Assim, uma martiz **A** é uma matriz linha se:

$$\boxed{A = (a_{ij})_{1 \times n},\ \forall n \in IN^*}$$

Exemplo:

$B = (2\ 7\ 8\ 9)$ é uma matriz 1 x 4, logo é uma matriz linha.

2. *Matiz coluna*

Matriz coluna é aquela que possui uma única coluna. Então, se A é uma matriz coluna:

$$\boxed{A = (a_{ij})_{m \times 1},\ \forall m \in IN^*}$$

Exemplo:

A matriz $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna de ordem 3 x 1.

3. *Matriz quadrada*

Uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas é dita **matriz quadrada**.

Se uma matriz tem **n** linhas e **n** colunas ela é uma matriz quadrada de ordem **n**.

Em uma matriz quadrada **A**, de ordem n, dá-se o nome de **diagonal principal** (D_p) ao conjunto formado pelos elementos de a_{ij} de **A**, tais que **i = j**. Enquanto que a **diagonal secundária** (D_s) é o conjunto dos elementos nos quais **i + j = n +1.**

Exemplo:

A matriz genérica A de ordem 3 x 3 é uma matriz quadrada de ordem 3 como podemos constatar:

O conjunto $D_P = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}$ é a diagonal principal. Note que todos os elementos têm **i = j**.

O conjunto $D_s = \{a_{13}, a_{22}, a_{31}\}$ é a diagonal secundária. Neste caso podemos observar que a matriz A tem ordem n = 3 e em todos os elementos de D_s temos $i + j = n + 1 = 4$.

4. *Matriz diagonal*

Uma matriz é chamada de **matriz diagonal** quando é quadrada e apresenta todos os elementos não pertinentes à diagonal principal iguais a zero, ou seja:

$$\boxed{\text{Se } A = (a_{ij})_{n \times n} \text{ é matriz diagonal, então } a_{ij} = 0, \forall\ i \neq j}$$

Exemplos:

São matrizes diagonais:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. *Matriz identidade ou unidade*

Toda matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 (um) é chamada de **matriz identidade** ou **unidade**.

Assim,se A é uma matriz identidade e a_{ij} é um elemento de A, temos que:

$$a_{ij} \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}$$

> **NOTA:** A matriz identidade de ordem n é representada por I_n.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

6. *Matriz nula*

Matriz nula é a que apresenta todos os elementos iguais a zero.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

7. *Matriz transposta*

Dada a matriz A, sua **transposta**, representada por A^t, é tal que suas colunas são as linhas de A, dispostas na mesma ordem. Simbolicamente temos:

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, daí $A^t = (b_{ji})_{n \times m}$, sendo

$b_{ij} = a_{ji}$, $\forall$ i $\in$ {1, 2, ..., n} e j $\in$ {1, 2, ..., m}

Propriedades

Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem.

1) $(A^t)^t = A$
2) $(A + B)^t = A^t + B^t$

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes são iguais se são da mesma ordem e têm os elementos de mesmos índices respectivamente iguais. Então:

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, se

$A = B$ então $a_{ij} = b_{ij}, \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$

Exemplo:

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & b+7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ são iguais se

1) $b + 7 = 1 \rightarrow b = -6$

2) $a = -3$

Operações com Matrizes

1. Adição

Só podemos adcionar matrizes de mesma ordem. Neste caso a **matriz soma** será obtida adcionando-se os elementos de mesmos índices das matrizes dadas que terão a mesma ordem que ela.

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, **a soma dessas matrizes representada por A + B é matriz** $C = (c_{ij})_{m \times n}$ **tal que** $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$

Exemplo:

A soma das matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ é

matriz $C = \begin{pmatrix} 2+7 & 1+2 & 3+3 \\ 4+1 & 5+1 & 2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Propriedades da adição

1) Comutativa: $A + B = B + A$

2) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

2. Multiplicação de uma matriz por um número real (escalar)

Para multiplicarmos uma matriz por um número real basta multiplicarmos cada elemento da matriz pelo número em questão. Assim:

Sendo $k \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$, **o produto k. A é a matriz** $B = (b_{ij})_{m \times n}$, **tal que** $b_{ij} = k \cdot a_{ij}, \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$

Exemplo:

O produto da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ pelo escalar (número real) 3 é a matriz:

$$3.A = \begin{pmatrix} 3.3 & 3.2 \\ 3.1 & 3.4 \\ 3.5 & 3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 12 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Multiplicação de matrizes

A adição de matrizes e a multiplicação de uma matriz por um número real certamente são operações bastante simples que seguem um raciocínio lógico até para o estudante não muito familiarizado com o estudo de matrizes. Porém, o produto matricial é regido por determ[illegible] não muito triviais

Já a tabela que se segue trata do salário/hora em cada situação, pois as remunerações horárias são iguais para todos os funcionários de mesmo nível.

	Valor em U$
Sal/Hora normal	10
Sal/Hora extra	20

Agora vamos determinar o salário bruto de cada um desses funcionários:

X: $40 \cdot 10 + 6 \cdot 20 =$ U$ 520

Y: $40 \cdot 10 + 8 \cdot 20 =$ U$ 560

Z: $44 \cdot 10 + 12 \cdot 20 =$ U$ 680

W: $42 \cdot 10 + 21 \cdot 20 =$ U$ 840

Consideremos a matriz A como sendo a matriz das cargas horárias. Assim:

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 6 \\ 40 & 8 \\ 44 & 12 \\ 42 & 21 \end{pmatrix}$$

Sendo B a matriz dos salários/hora, temos que:

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Chamemos de C à matriz dos salários brutos, logo:

$$C = \begin{pmatrix} 520 \\ 560 \\ 680 \\ 840 \end{pmatrix}$$

Fazendo um retrospectro do processo de obtenção de tais salários, verificamos que o salário do funcionário X é o elemento c_{11} da matriz C que foi obtido multiplicando-se o elemento a_{11} de A pelo elemento b_{11} de B e somando-se ao produto de a_{12} por b_{21} ou seja:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

e analogicamente:

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$$
$$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21}$$
$$c_{41} = a_{41} \cdot b_{11} + a_{42} \cdot b_{21}$$

A matriz C é a matriz produto das matrizes A e B, assim C = AB. Observamos que o produto de matrizes não é realizado entre elementos de mesmos índices como seria esperado, e sim seguindo uma regra cujo objetivo é a sua utilização prática, como no exemplo anterior. Note que o elemento c_{11} [illegible] da soma dos produtos dos

... por determinadas regras não muito triviais. Por isto, antes de apresentarmos formalmente a multiplicação de matrizes, vamos desenvolver uma situação real que vai nos auxiliar a melhor entender a essência de tal operação.

A tabela abaixo nos mostra a carga horária mensal de trabalho dos quatro funcionários de nível médio de uma empresa americana.

Funcionários \ Carga Horária Mensal	Nº de Horas Normais	Nº de Horas Extras
X	40	6
Y	40	8
Z	44	12
W	42	21

prática, ... da matriz produto obtido através da soma dos ... elementos da linha 1 de A com os elementos da coluna 1 de B, ordenadamente. Já o elemento c_{21} é o resultado da soma dos produtos dos elementos da linha 2 de A com os da coluna 1 de B, assim por diante. Um algorítmo que facilita a obtenção da multiplicação matricial é mostrado a seguir:

Definição:

Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{n\times p}$ definimos o produto AB dessas matrizes como sendo a matriz $C=(c_{ij})_{m\times p}$ tal que

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\cdot b_{kj}),\ \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\} \text{ e } j \in \{1, 2, ..., p\}$$

Em outras palavras, se C = AB, um elemento c_{ij} de C é obtido através do produto dos elementos da i-ésima linha de A, ordenadamente, pelos elementos da j-ésima coluna de B.

Uma outra observação importante é o fato de só podermos multiplicar duas matrizes se o número de linhas da 2ª for igual ao número de colunas da 1ª, e se isto ocorre a matriz produto terá tantas linhas quanto a 1ª matriz e tantas colunas quanto a 2ª.

Exemplo:

Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3&4&5\\2&2&1&3&2\\0&4&1&2&0\end{bmatrix}_{3\times 5}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\2&3&4&5\\8&9&1&2\\4&4&0&3\\1&2&1&5\end{bmatrix}_{5\times 4}$$

Verificamos que é possível calcular AB, pois o número de linhas de B é igual ao número de colunas de A. Já o produto de BA não pode ser determinado pois não satisfaz a tal regra necessária e suficiente para que o produto seja viável, logo o **produto de matrizes não é comutativo,** ou seja $AB \neq BA$.

Voltando ao produto AB, seja C a matriz produto. Então AB = C e daí:

ORDEM DE A: 3 x⑤ ORDEM DE B: ⑤x 4 ⇒ ORDEM DE C: 3 x 4

Assim, temos que $C=(c_{ij})_{3\times 4}$. Para determinarmos um elemento qualquer de C não é preciso obtermos a matriz C. Por exemplo, seja calcular o elemento c_{21} de C. Neste caso basta multiplicarmos, ordenadamente, os elementos da 2ª linha de A pelos da 1ª linha coluna de B.

$$c_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}+a_{24}\cdot b_{41}+a_{25}\cdot b_{51}=$$
$$=2\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 8+3\cdot 4+2\cdot 1$$

Determinantes

1 Introdução

A toda matriz quadrada associamos um número chamado de **determinante,** cujo cálculo segue determinadas regras que dependem da ordem da matriz.

Exemplo:

Considerando a matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&4&2\\-1&5&7\end{pmatrix}$, o seu determinante é representado por **det A** ou $\begin{vmatrix}2&1&3\\0&4&2\\-1&5&7\end{vmatrix}$

2. Cálculo do determinante de uma matriz 2 x 2

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 é obtido através da diferença entre os produtos dos elementos das diagonais principal e secundária.

Se $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, então $\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

Exemplo:

Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&4\end{pmatrix}$ o determinante de A é $\det A=2\cdot 4-5\cdot 1=3$.

3. Cálculo do determinante de uma matriz 3 x 3

Neste caso empregamos a regra de Sarrus que só é aplicável para a obtenção de determinantes de 3ª ordem. Devemos repetir à direita do determinante as duas primeiras colunas e proceder como o indicado no esquema que segue, no qual calculamos o determinante da matriz quadrada genérica de ordem 3:

$$\det=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{matrix}$$

$$\det=-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+$$
$$+a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$

Exemplo:

O determinante de matriz $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&-2&4\\-1&3&2\end{pmatrix}$ pode ser calculado pelo dispositivo citado anteriormente:

$c_{21} = 28$

Propriedades da Multiplicação de Matrizes

1) Associativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2) Distributiva à esquerda: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3) Distributiva à direita: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

Cabe lembrar que tal operação não goza de propriedade comutativa, pois geralmente $AB \neq BA$.

Logo temos que det A = -49

4. Cofator de um elemento

Dada uma matriz quadrada A, o **cofator** de um de seus elementos a_{ij}, representado por C_{ij} é obtido multiplicando-se por $(-1)^{i+j}$ o determinante da matriz obtida, excluindo-se da matriz sua i-ésima linha e sua j-ésima coluna.

Exemplo:

Considerando a matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinemos, por exemplo, os cofatores dos elementos a_{11} e a_{23}:

$Cof(a_{11}) = C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 1.(-1.3 - 2.0) = -3$

$Cof(a_{23}) = C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -1.(2.0 - 1.3) = 3$

5. Cálculo do determinante de uma matriz n x n (teorema de Laplace)

O determinante de uma matriz quadrada de ordem maior do que 1 é igual ao produto de todos os elementos de qualquer uma de suas filas (linhas ou colunas) pelos respectivos cofatores.

Exemplo:

Seja calcular o determinante da matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Pelo exposto acima, devemos escolher qualquer fila da matriz. A sugestão é que, para minimizar o nosso trabalho, optemos por uma fila que tenha a maior quantidade de zeros.

Na ausência de zeros, opte por qualquer uma das filas. No nosso exemplo, observamos que na 3ª linha há dois elementos nulos. Assim, vamos multiplicar cada elemento desta fila pelo respectivo cofator:

$\det A = 3 \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{32} + 1 \cdot C_{33} + 0 \cdot C_{34} =$ (com $0 \cdot C_{32} = 0$ e $0 \cdot C_{34} = 0$)

$= 3.(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 3.(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

Calculando-se os determinantes de ordem 3 pela regra de Sarrus...

$= 3.1.2 + 1.1.0 = 6$

b) Os determinantes de matrizes quadradas transpostas são iguais.

Exemplo:

Sendo $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, det $A = 2 . 5 - 3 . 1 = 7$.

A transposta de A, $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ tem determinante det $A^t = 2 . 5 - 1 . 3 = 7$.

Como podemos observar **det A = det A^t**.

c) Quando permutamos duas filas paralelas de uma matriz quadrada, seu determinante tem o sinal trocado.

Exemplo:

Sejam as matrizes $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ obtidas permutando-se a 1ª e a 3ª linhas.

Calculemos portanto, usando a regra de Sarrus, os seus respectivos determinantes.

Confirmando o enunciado da propriedade temos que **det B = - det A**.

d) Quando multiplicamos todos os elementos de uma fila de uma matriz quadrada por um mesmo número, seu determinante fica multiplicado por esse mesmo número.

Exemplo:

Dada a matriz $A=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ cujo determinante é det $A = 2 . 3 - 2 . 4 = -2$, multiplicando-se, por exemplo a 1ª coluna por 3, obtemos a matriz $B=\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ cujo determinante é det $B = 6 . 3 - 6 . 4 = -6$, ou seja, det $B = 3$. det A.

e) Se uma matriz quadrada apresenta todos os elementos

6. Propriedades dos determinantes

a) É nulo o determinante de uma matriz quadrada que apresenta duas filas paralelas proporcionais.

Exemplo:

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$ temos que det $A = 0$, pois 4ª linha é proporcional à 1ª.

e) Se uma matriz quadrada apresenta todos os elementos de um mesmo lado diagonal principal iguais a zero, chamada de **matriz triangular**, seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Calculemos o seu determinante através do teorema de Laplace.

Utilizando os elementos da 1ª linha

$\det A = 2 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{14}$

$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot 1 \cdot (-6) = -12$

Verificamos, portanto, que

$\det A = \underbrace{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-2)}_{\text{elementos da diagonal principal}} = -12$

f) Teorema de Binet

Dadas duas matrizes quadradas de mesma ordem, o determinante do produto dessas matrizes é igual ao produto de seus determinantes.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

determinemos a matriz produto AB:

	$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Agora calculemos det A, det B e det (AB):

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = -5$

$-2.1.1 - 2.3.1 - 1.0.0 + 2.1.0 + 1.3.1 + 2.0.1$

$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} = -1$

$-1.1.0 - 3.1.2 - 0.1.1 + 3.1.1 + 0.1.0 + 1.1.2$

7. *Matriz inversa*

Uma matriz quadrada A de ordem n admite inversa quando seu determinante é diferente de zero, e, neste caso, sua inversa, representada por A^{-1}, é tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Uma matriz que admite inversa é chamada de **inversível** ou **invertível**.

Exemplo:

Seja obter a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Em primeiro lugar verifiquemos se ela é inversível, calculando o seu determinante.

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2 \neq 0$, logo A é inversível.

A partir daí devemos encontrar a matriz

$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que: $A \cdot A^{-1} = I_2$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix}$

Assim:

$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+3c & 4d+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pela condição de igualdade entre matrizes:

$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 4a+3c=0 \end{cases} a = \dfrac{3}{2}$ e $c = -2$

$\begin{cases} 2b+d=0 \\ 4b+3d=1 \end{cases} b = -\dfrac{1}{2}$ e $d = 1$

Logo: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Pelos resultados encontrados temos que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Exercícios

1) Escreva as matrizes a seguir, definidas por:

a) $A = (a_{ij})_{3\times2}$, tal que $a_{ij} = i + j$.

b) $B = (b_{ij})_{2\times3}$, tal que $b_{ij} = i^2 - j$, se $i \geq j$, ou $b_{ij} = j^2 - i$, se $i < j$.

2) Determine a soma de todos os elementos das diagonais principal e secundária da matriz identidade de ordem **n**, nos casos em que

a) $n = 4$.

b) $n = 5$.

c) n é par.

d) n é ímpar.

3) Determine o valor da soma dos números reais a, b, c e d, tais que $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ 2c+d & c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

4) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz M que satisfaz a $\frac{M+A}{2} = \frac{B-C}{3}$.

5) É possível o produto entre uma matriz A, de ordem 3 por 4, e outra matriz B, de ordem 4 por 5? Em caso afirmativo, quantos elementos possui a matriz A.B e qual a sua ordem?

6) Uma matriz quadrada A é dita simétrica quando é igual à sua transposta, ou seja, $A = A^t$. Determine os valores dos números reais x, y e z, de modo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ x & 3 & 4 \\ y & z & 5 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

7) A transposta de uma matriz linha é uma matriz

a) linha.

b) coluna.

c) quadrada.

d) identidade.

e) simétrica.

8) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, determine, se possível, $A \times B$, $B \times A$ e C^2.

9) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, considere a matriz $C = A.B$ e determine o valor da soma $c_{23} + c_{54}$.

10) **(UERJ)** Considere a matriz A_{nx9} de nove colunas com números inteiros consecutivos, escrita a seguir.

11) **(UERJ)** Considere a sequência de matrizes $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$, todas quadradas de ordem 4, respectivamente iguais a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 & 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 \\ 40 & 41 & 42 & 43 \\ 44 & 45 & 46 & 47 \end{pmatrix}, \ldots$$

Sabendo que o elemento $a_{ij} = 75432$ é da matriz A_n, determine os valores de n, i e j.

12) Um cliente deseja adquirir três produtos: 1, 2 e 3 e resolve fazer uma pesquisa de preços nas lojas 1, 2 e 3. Na matriz A, mostrada abaixo, cada elemento a_{ij} representa o preço do produto i na loja j.

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 190 & 210 \\ 350 & 360 & 400 \\ 120 & 130 & 100 \end{bmatrix}$$

Se esse cliente deseja comprar os três produtos na mesma loja, em que loja ele encontra o menor preço total?

13) Os times 1, 2 e 3 disputaram um torneio em que todos jogaram entre si uma única vez. Na matriz G, mostrada abaixo, cada elemento g_{ij} representa o número de gols que o time i fez no time j.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nesses dados, responda as perguntas a seguir.

a) Qual time marcou mais gols nesse torneio?

b) Qual time sofreu menos gols nesse torneio?

c) Qual time foi o vencedor desse torneio?

14) Há cinco senadores designados para uma Comissão Parlamentar de Inquérito. Eles devem escolher, entre si, um presidente para a Comissão, sendo que cada senador pode votar em até três nomes. Realizada a votação, onde cada um deles recebeu um número de 1 a 5, os votos foram tabulados na matriz $A = (a_{ij})$, abaixo indicada. Na matriz A, cada elemento a_{ij} é igual a 1 (um), se i votou em j, e é igual a 0 (zero), caso contrário.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Responda as perguntas a seguir.

a) Qual o candidato mais votado?

b) Quantos candidatos votaram em si mesmos?

... do noticiário semanal: 1,

$$A_{n \times 9} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Se o número 18109 é um elemento da última linha, linha de ordem n, o número de linhas dessa matriz é:

a) 2011
b) 2012
c) 2013
d) 2014

15) Em uma cidade há três revistas de noticiário ... 2 e 3. Na matriz $A = (a_{ij})$ abaixo, o elemento a_{ij} representa a probabilidade de um assinante trocar a assinatura da revista i para a revista j, na época da renovação.

$$A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

a) Qual a probabilidade de os assinantes da revista 2 trocarem de assinatura quando forem renovar a assinatura?
b) Quais os leitores menos satisfeitos com a revista que estão assinando?

16) Uma confecção vai fabricar três tipos de roupa utilizando materiais diferentes. Considere a matriz $A = (a_{ij})$ abaixo, onde a_{ij} representa quantas unidades do material j serão empregadas para fabricar uma roupa do tipo i.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Quantas unidades do material 3 serão empregadas na confecção de uma roupa do tipo 2?
b) Calcule o total de unidades do material 1 que será empregado para fabricar cinco roupas do tipo 1, quatro roupas do tipo 2 e duas roupas do tipo 3.

17) **(UERJ)** Três modelos de aparelhos de ar-condicionado, I, II e III, de diferentes potências, são produzidos por um determinado fabricante. Uma consulta sobre intenção de troca de modelo foi realizada com 1000 usuários desses produtos. Observe a matriz A, na qual cada elemento a_{ij} representa o número daqueles que pretendem trocar do modelo i para o modelo j.

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 150 & 200 \\ 0 & 100 & 300 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

Escolhendo-se aleatoriamente um dos usuários consultados, a probabilidade de que ele **não** pretenda trocar seu modelo de ar-condicionado é igual a:

a) 20%
b) 35%
c) 40%
d) 65%

18) **(UERJ)** Observe a matriz A, quadrada e de ordem três.

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,47 & 0,6 \\ 0,47 & 0,6 & x \\ 0,6 & x & 0,77 \end{pmatrix}$$

Considere que cada elemento a_{ij} dessa matriz é o valor do logaritmo decimal de $(i + j)$. O valor de x é igual a:

a) 0,50
b) 0,70
c) 0,77
d) 0,87

19) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados num restaurante. A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P_1, P_2 e P_3 desse restaurante.

arroz carne salada

(1) arroz   (2 1 1) pratoP_1

$$Q = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \end{matrix}$$

(colunas: A, B, C)

Para o transporte aos países de destino, a fábrica recebeu orçamentos de duas empresas, em reais por tonelada, como indica a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1^a \text{ empresa} \\ \leftarrow 2^a \text{ empresa} \end{matrix}$$

a) Efetue o produto das duas matrizes, na ordem que for possível. O que representa o elemento a_{13} da matriz produto?
b) Que elemento da matriz produto indica o custo de transportar o produto A, com a segunda empresa, aos dois países?
c) Para transportar os três produtos aos dois países, qual empresa deveria ser escolhida, considerando que as duas apresentam exatamente as mesmas condições técnicas?

21) **(UERJ)** Para combater a subnutrição infantil, foi desenvolvida uma mistura alimentícia composta por três tipos de suplementos alimentares: I, II e III. Esses suplementos, por sua vez, contêm diferentes concentrações de três nutrientes: A, B e C. Observe as tabelas a seguir, que indicam a concentração de nutrientes nos suplementos e a porcentagem de suplementos na mistura, respectivamente.

Nutriente	Concentração dos Suplementos Alimentares (g/kg)		
	I	II	III
A	0,2	0,5	0,4
B	0,3	0,4	0,1
C	0,1	0,4	0,5

Suplemento Alimentar	Quantidade na Mistura (%)
I	45
II	25
III	30

A quantidade do nutriente C, em g/kg, encontrada na mistura alimentícia é igual a:

a) 0,235
b) 0,265
c) 0,275
d) 0,295

22) Se $C_1, C_2, \dots, C_k$ representam k cidades que compõem uma malha aérea, a matriz de adjacência associada à malha é a matriz definida da seguinte maneira: o elemento na linha i e na coluna j de A é igual ao número 1 se existe exatamente um voo direto da cidade C_i para a cidade C_j, caso contrário, esse elemento é igual ao número 0. Uma propriedade importante do produto $A^n = A.A....A$ (n fatores), $n \in N$ é a seguinte: o elemento na linha i e na coluna j da matriz A^n dá o número de voos com exatamente $n - 1$ escalas da cidade C_i para a cidade C_j.

Considere a malha aérea composta por quatro cidades,

$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{carne} \\ \text{salada} \end{matrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{prato}P_2 \\ \text{prato}P_3 \end{matrix}$

Qual matriz fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2 e P_3?

20) **(FGV)** Uma fábrica decide distribuir os excedentes de três produtos alimentícios A, B e C a dois países da América Central, P_1 e P_2. As quantidades, em toneladas, são descritas mediante a matriz Q:

C_1, C_2, C_3 e C_4, cuja matriz de adjacência é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os números de voos com uma única escala de C_3 para C_1, de C_3 para C_2 e de C_3 para C_4 são, respectivamente, iguais a

a) 0, 0 e 1.
b) 1, 1 e 0.
c) 1, 1 e 2.
d) 1, 2 e 2.
e) 2, 1 e 1.

23) Calcule o valor do determinante de cada uma das matrizes a seguir.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

24) Determine o valor de x que satisfaz a equação $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.$

25) Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4$, determine os valores de:

a) $\begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$

26) Determine o valor da expressão $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

28) **(UERJ)** Considere uma matriz A com 3 linhas e 1 coluna, na qual foram escritos os valores 1, 2 e 13, nesta ordem, de cima para baixo.

Considere, também, uma matriz B com 1 linha e 3 colunas, na qual foram escritos os valores 1, 2 e 13, nesta ordem, da esquerda para a direita.

Calcule o determinante da matriz obtida pelo produto de A × B.

29) **(UERJ)** Considere a matriz $A_{3\times3}$ abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & 1 \\ a_{31} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada elemento desta matriz é expresso pela relação $a_{ij} = 2 \times (\operatorname{sen}\theta_i) \times (\cos\theta_j)$ $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$. Nessa relação, os arcos θ_1, θ_2 e θ_3 são positivos e menores que $\frac{\pi}{3}$ radianos. Calcule o valor numérico do determinante da matriz A.

30) Determine a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

31) **(UNICAMP)** Considere a matriz quadrada de ordem 3,

$A = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\operatorname{sen} x \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$, onde x é um número real.

Podemos afirmar que

a) A não é invertível para nenhum valor de x.
b) A é invertível para um único valor de x.
c) A é invertível para exatamente dois valores de x.
d) A é invertível para todos os valores de x.

32) **(UNICAMP)** Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) -2.
b) -1.
c) 1
d) 2

33) **(UNICAMP)** Sendo a um número real, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então, A^{2017} é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix}$

27) (UERJ) Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Gabarito

1)

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2)

a) 4
b) 6
c) n
d) n + 1

3) 12

4) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

5) 15 e 3 x 5

6) x = 1, y = 6 e z = 4

7) b

8)

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 7 & 6 & 6 \\ 13 & 19 & 14 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$

$C^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

9) 27

10) c

11) n = 4715, i = 3 e j = 1

12) Loja 1

13)

a) 1 (5 gols)
b) 3 (3 gols)
c) Time 1

14)

a) 5
b) 2

15)

a) 30%
b) 3

16)

20)

a) $P \cdot Q = \begin{pmatrix} 130.000 & 95.000 & 135.000 \\ 100.000 & 70.000 & 100.000 \end{pmatrix}$

O elemento a_{13} representa o valor cobrado, em reais, pela empresa 1 para transportar o produto C para os dois países.

b) O elemento a_{21}

c) A empresa 2

21) d

22) c

23)

a) 2
b) 1
c) -18
d) 4
e) -25

24) 0

25)

a) 4
b) -4
c) -4
d) 8

26) 20

27) a

28) 0

29) 0

30) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{-5}{2} & 2 \end{pmatrix}$

31) d

32) a

33) b

Anotações

a) 3
b) 33
17) b
18) b
19) $\begin{pmatrix}7\\9\\8\end{pmatrix}$

Capítulo XII

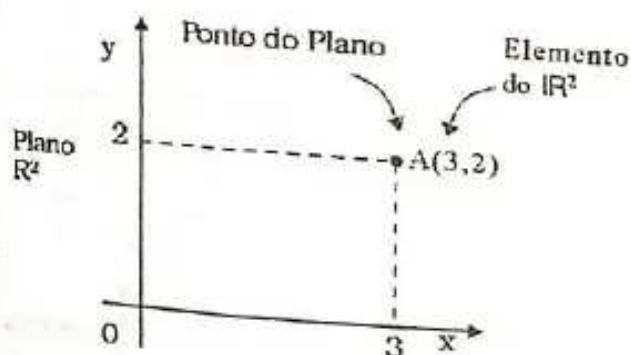
VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

O Conjunto R^2

É sabido que o produto cartesiano de dois conjuntos, representado por A x B, é o conjunto formado por todos os pares ordenados em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B. Desta forma, simbolicamente, temos que:

$$R^2 = R \times R = (\{x, y) \mid x \in R \wedge y \in R\}$$

Assim, o conjunto IR^2 é formado por todos os pares de abscissa e ordenada reais. Como o conjunto R^2 é composto por uma infinidades de pares, seria impossível que escrevêssemos todos eles. Assim, lançamos mão de um sistema formado por dois eixos ortogonais e orientados para a representação de cada elemento de R^2. A abscissa deve ser marcada no eixo horizontal, ficando o eixo vertical reservado para a marcação da ordenada. Daí, a cada elemento do IR^2 está associado um ponto neste sistema, e através de uma correspondência biunívoca, cada ponto deste plano está associado a um elemento do R^2. Como IR^2 é constituído por infinitos pares e o plano por uma infinidade de pontos, se pudéssemos representar todos os elementos do R^2 certamente iríamos utilizar todos os pontos do plano, por isso tal plano é chamado de plano R^2.

Exemplo: $A(3,2) \in R^2$

O Conjunto R^3

De uma forma análoga, podemos definir simbolicamente o conjunto como sendo:

$$R^3 = R \times R \times R = \{(x,y,z) \mid x \in R, y \in R \wedge z \in R\}$$

Desta feita, para a representação de um elemento do R^3 utilizamos um sistema de três eixos ... dois a dois ...

A figura nos mostra que a representação de um elemento do R^3 é um ponto no espaço. Assim, a imagem geométrica do conjunto R^3 é o conjunto de pontos do espaço, chamado de espaço R^3.

Os pontos **R**, **S** e **T** são, respectivamente, as projeções do ponto A nos planos xy, yz e xz e têm coordenadas R (2, 3, 0), S(0, 3, 4) e T(2, 0, 4).

Igualdade de Pares e Ternos Ordenados

Dois elementos do R^2 são iguais quando apresentam as coordenadas correspondentes respectivamente iguais. Tal regra também vale para elementos do IR^3. Assim:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2$$

Exemplos:

Se $(x + y, x - y) = (3, 1)$, então:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{matrix}\right\} x = 2 \text{ e } y = 1$$

Operações no R^2 e R^3

1. Adição

Para adicionarmos dois elementos do IR^2, basta que adicionemos as coordenadas correspondentes. No IR^3 devemos proceder analogamente.

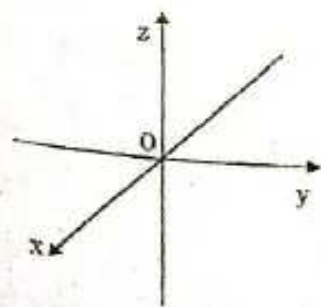
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

2. Multiplicação por um escalar

Todo número real é chamado de escalar. Assim, o produto ... ordenado é obtido

... três eixos orientados perpendiculares

z
0
y
x

Os eixos x (abscissas), y (ordenadas) e z (cotas) determinam dois a dois, três planos: xy, xz e yz.

Tomemos como exemplo a obtenção da representação geométrica do elemento A (2,3,4), do R^3.

... de um escalar por um par ou termo ordenado ... multiplicando-se cada coordenada pelo escalar em questão.

$k.(x_1, y_1) = (k.x_1, k.y_1); \forall k \in R$

$k.(x_1, y_1, z_1) = (k.x_1, k.y_1, k.z_1); \forall k \in R$

Exemplos:

1) $2.(5,7) = (2.5, 2.7) = (10, 14)$

2) $-\frac{1}{3}.(2,0,1) = \left(\frac{-1}{3}.2, \frac{-1}{3}.0, \frac{-1}{3}.1\right) = \left(\frac{-2}{3}, 0, \frac{-1}{3}\right)$

Segmento Orientado

Considerando uma reta r e dois de seus pontos distintos, A e B, a porção da reta compreendida entre A e B é chamada de segmento de reta, enquanto que a reta é dita reta suporte.

A figura acima representa o segmento de reta $\overline{AB}$ que também poderia ser lido como $\overline{BA}$. Esta opção existe a partir do momento que não há um sentido único de leitura. Assim, se arbitramos um sentido, tal segmento passa a ser orientado, como retrata a figura abaixo.

Assim, a partir de agora, a maneira correta de lê-lo é $\overrightarrow{AB}$.

Todo segmento orientado tem três características que o diferenciam dois demais:

1) **módulo**: é o comprimento do segmento.
2) **direção**: é dada pela sua reta suporte.
3) **sentido**: é arbitrado entre os dois possíveis e indicado pela seta postada sobre as letras extremas do segmento.

Segmentos Orientados Equipolentes

Dois segmentos orientados são equipolentes quando apresentam o mesmo módulo, direção e sentido.

Exemplo:

Os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes, pois r//s, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ e os sentidos são iguais.

Vetor

Para melhor ilustrar o conceito de vetor vamos considerar um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ com direção horizontal, comprimento 2 e sentido da esquerda para a direita.

E quantos outros segmentos orientados equipolentes a $\overrightarrow{AB}$ nós poderíamos considerar? Todos com as mesmas características. De tal modo que ao observar um deles possamos determinar o módulo, direção e sentido dos demais. Assim, todos fazem parte de uma mesma família, todos representam o mesmo vetor. Logo:

Vetor determinado por um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overrightarrow{AB}$.

Daí, se chamamos de $\vec{v}$ o vetor determinado por $\overrightarrow{AB}$, então:

$\vec{v} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}, ...\}$

Exemplo:

O segmento orientado abaixo representa um vetor $\vec{v}$ ...

...que tem direção vertical, comprimento 3 e sentido de cima para baixo. Tendo os pontos **P**, **R** e **T** como origens, mostramos abaixo representantes de $\vec{v}$.

Cálculo das Componentes de Um Vetor no Plano

Dados os pontos A (x_1, y_1) e B(x_2, y_2) do R^2, seja determinar ...

e sentido da esquerda para a direita.

Agora representemos alguns segmentos orientados equipolentes a $\overrightarrow{AB}$.

as componentes do segmento orientado AB.

Como podemos observar o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ tem duas componentes, uma horizontal e outra vertical. Assim, pode ser associado a um par ordenado. Então:

Segmento Orientado

Considerando uma reta r e dois de seus pontos distintos, A e B, a porção da reta compreendida entre A e B é chamada de segmento de reta, enquanto que a reta é dita reta suporte.

A figura acima representa o segmento de reta $\overline{AB}$ que também poderia ser lido como $\overline{BA}$. Esta opção existe a partir do momento que não há um sentido único de leitura. Assim, se arbitramos um sentido, tal segmento passa a ser orientado, como retrata a figura abaixo.

Assim, a partir de agora, a maneira correta de lê-lo é $\overrightarrow{AB}$.

Todo segmento orientado tem três características que o diferenciam dois demais:

1) **módulo**: é o comprimento do segmento.
2) **direção**: é dada pela sua reta suporte.
3) **sentido**: é arbitrado entre os dois possíveis e indicado pela seta postada sobre as letras extremas do segmento.

Segmentos Orientados Equipolentes

Dois segmentos orientados são equipolentes quando apresentam o mesmo módulo, direção e sentido.

Exemplo:

Os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes, pois r//s, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ e os sentidos são iguais.

Vetor

Para melhor ilustrar o conceito de vetor vamos considerar um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ com direção horizontal, comprimento 2 e sentido da esquerda para a direita.

E quantos outros segmentos orientados equipolentes a $\overrightarrow{AB}$ nós poderíamos considerar? Todos com as mesmas características. De tal modo que ao observar um deles possamos determinar o módulo, direção e sentido dos demais. Assim, todos fazem parte de uma mesma família, todos representam o mesmo vetor. Logo:

Vetor determinado por um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overrightarrow{AB}$.

Daí, se chamamos de $\vec{v}$ o vetor determinado por $\overrightarrow{AB}$, então: $\vec{v} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}, ...\}$

Exemplo:

O segmento orientado abaixo representa um vetor $\vec{v}$ ...

...que tem direção vertical, comprimento 3 e sentido de cima para baixo. Tendo os pontos **P**, **R** e **T** como origens, mostramos abaixo representantes de $\vec{v}$.

Cálculo das Componentes de Um Vetor no Plano

Dados os pontos A (x_1, y_1) e B(...

A B r

Agora representemos alguns segmentos orientados equipolentes a $\overline{AB}$.

... dos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ do R^2, seja determinar as componentes do segmento orientado $\overline{AB}$.

Como podemos observar o segmento orientado $\overline{AB}$ tem duas componentes, uma horizontal e outra vertical. Assim, pode ser associado a um par ordenado. Então:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

Logo: $\overrightarrow{AB} = B - A$

"As componentes de um segmento orientado podem ser obtidas através da diferença entre as coordenadas de seus pontos extremidade e origem".

Analogamente tal regra também é válida para os vetores nos espaço R^3.

Exemplos:

1. Dados os pontos A (2, 3), B (5, -4) e C (0,3), temos que:

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (5, -4) - (2, 3) = (3, -7)$

b) $\overrightarrow{BA} = A - B = (2, 3) - (5, -4) = (-3, 7)$

Note que: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, pois têm o mesmo módulo e direção, porém sentidos contrários.

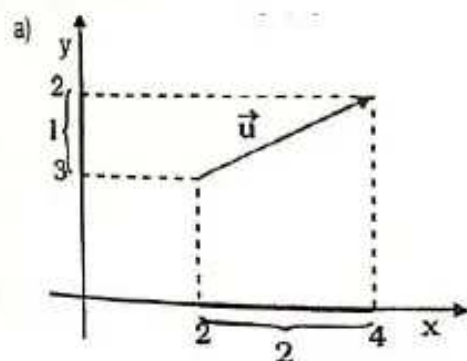
c) $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,3) - (2,3) = (-2,0)$

d) $\overrightarrow{CB} = B - C = (5,-4) - (0,3) = (5,-7)$

2. Considerando os pontos A (1, 2, -4) e B (0, 5, 2), as componentes do segmento orientado $\overline{AB}$ são dadas por:

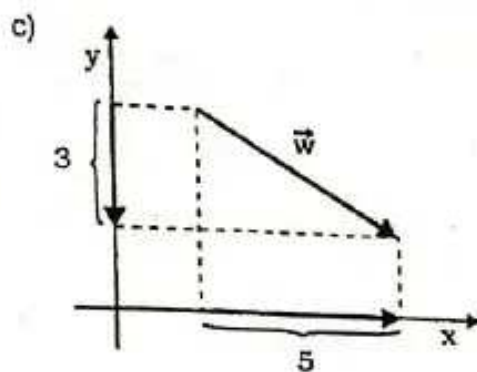
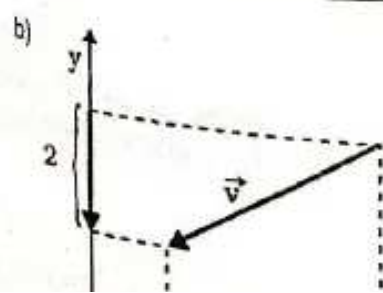
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,5,2) - (1,2,-4) = (-1,3,6)$$

3. Seja determinar as componentes dos vetores representados nas figuras abaixo:

a)

Componente horizontal= 2
Componente vertical= 1

$$\boxed{\vec{u} = (2,1)}$$

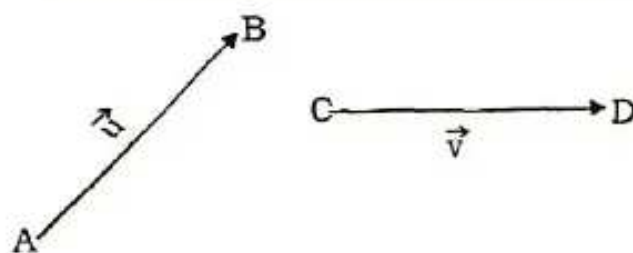
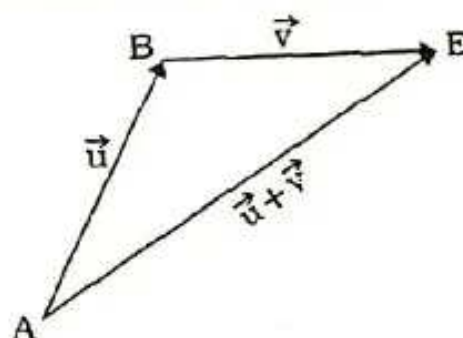
b)

c)

Componente horizontal = 5
Componente vertical = -3

$$\boxed{\vec{w} = (5,-3)}$$

Adição de Vetores

Para determinarmos a soma de dois vetores devemos escolher dois de seus representantes, tais que a extremidades do primeiro coincida com a origem do segundo. O vetor soma é o que tem a mesma origem do primeiro e a mesma extremidade do segundo.

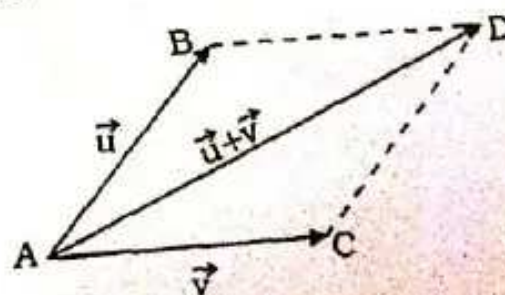
Seja obter o vetor soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados, respectivamente, pelos segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Devemos, como exposto na regra de adição, escolher um representante, por exemplo, do vetor $\vec{v}$ com origem em $\overline{B}$. Consideremos $\overline{BE}$ um segmento orientado equipolente a $\overline{CD}$ e, portanto, um representante do vertor $\vec{v}$.

Então o vetor $\overline{u} + \overline{v}$ é representado pelo segmento orientado $\overline{AE}$.

Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem dados por intermédio de segmentos orientados de mesma origem utiliza-se a chamada **regra do paralelogramo**, que consiste em construirmos um ... O vetor soma

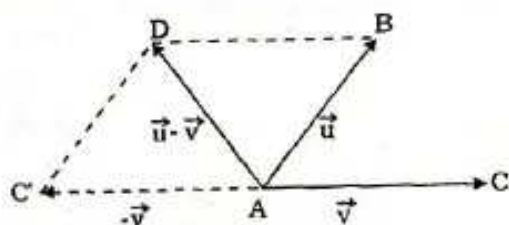
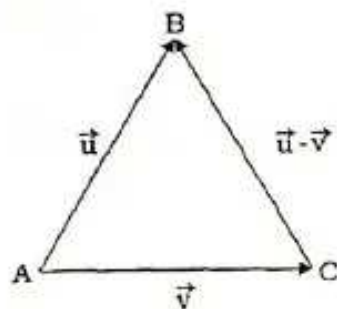
4 x

Componente horizontal = –4 ⟩ Sentidos contrários
Componentevertical = –2 ⟩ aos dos eixos

$\vec{v} = (-4,-2)$

regra do paralelogramo ... paralelogramo tendo os vetores dados com lados. O vetor soma ... tem módulo e direção iguais aos da diagonal do paralelogramo que parte do vértice comum aos vetores, como nos mostra a figura abaixo:

Diferença de Vetores

A diferença entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representada por $\vec{u} - \vec{v}$ pode ser considerada como a adição de $\vec{u}$ com o simétrico de $\vec{v}$, ou seja:

Tomemos representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem e apliquemos a regra do paralelogramo para a adição de $\vec{u}$ com o simétrico de $\vec{v}$.

Da Geometria Plana, observamos que o triângulo AC'D e o de vértices A,B e C são congruentes, então $\overline{AD} = \overline{BC}$. Daí que, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados por segmentos orientados de mesma origem, a diferença $\vec{u} - \vec{v}$ tem como origem a extremidade de $\vec{v}$ e a mesma extremidade de $\vec{u}$.

Multiplicação de Um Vetor por Um Escalar

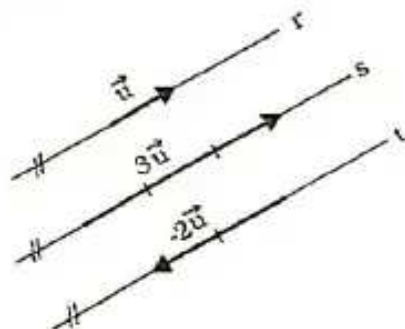
Dado um vetor $\vec{v}$ e um escalar não nulo k, o vetor k . $\vec{v}$ possui:

a) mesma direção de $\vec{v}$.

b) módulo igual ao módulo de $\vec{v}$ multiplicado por k.

c) mesmo sentido de $\vec{v}$, se $k > 0$.

d) sentido contrário ao de $\vec{v}$, se $k < 0$.

Exemplo:

Ponto Médio de Um Segmento

Seja determinar as coordenadas do ponto M, médio do segmento de reta $\overline{AB}$.

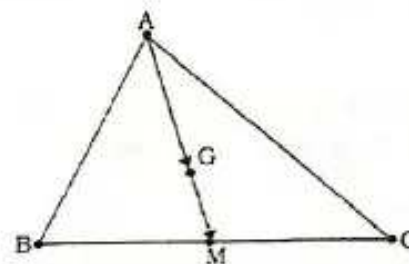
"As coordenadas do ponto médio de um segmento são iguais à média aritmética das coordenadas dos extremos".

Exemplo:

Sendo A = (2, 5, -3) e B = (4, -1, 2), o ponto M médio do segmento $\overline{AB}$ é tal que:

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(2,5,-3)+(4,-1,2)}{2} = \frac{(6,4,-1)}{2} = \left(3, 2, \frac{-1}{2}\right)$$

Baricentro de Um Triângulo

É sabido, da Geometria Plana, que mediana de um triângulo é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto, e que o baricentro (ponto de encontro das três medianas de um triângulo) divide cada mediana na razão 2 para 1, ou seja, em uma mesma mediana, a distância do vértice ao baricentro vale sempre o dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto. Assim, consideramos um triângulo ABC em que M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e G é o baricentro.

Na figura acima consideremos os segmentos orientados $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{GM}$ que têm a mesma direção e sentido, porém o módulo de $\overrightarrow{AG}$ é o dobro do $\overrightarrow{GM}$ então

$$\overrightarrow{AG} = 2.\overrightarrow{GM}$$

$$G - A = 2 . (M - G)$$

$$G - A = 2M - 2G$$

$$3G = A + 2M$$

Como M é médio $\overline{BC}$, temos que $M = \frac{B+C}{2}$. Substituindo-se tal relação, obtemos

$$3G = A + 2 . \frac{B+C}{2}$$

$$3G = A + B + C$$

$$\boxed{G = \frac{A+B+C}{3}}$$

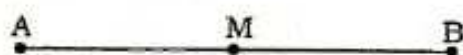
"As coordenadas do baricentro de um triângulo são iguais à média aritmética das coordenadas dos vértices do triângulo'.

Exemplo:

Em um triângulo ABC, sendo A (2, 5), B (1, 5) e C (4, 1)...

Em um triângulo ABC, onde A (2, 5) e B (1, 5) e C (4, 1) seu baricentro é dado por

$$G=\frac{A+B+C}{3}=\frac{(2,5)+(1,5)+(4,1)}{3}=\frac{(7,11)}{3}=\left(\frac{7}{3};\frac{11}{3}\right)$$

A M B

Para isso consideremos os segmentos orientados $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ que têm a mesma direção, o mesmo sentido e módulos iguais, ou seja, são equipolentes. Portanto têm as mesmas componentes. Logo:

$\overline{AM}=\overline{MB}$

$M-A=B-M$

$2M=A+B$

$$M=\frac{A+B}{2}$$

Área de Um Triângulo no R^2

Dado um triângulo de vértice $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, do R^2, sua área S pode ser determinada como mostramos a seguir:

$$S=\frac{1}{2}.|\det|, \text{onde } \det=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

NOTA: Se três pontos do R^2 são **colineares**, não existe triângulo cujos vértices sejam esses pontos, logo o determinante acima mencionado é nulo.

Exemplo:

A área do triângulo de vértices M (2, 1), N(0, 3) e P(1, 1) é dada por

$$S=\frac{1}{2}.|\det|=\frac{1}{2}.|2|=1u.a$$

NOTA: A abreviação **u.a.** significa unidade de área.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Para obtermos a área de um polígono convexo do R^2, devemos dividir o polígono em triângulos que partam de um único vértice, calcular suas respectivas áreas e depois somá-las. Porém, existe um dispositivo que nos permite obter a área de um polígono convexo do R^2 de uma forma bem mais fácil. Abordaremos tal método no exemplo que se segue.

Exemplo:

Para determinarmos a área do quadrilátero de vértices A (1, 5), B (3, 4), C (5, 1) e D (2, -2) formemos um "determinante" meio diferente daquele a que estamos acostumados. Não esqueça de repetir as coordenadas do primeiro vértice ao fim do "determinante".

$$S=\frac{1}{2}.|\det|=\frac{1}{2}.|2|=1u.a$$

Exercícios

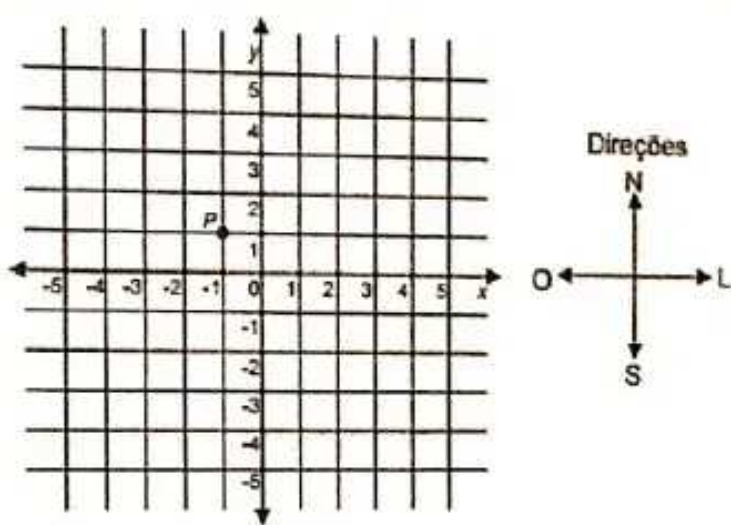
1) Dado o ponto A = (3, -2, 1), determine

a) a projeção de A ...

b) ...

2) **(ENEM)** Observou-se que todas as formigas de um formigueiro trabalham de maneira ordeira e organizada. Foi feito um experimento com duas formigas e os resultados obtidos foram esboçados em um plano cartesiano no qual os eixos estão graduados em quilômetros. As duas formigas partiram juntas do ponto O, origem do plano cartesiano xOy. Uma delas caminhou horizontalmente para o lado direito, a uma velocidade de 4 km/h. A outra caminhou verticalmente para cima, à velocidade de 3 km/h. Após 2 horas de movimento, quais as coordenadas cartesianas das posições de cada formiga?

a) (8;0) e (0;6).
b) (4;0) e (0;6).
c) (4;0) e (0;3).
d) (0;8) e (6;0).
e) (0;4) e (3;0).

3) **(ENEM)** Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô "anfíbio" que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra P, na ilustração.

A direção norte-sul é a mesma do eixo y, sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento de y, e a direção leste-oeste é a mesma do eixo x, sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de x.

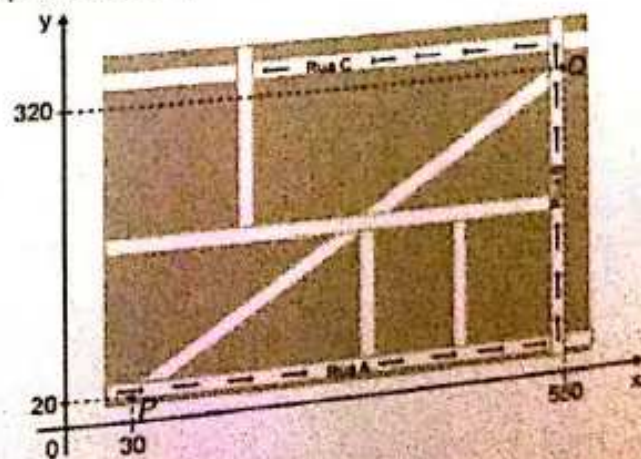
Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano.

Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, a posição do robô, no plano cartesiano, será

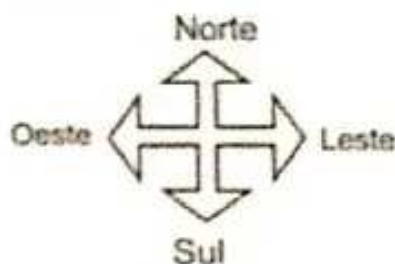
a) (0 ; 2).
b) (0 ; 3).
c) (1 ; 2).
d) (1 : 4).
e) (2 ; 1).

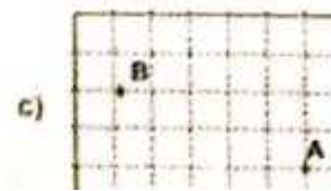
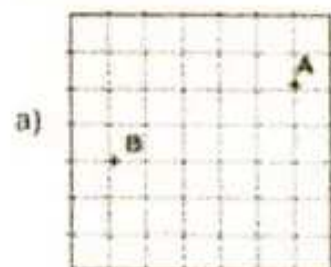
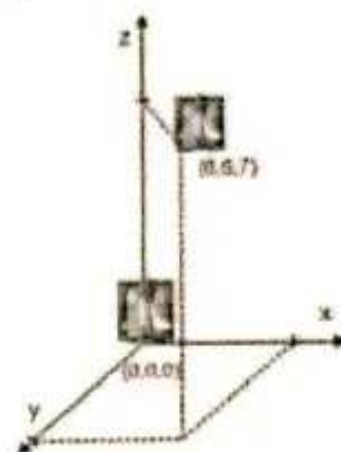
4) **(ENEM)** Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado ... realizado por um ônibus nessa rota e ...

~~A no plano xy.~~
c) a projeção de A no plano yz.
d) a projeção de A no plano xz.
e) a projeção de A no eixo x.
f) a projeção de A no eixo y.
g) a projeção de A no eixo z.
h) o simétrico de A em relação ao plano xy.
i) o simétrico de A em relação ao plano yz.
j) o simétrico de A em relação ao plano xz.
k) o simétrico de A em relação ao eixo x.
l) o simétrico de A em relação ao eixo y.
m) o simétrico de A em relação ao eixo z.
n) o simétrico de A em relação à origem.

cado pelas setas, realizado por ... a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.

Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

a) (290 ; 20).
b) (410 ; 0).
c) (410 ; 20).
d) (440 ; 0).
e) (440 ; 20).

5) **(ENEM)** Cleber precisava ir a uma papelaria. Sabia a localização do ponto de ônibus em que deveria descer. Quando desceu do ônibus, andou $\frac{1}{2}$ de 1 km para o Sul, depois 2 km para o Leste, em seguida 3 mil metros para o Norte e por fim $\frac{10}{4}$ de 1 km para Oeste. Observe a rosa dos ventos a seguir.

Considere uma malha quadriculada formada por quadrados cujos lados medem 500 m.

Se a localização inicial de Cleber é dada pelo ponto A e a localização final é dada pelo ponto B, qual malha representa as localizações inicial e final de Cleber, de acordo com a descrição?

6) **(ENEM)** Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7), conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros.

Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3 km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z, então o foguete atingiu a posição

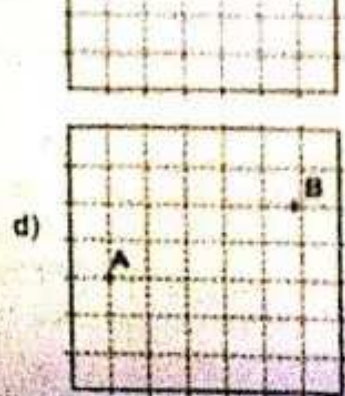
a) (17, 3, 9).
b) (8, 3, 18).
c) (6, 18, 3).
d) (4, 9, - 4).
e) (3, 8, 18).

7) Dados os pontos A (3, 4), B (-2, 3) e C (0, 5), determine as componentes do vetor nos casos a seguir.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
b) $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$
c) $\vec{u} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$
d) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

8) Determine os valores dos números reais a, b e c na igualdade a(2, 1, -3) + b(1, 0, 4) + c(-1, 0, 2) = (13, 4, -10).

9) Dados os pontos B (3, 2) e C (1, 6), determine as coordenadas do ponto A, sabendo que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$.

10) Determine as coordenadas dos pontos P e Q que são, respectivamente, os simétricos do ponto A em relação ao ponto B e do ponto B em relação ao ponto A, nos seguintes casos:

a) A (2, 5) e B (6, 1)

b) A (3, 4, -2) e B (7, 0, -4)

11) No triângulo ABC, de vértices A (2, 1), B (6, -3) e C (4, -7), determine

a) as coordenadas do ponto médio do lado AB.

b) as coordenadas do segmento orientado $\vec{AM}$, sendo M o ponto médio do lado BC.

c) as coordenadas do baricentro desse triângulo.

12) Em R^3, A (4, -1, 2) é vértice do triângulo ABC, onde M (-1, 5, 4) é o ponto médio do lado BC. Nessas condições, a soma das coordenadas do baricentro desse triângulo vale:

a) 6
b) 7
c) 8
d) $\frac{15}{3}$
e) $\frac{19}{3}$

13) Sabe-se que M (1, 2), N (2, 4) e P (5, 3) são os pontos médios dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

14) Dados os pontos A (6, 5, -2) e B (12, -1, 1), determine as coordenadas de dois pontos interiores ao segmento AB que o dividem em três segmentos de mesmo comprimento.

15) **(ITA)** Três pontos de coordenadas (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

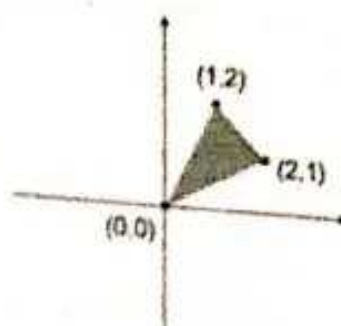
a) (-b, -b)
b) (2b, -b)
c) (4b, -2b)
d) (3b, -2b)

16) Em R^2, calcule 2x + y se os vértices do paralelogramo ABCD são A (1, 5), B (2, y), C (-2, 1) e D (x, 0).

17) Determine as coordenadas de um ponto P, exterior ao segmento AB, mais próximo de B, tal que AP = 5PB, sabendo que A (-3, 5, 7) e B (1, -7, 15).

18) Para estudar o movimento de um astro que se desloca com velocidade constante em trajetória retilínea, um astrônomo fixou um sistema ortogonal, contendo essa trajetória, e adotou nos eixos coordenados uma unidade conveniente para grandes distâncias. Em certo momento, o cientista observou que o astro estava no ponto A (10, 6, -18) e quatro minutos depois estava no ponto B (24, 12, 4). Nessas condições, a soma das coordenadas da posição do astro dois minutos e 40 segundos após a passagem pelo ponto A vale:

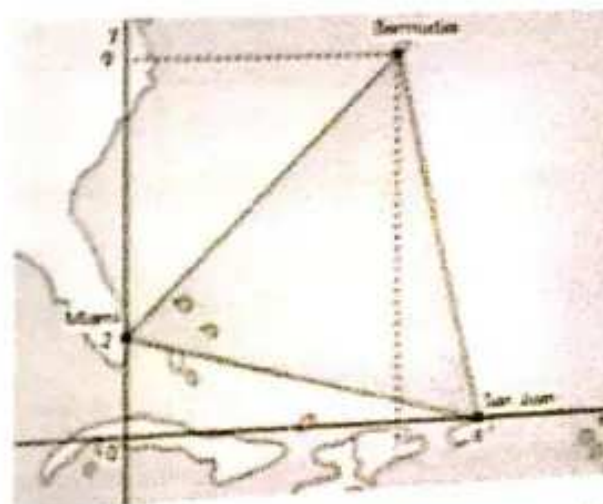
a) 12
b) 15
c) 16
d) 18
e) 22

19) Determine as coordenadas do vértice D do paralelogramo ABCD, em que A (1, 3, 4), B (2, 7, 8) e C (5, 6, 7).

Quanto vale a área da figura?

a) 1
b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{3}{2}$
d) $2\sqrt{2}$
e) 3

23) **(UERJ)** Na região conhecida como Triângulo das Bermudas, localizada no oceano Atlântico, é possível formar um triângulo com um vértice sobre a cidade porto-riquenha de San Juan, outro sobre a cidade estadunidense de Miami e o terceiro sobre as ilhas Bermudas.

A figura abaixo mostra um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, com os vértices do triângulo devidamente representados. A escala utilizada é 1:17.000.000, e cada unidade nos eixos cartesianos equivale ao comprimento de 1 cm.

Adaptado de http://mundoestranho.abril.com.br

Calcule, em km², a área do Triângulo das Bermudas, conforme a representação plana da figura.

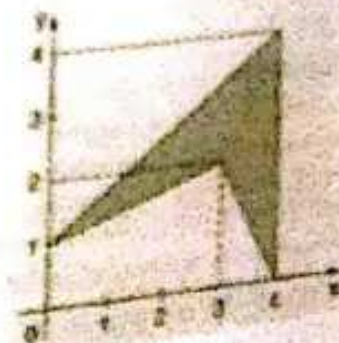
24) Determine a área do quadrilátero convexo ABCD, sendo A (1, 2), B (2, 6), C (5, 5) e D (3, 3).

25) Considere a figura abaixo. A área da região plana em destaque vale:

20) Dois vértices consecutivos de um paralelogramo têm coordenadas (3, 6) e (7, 8). Determine as coordenadas dos outros dois vértices, sabendo que as diagonais desse quadrilátero intersectam-se no ponto (5, 4).

21) Determine a área do triângulo de vértices (2, 3), (4, 0) e (1, 1).

22) **(PUC)** A região, na figura abaixo, é descrita pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y \le 3 \\ y < 2x \\ 2y \ge x \end{cases}$$

26) **(PUC)** Os pontos (0, 8), (3, 1) e (1, y) do plano, são colineares. O valor de y é igual a:

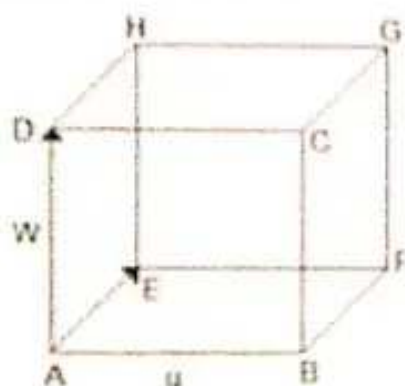
a) 5
b) 6
c) 17/3
d) 11/2
e) 5,3

27) Se ABCD é um quadrado, o vetor $\vec{AB} - \vec{BC}$ é igual a:

a) $\vec{DB}$
b) $\vec{CA}$
c) $\vec{BD}$
d) $\vec{CB}$
e) $\vec{AC}$

28) **(PUC)** ABCD é um quadrado de lado a. O vetor $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$ tem módulo:

a) $\sqrt{2}\,a$
b) $(2 - \sqrt{2})a$
c) $2\sqrt{2}\,a$
d) $(2 + \sqrt{2})a$
e) 3a

29) Considere um cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H (como mostra a figura) e os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dados por $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AE}$ e $\vec{w} = \vec{AD}$

Sejam P o ponto médio do segmento AG e Q o ponto do segmento DB tal que QB = 2DQ. Determine os números reais a, b e c tais que $\vec{PQ} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

30) **(UERJ)** Duas pessoas A e B decidem se encontrar em um determinado local, no intervalo de tempo ente 0h e 1h. Para cada par ordenado (x_0, y_0), pertencente à região sombreada do gráfico abaixo, x_0, y_0 representam, respectivamente, o instante de chegada de A e B ao local de encontro.

y(h)

1

Gabarito

1)
a) (3, -2, 0)
b) (0, -2, 1)
c) (3, 0, 1)
d) (3, 0, 0)
e) (0, -2, 0)
f) (0, 0, 1)
g) (3, -2, -1)
h) (-3, -2, 1)
i) (3, 2, 1)
j) (3, 2, -1)
k) (-3, -2, -1)
l) (-3, 2, 1)
m) (-3, 2, -1)

2) a

3) c

4) e

5) e

6) b

7)
a) (-5, -1)
b) (2, 2)
c) (-5, 7)
d) (0,0)

8) a = 4, b = 2 e c = 3

9) (2, 4)

10)
a) P = (10, -7) e Q = (-2, 11)
b) P = (11, -4, -6) e Q = (-1, 8, 0)

11)
a) (4, -1)
b) (3, -6)
c) (4, -3)

12) b

13) (4, 1), (6, 5) e (-2, 3)

14) (8, 3, -1) e (10, 1, 0)

15) c

16) 0

17) (2, -10, 17)

18) e

19) (4, 2, 3)

20) (3, 0) e (7, 2)

21) 3,5 u.a.

22) c

23) 1 112 650 km²

24) 7,5 u.a

25) a

26) c

27) a

28) c

29) $a = -\frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$

30)
a) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

Anotações

Determine as coordenadas dos pontos da região interior ao quadrado da figura, os quais indicam:

a) a chegada de ambas as pessoas ao local de encontro exatamente aos 40 minutos;

b) que a pessoa B tenha chegado ao local de encontro aos 20 minutos e esperado por A durante 10 minutos.

Capítulo XIII

PRODUTO ESCALAR

Definição

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de um mesmo espaço vetorial (R^2 ou R^3), o **produto escalar** ou **interno** desses vetores, representado por $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ é definido como sendo a soma dos produtos das componentes dos vetores, ordenadamente.

No R^2: Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ temos que:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = x_1\,.\,x_2 + y_1\,.\,y_2$$

No IR^3. Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, então:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = x_1\,.\,x_2 + y_1\,.\,y_2 + z_1\,.\,z_2$$

Exemplo:

O produto escalar dos vetores $\vec{a} = (2, 1, 3)$ e $\vec{b} = (4, 0, 2)$ é dado por $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 2\,.\,4 + 1\,.\,0 + 3\,.\,2 = 14$

Propriedades do Produto Escalar

Sendo vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ do R^2 ou R^3, valem as propriedades:

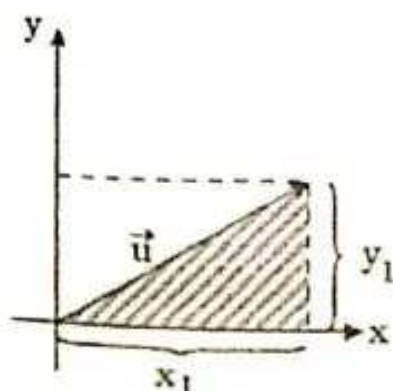
1) **comutativa:** $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

2) **distributiva:** $\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$

3) $\vec{u}\,.\,\vec{u} > 0, \forall\,\vec{u} \neq \vec{0}$

4) $\vec{u}\,.\,\vec{u} = 0 \leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Módulo de Um Vetor

O módulo de um vetor $\vec{u}$, representado por $|\vec{u}|$, é o seu comprimento. Dado um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1)$ do R^2 tomemos um representante que tenha como origem a origem do sistema de eixos.

Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo destacado na figura acima:

Propriedades do Módulo

Sendo $\vec{v}$ um vetor do R^2 ou R^3 e k um escalar não nulo, temos que:

1) $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\,.\,\vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$ ou $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2$

2) $|k\,.\,\vec{v}| = |k|\,.\,|\vec{v}|$

Exemplo:

Seja desenvolver o produto notável $(\vec{u} + \vec{v})^2$:

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}\,.\,\vec{u} + \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}\,.\,\vec{u} +$
$+ \vec{v}\,.\,\vec{v} = \vec{u}^2 + 2\,.\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,.\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + |\vec{v}|^2$

Vetor Unitário

Um vetor é unitário quando tem módulo igual a 1. Assim, **$\vec{u}$ é unitário $\leftrightarrow |\vec{u}| = 1$.**

Exemplo:

O vetor $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, a\right)$ é unitário, se:

$|\vec{v}| = 1$

$\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + a^2} = 1$

Elevando-se ambos os membros ao quadrado:

$\left(\sqrt{\frac{9}{25} + a^2}\right)^2 = 1^2$

$\frac{9}{25} + a^2 = 1$

$a^2 = 1 - \frac{9}{25}$

$a^2 = \frac{16}{25}$

$a = \pm\frac{4}{5}$

Versor de Um Vetor

Dado um vetor $\vec{u}$, seu **versor**, representado por $\vec{u}^0$, é um vetor unitário que tem a mesma direção e sentido que o vetor $\vec{u}$.

$|\vec{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

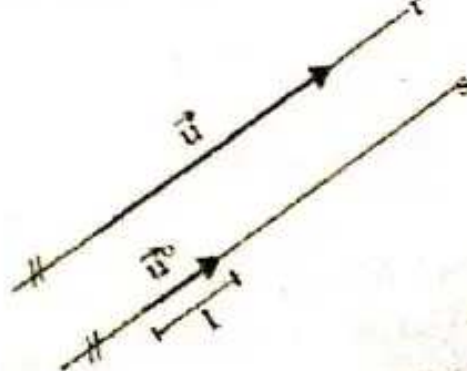
Analogamente, se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ é um vetor do R^3, então

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Exemplo:

O vetor $\vec{u} = (-3, 4, 12)$ tem módulo:

$|\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$

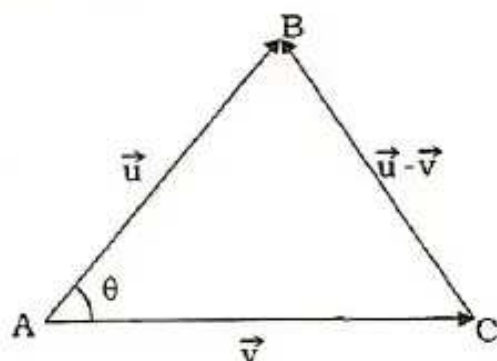
$$\vec{u}^0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Exemplo:

Considerando o vetor $\vec{v} = (-8, -9, 12)$, o seu versor é dado por:

$$\vec{v}^0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-8, -9, 12)}{\sqrt{(-8)^2 + (-9)^2 + 12^2}} = \frac{(-8, -9, 12)}{\sqrt{64 + 81 + 144}}$$

$$= \frac{(-8, -9, 12)}{\sqrt{289}} = \frac{(-8, -9, 12)}{17} = \left(\frac{-8}{17}, \frac{-9}{17}, \frac{12}{17}\right)$$

Ângulo Entre Dois Vetores

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, do IR^2, seja determinar o ângulo por eles formado. A figura nos mostra a representação de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

Demonstra-se através da aplicação de lei dos co-senos no triângulo ABC acima que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$$

E, portanto,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Analogamente, tal forma também é aplicável para dois vetores do R^3.

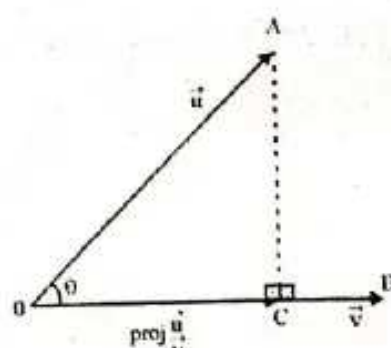
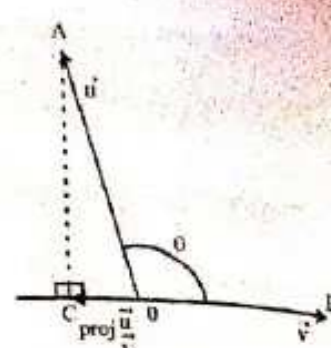
Exemplos:

1) O produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de módulos respectivamente iguais a 6 e 10, que formam um ângulo de 30° é dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta = 6.10.\cos 30° = 60.\frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

2) Determine, por exemplo, o ângulo formado pelos vetores $\vec{x} = (2, 4)$ e $\vec{y} = (-2, 6)$.

Seja θ tal ângulo. Logo,

$$\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{2.(-2) + 4.6}{\sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 6^2}} = \frac{20}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{40}} =$$

Devemos observar que em ambos os casos a $proj_{\vec{v}}^{\vec{u}}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$, e o sentido pode ser o mesmo, quando $0° < \theta < 90°$ (figura1), ou contrário ao de $\vec{v}$ quando $90° < \theta < 180°$ (figura 2).

Chamemos de componente de $\vec{u}$ em $\vec{v}$, notada por $comp_{\vec{v}}^{\vec{u}}$ ao módulo da $proj_{\vec{v}}^{\vec{u}}$ dotado de sinal positivo, no caso de $proj_{\vec{v}}^{\vec{u}}$ ter o mesmo sentido de $\vec{v}$ (figura 1), ou de sinal negativo, no caso de $proj_{\vec{v}}^{\vec{u}}$ e $\vec{u}$ terem sentidos contrários (figura 2).

Considerando o triângulo OAC da figura 1, temos que $\overline{OA} = |\vec{u}|$ e $\overline{OC} = proj_{\vec{v}}^{\vec{u}}$. Assim:

$$\cos\theta = \frac{comp_{\vec{v}}^{\vec{u}}}{|\vec{u}|}$$

$$comp_{\vec{v}}^{\vec{u}} = |\vec{u}|.\cos\theta$$

Como θ é ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é sabido que $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$. Então substituindo-se o valor de θ na equação anterior.

$$comp_{\vec{v}}^{\vec{u}} = |\vec{u}| \cdot \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$comp_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Note que se $90° < \theta < 180°$ (figura 2), $\cos\theta < 0$ e então $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, o que implica que $comp_{\vec{v}}^{\vec{u}} < 0$, o que indica o sentido de projeção é contrário ao de $\vec{v}$ como era esperado.

Como a projeção tem a mesma direção de $\vec{v}$, ela é paralela ao seu versor $\vec{v}^0$ e, portanto, múltipla, proporcional a ele. Vamos obtê-la através da fórmula:

$$proj_{\vec{v}}^{\vec{u}} = comp_{\vec{v}}^{\vec{u}} \cdot \vec{v}^0 \text{ ou } proj_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Daí, conluímos que $\theta = 45°$.

Projeção de Um Vetor Sobre Outro

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, do R^2 ou R^3, seja obter o vetor projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ que representaremos por $proj_{\vec{v}}^{\vec{u}}$. As figuras abaixo nos mostram os casos de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não perpendiculares, pois neste caso a projeção de um sobre o vetor será nula.

$$proj_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

Exemplo:

A projeção do vetor $\vec{a} = (6, 2)$ sobre o vetor $\vec{b} = (3, -4)$ é dada por:

$$proj_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{6.3 + 2.(-4)}{\left(\sqrt{3^2 + (-4)^2}\right)^2} \cdot (3, -4) = \frac{10}{25} \cdot (3, -4) = \left(\frac{6}{5}, \frac{-8}{5}\right)$$

Distância Entre Dois Pontos

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, do IR^2, seja determinar a distância d entre eles.

Na figura acima, observamos que a distância entre os pontos A e B é igual ao comprimento do segmento orientado AB. Daí:

[illegible]

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

De forma análoga, se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são vetores do IR^3 a distância d entre eles é dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

"A distância entre dois pontos é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas desses pontos, ordenadamente"

Exemplo:

A distância entre os pontos M (20, 24, 16) e N (11, 0, -16) é dada por

$$d = \sqrt{(11 - 20)^2 + (0 - 24)^2 + (-16 - 16)^2} =$$
$$= \sqrt{(-9)^2 + (-24)^2 + (-32)^2} = \sqrt{81 + 576 + 1024} =$$
$$= \sqrt{1681} = 41$$

Vetores Paralelos

No capítulo anterior, nós observamos que os vetores v e kv, k ∈ R, tinham a mesma direção, ou seja, eram paralelos. Daí podemos dizer que dois vetores paralelos são múltiplos, têm componentes proporcionais.

No IR^2: $\vec{u} = (x_1, y_1) // \vec{v} = (x_2, y_2) \leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

No IR^3: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) // \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

Exemplo:

Se os vetores u= (a + 1, 6) e v= (12, 8) são paralelos, então

[illegible]

Assim, aplicando a fórmula do produto escalar:

[illegible]

"Dois vetores são ortogonais quando o produto escalar entre eles vale zero"

Exemplo:

Se os vetores u= (m, 5, 2) e v= (-1, m, 7) são perpendiculares, temos que

[illegible]

$$m = \frac{14}{4}$$

$$m = \frac{7}{2}$$

NOTA: Em IR^2 dado um vetor, para obtermos um vetor ortogonal a ele, basta trocar a ordem de suas componentes e o sinal de uma delas.

Assim dado o vetor u= (a, b), um vetor ortogonal a ele será o vetor v= (b, -a)

Exemplo:

São ortogonais os vetores

a) u= (2, 3) e v = (3, -2)

b) u= (4, -3) e v = (3, 4)

c) u= (3, 5) e v = (-5, 3)

Exercícios

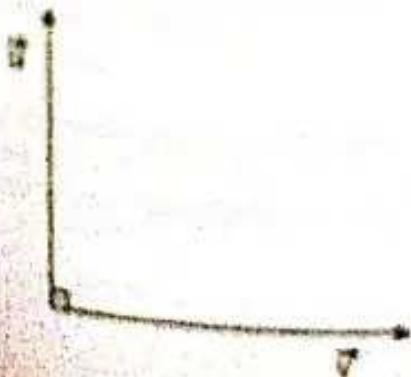
1) Determine o produto escalar entre os vetores

a) u = (2, 3) e v = (-4, 1)

b) u = (3, -2, 1) e v = (2, 2, 3)

c) u = (-sen θ, cos θ) e v = (sen θ, cos θ)

2) Em IR^2, sendo $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (4, 3)$ e $\vec{c} = (0, 2)$, calcule

[illegible]

8) **(PUC)** Assinale o valor da área do quadrado de vértices (−2, 9), (4,6), (1,0) e (−5,3).

a) 20
b) 25
c) $\sqrt{45}$
d) 45
e) $\sqrt{60}$

9) **(FUVEST)** Um grande vale é cortado por duas estradas retilíneas, E_1 e E_2, que se cruzam perpendicularmente, dividindo-o em quatro quadrantes. Duas árvores que estão num mesmo quadrante têm a seguinte localização: a primeira dista 300 m da estrada E_1 e 100 m da estrada E_2, enquanto a segunda se encontra a 600 m de E_1 e a 500 m de E_2.

A distância entre as duas árvores é:

a) 200m
b) 300m
c) 400m
d) 500m

10) **(UERJ)** Um sistema cartesiano ortogonal é associado à planta de uma cidade plana de modo que o eixo Ox é orientado de oeste para leste, o eixo Oy é orientado de sul para norte e a unidade adotada em cada eixo é o quilômetro. Um automóvel que parte do ponto A do terceiro quadrante distante 3 km do eixo Ox e 4 km do eixo Oy percorre o seguinte trajeto: 15 km para o leste, 3 km para o norte, 3 km para o oeste e, finalmente, 2 km para o norte, estacionando em um ponto B. O ponto B, em relação a esse sistema de coordenadas, e a distância entre os pontos A e B são:

a) B(9, 1) e AB = 13 km
b) B(8, 2) e AB = 13 km
c) B(9, 1) e AB = $\sqrt{157}$ km
d) B(8, 2) e AB = $\sqrt{157}$ km

11) Um sapo parte da origem de um sistema de coordenadas pulando sempre um número inteiro de unidades, alternadamente para a direita e para cima. A sequência abaixo mostra o número de unidades percorridas em cada pulo:

2, 4, 6, 3, 1, 7, 4, 2, 2, 4

Se o primeiro pulo foi para a direita, no fim desses dez pulos a sua distância ao ponto (0, 12) vale:

a) 25
b) 22
c) 20
d) 17
e) 16

12) **(UERJ)** Duas partículas P e Q partem simultaneamente da origem, movimentando-se para cima (C), ou para a direita (D), ou para a esquerda (E), com velocidade de 1 metro por segundo no plano cartesiano. Essas trajetórias

a) 96
b) 126
c) 172
d) 190

13) **(PUC)** O triângulo PQR, no plano cartesiano, de vértices P = (0, 0), Q = (6, 0) e R = (3, 5), é:

a) equilátero
b) isósceles, mas não equilátero
c) escaleno
d) retângulo
e) obtusângulo

14) **(PUC)** Se os pontos A = (−1, 0), B = (1, 0) e C = (x, y) são vértices de um triângulo equilátero, então a distância entre A e C é

a) 1
b) 2
c) 4
d) $\sqrt{2}$
e) $\sqrt{3}$

15) **(PUC)** Sabendo que o ponto B = (3, b) é equidistante dos pontos A = (6,0) e C = (0,6), então b vale:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

16) **(UNICAMP)** Em R^2, quais as coordenadas do ponto M do eixo $\overline{ox}$ para o qual é mínima a soma das distâncias (AM + MB) sendo A (1, 5) e B (4, 1).

17) Em R^3, calcule **t** para que os pontos (1, -1, 3), (3, 5, 7) e (4, 8, t) estejam alinhados.

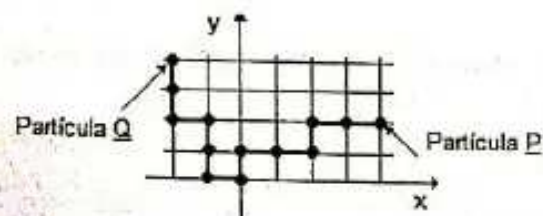
18) **(PUC)** Em R^3, calcule 4x − y para que os vetores $\vec{u} = (x-1, y+2, 3)$ e $\vec{v} = (1, y-1, 4)$ tenham a mesma direção.

19) Calcule a medida do ângulo formado pelos vetores $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

20) Calcule o ângulo interno B do triângulo de vértices $A(2\sqrt{2}, 2, 3)$, $B(\sqrt{2}, 1, 2)$ e $C(2\sqrt{2}, 0, 3)$ do R^3.

21) Em R^3, para que os vetores $\vec{\alpha} = (x, 2x, 3)$ e $\vec{\beta} = (x, -4, 4)$ formem um ângulo agudo, pode-se afirmar, sobre o valor de x, que:

a) 8 < x < 12
b) x < 8 ou x > 12
c) 2 < x < 6

são periódicas compostas pela sequência de movimentos CDD e ECC, respectivamente, como exemplifica o gráfico abaixo, representando a ocorrência descrita num prazo de 6 segundos. Observe:

Nessas condições, a distância entre as partículas P e Q, após 3 minutos, vale em metros, aproximadamente

d) $x < 2$ ou $x > 6$
e) $x > 0$

22) Em R^2, calcule x de modo que os vetores $\vec{a} = (x, 1)$ e $\vec{b} = (x, -4)$ formem ângulo obtuso.

23) Em R^3, calcule x de modo que os pontos A(2, −1, 0), B(4, 2, 3) e C(x, x, 5) formem um triângulo retângulo em A.

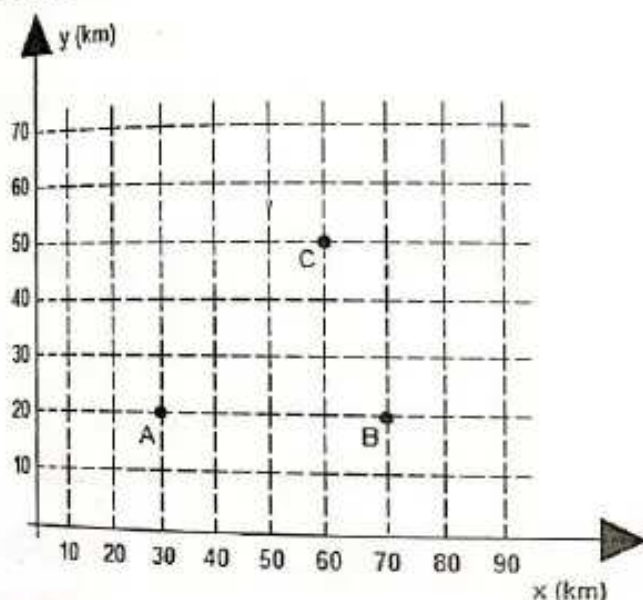
24) Em R^3, sendo **ABCD** um quadrilátero de vértices A (m, m, m), B (1, 2, 3), C (0, -1, -2) e D (4, 3, 0), calcule m sabendo que as diagonais de **ABCD** são ortogonais.

25) Em R^2, o quadrilátero **ABCD**, com vértices A = (0, 0), B = (0, 4), C = (3, 1), tem diagonais perpendiculares. Calcule D impondo a condição:

a) D pertence ao eixo horizontal (abscissas)
b) D pertence ao conjunto $\{(\alpha, 6 - \alpha)\}$, $\alpha \in R$.

26) **(FGV)** Em R^3, considere os vetores $\vec{\alpha} = (n, 2, -3)$ e $\vec{\beta} = (n, -n, 1)$.

a) Exprima $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ em função de n.
b) Determine n para $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.
c) Determine n para que $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ seja mínimo.

27) **(ENEM)** Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve a conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal as antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65; 35)
b) (53; 30)
c) (45; 35)
d) (50; 20)
e) (50; 30)

28) V_1, V_2, V_3 e V_4 são vetores não nulos. Cada elemento a_{ij} da matriz A, apresentada a seguir, é o produto escalar de V_i por V_j.

30) Um avião taxia (preparando para decolar) a partir de um ponto que a torre de controle do aeroporto considera a origem dos eixos coordenados, com escala em metros. Ele segue em linha reta até o ponto (400, -300) onde realiza uma curva de 90° no sentido anti-horário, seguindo, a partir daí, em linha reta. Após algum tempo, o piloto acusa defeito no avião, relatando a necessidade de abortar a decolagem. Se, após a mudança de direção, o avião percorre 1000 m até parar. As coordenadas do ponto do plano, para o qual a torre de controle deve encaminhar a equipe de resgate são:

a) (1000, 500)
b) (1400, 700)
c) (900, 200)
d) (800, 600)
e) (1200, 300)

31) **(UERJ)** A tabela a seguir apresenta os preços unitários de três tipos de frutas e os números de unidades vendidas de cada uma delas em um dia de feira.

FRUTAS	PREÇO POR UNIDADE (EM REAIS)	NÚMERO DE UNIDADES VENDIDAS
mamão	1	x
abacaxi	2	y
melão	3	z

A arrecadação obtida com a venda desses produtos pode ser calculada pelo produto escalar de $\vec{p} = (1, 2, 3)$ por $\vec{u} = (x, y, z)$.

Determine:

a) o valor arrecadado, em reais, com a venda de dez mamões, quinze abacaxis e vinte melões;
b) o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\vec{p}$ e $\vec{u}$, sabendo que x, y e z são respectivamente proporcionais a 3, 2 e 1.

32) **(UERJ)** As contas correntes de um banco são codificadas através de um número sequencial seguido de um dígito controlador. Esse dígito controlador é calculado conforme o quadro abaixo:

PROCESSO DE CODIFICAÇÃO DE CONTAS CORRENTES:

Número sequencial: abc → vetor $\vec{u} = (a, b, c)$

Ano de abertura: xyzw → vetor $\vec{v} = (y, z, w)$

Produto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot y + b \cdot z + c \cdot w$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o ângulo entre os vetores V_2 e V_3.

29) Se $|\vec{u} + \vec{v}| = 7$ e $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$, determine o valor do produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Digito controlador: d → é o resto da divisão do produto $\bar{u} \cdot \bar{v}$ pela constante 11; para resto 0 ou 10, d = 0.

A conta 643-5, aberta na década de 80, foi cadastrada no ano de:

a) 1985
b) 1986
c) 1987
d) 1988

33) (FUVEST) Em R^2, um foco luminoso está em P(4,-3) e ilumina o ponto Q(6, 2) depois de incidir em e sofrer reflexão. Determine:

a) As coordenadas do ponto de incidência em $\overleftrightarrow{OY}$.
b) A distância percorrida pela luz de P até Q (pelo caminho da reflexão).

Gabarito

1)
a) -5
b) -1
c) -1

2) -16

3) 13

4) ± 0,8

5) $\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7}\right)$

6) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$

7)
a) 10
b) $\sqrt{26}$

8) d

9) d

10) b

11) d

12) d

13) b

14) b

15) c

16) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

17) 9

18) 18

19) 135°

20) 60°

21) d

22) $-2 < x < 2$

23) $-\frac{14}{5}$

24) 5

25)
a) $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$
b) (-1, 7)

26)
a) $n^2 - 2n - 3$
b) -1 ou 3
c) 1

27) e

28) 45°

29) 6

30) a

31)
a) R$ 100,00
b) $\frac{5}{7}$

32) b

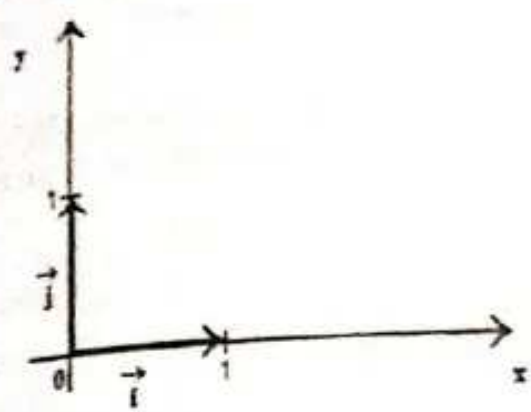
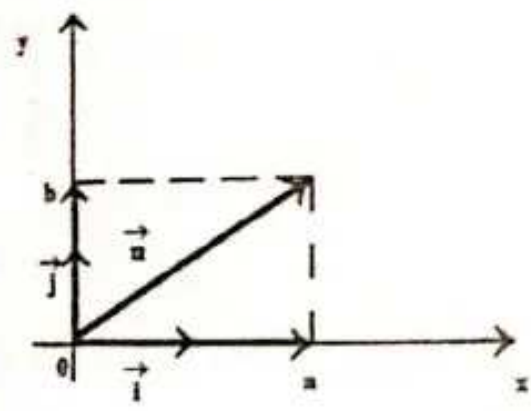
33)
a) (0, -1)
b) $5\sqrt{5}$

Anotações

Capítulo XIV

PRODUTO VETORIAL

Bases Canônicas

Sejam os vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$, unitários, nas direções dos eixos coordenados do R^2. O conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é chamado **base** canônica do R^2, e todo vetor do R^2 pode ser escrito, de uma forma analítica, como uma combinação dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Consideremos um vetor $\vec{u} = (a, b)$, do R^2.

Daí, podemos escrever que:

$\vec{u} = (a, b)$

$\vec{u} = (a, 0) + (0, b)$

$\vec{u} = a.(1,0) + b.(0,1)$

$\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j}$, que é a **forma analítica** de $\vec{u}$.

De forma análoga, no R^3, base canônica é $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Um vetor $\vec{u} = (a, b, c)$, em relação a esta base, pode ser escrito na forma:

$$\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$$

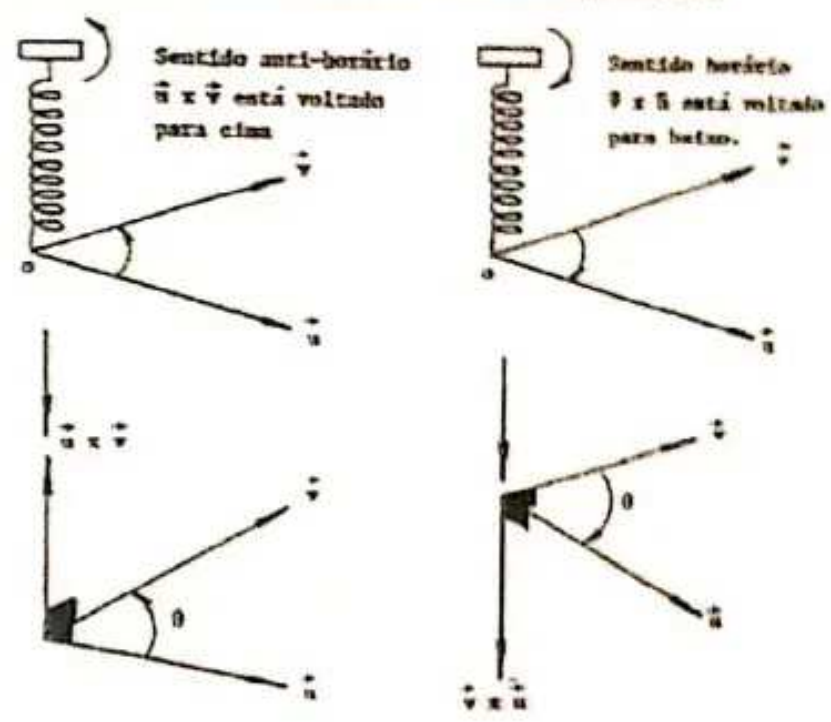
Produto Vetorial ou Externo

Dados dois vetores u e v, do R^3 define-se o **produto vetorial ou externo** de u com v, representado por $\vec{u} \times \vec{v}$ ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (lê-se: "u vetorial v"), como sendo um vetor cujas características são:

1) o **MÓDULO** é dado por $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\text{sen}\theta$, onde θ é o ângulo formado pelos vetores u e v.

2) a **DIREÇÃO** é simultaneamente perpendicular a u e v.

3) o **SENTIDO** é dado pela "Regra do saca-rolha"

Neste caso, para obtermos o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ devemos posicionar o "saca-rolhas imaginário" na origem comum aos vetores, fazendo um rotação no sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$, sempre descrevendo o menor arco possível. Se tal deslocamento for no sentido horário, o "saca-rolhas" desce e, portanto, o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é voltado para baixo, se no entanto o sentido for anti-horário, o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ terá sentido voltado para cima.

Podemos observar que os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ têm os mesmos módulo e direção, porém sentidos contrários.

A forma analítica de $\vec{u} \times \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, pode ser obtida resolvendo-se o determinante abaixo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Propriedades

1) Concluímos que o produto vetorial não é comutativo.

Exemplos:

1) Representaremos os vetores abaixo por suas formas analíticas:

a) $\vec{a} = (2, 1) = 2\vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{b} = (5, -2, 3) = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

2) Se os vetores abaixo são do R^3 obtenhamos suas componentes:

a) $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (4, -3, 1)$

b) $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} = (2, -1, 0)$

$\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$

2) "É nulo o produto vetorial de vetores que possuem a mesma direção, ou sejam individualmente nulos"

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0 \leftrightarrow \vec{u} // \vec{v} \vee \vec{u} = 0 \vee \vec{v} = 0$$

3) "Quando multiplicamos um dos vetores de um produto vetorial por um escalar (número real), o produto vetorial fica multiplicado por esse número"

$$(t\,\vec{u}) \times \vec{v} = t(\vec{u} \times \vec{v}), \forall\ t \in R$$

4) "Vale, no produto vetorial, a distributividade em relação à adição de vetores, tanto à esquerda quanto à direita".

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \omega) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \omega$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \omega = \vec{u} \times \omega + \vec{v} \times \omega$$

5) "A operação produto vetorial não é associativa".

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \omega) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \omega$$

6) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$

7) "O produto vetorial entre um vetor e ele mesmo é vetor nulo". (consequência da prop.2)

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

Exemplo:

Sendo $|\vec{\ }| =$ $|\vec{\ }| =$ $\theta =$, o ângulo formado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$, determinemos os valores de:

a) $|(3\,\vec{x}) \times \vec{y}| = |3\,\vec{x}||\vec{y}| \operatorname{sen} 30° = 3|\vec{x}||\vec{y}| \cdot \frac{1}{2} =$

$= 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 9$

b) $|\vec{x} \times (4\vec{x} + 2\vec{y})| = |\vec{x} \times (4\vec{x}) + \vec{x} \times (2\vec{y})| =$

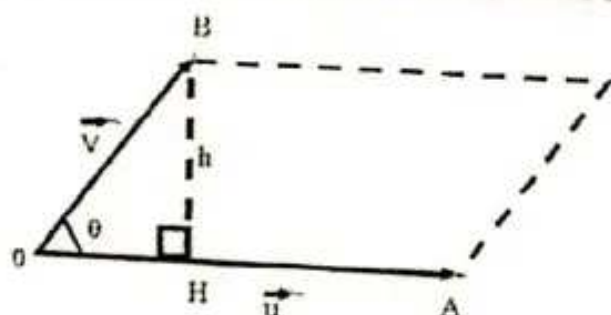
$= |4(\vec{x} \times \vec{x}) + 2(\vec{x} \times \vec{y})| = |2(\vec{x} \times \vec{y})| = 2|\vec{x} \times \vec{y}| =$

$= 2|\vec{x}||\vec{y}| \operatorname{sen} 30° = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6$

Aplicação Geométrica do Produto Vetorial

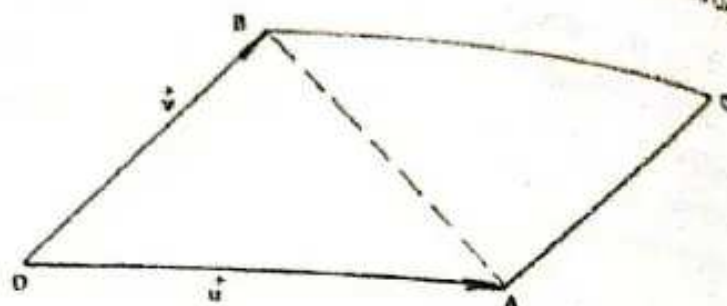
Consideremos dois vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, do R^3. Seja determinar a área S do paralelogramo por eles definido.

$S = b \cdot h$

$S = \overline{OA} \cdot h$ (I)

No triângulo OHB, temos:

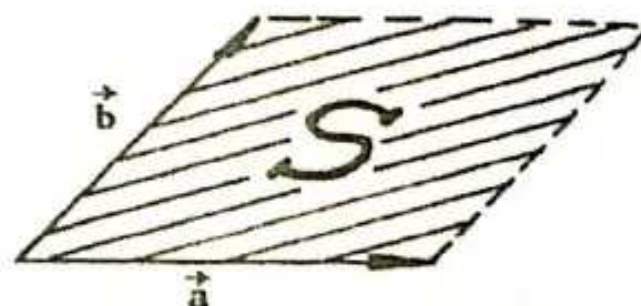
Conclusão:

"A área do paralelogramo definido por dois vetores do R^3 é numericamente igual ao módulo do produto vetorial desses vetores".

Na figura abaixo, podemos observar que os triângulos OAB e ACB são congruentes.

Portanto, são equivalentes (têm a mesma área), e daí a área de cada um deles será a metade da área do paralelogramo, ou seja:

$$S_{OAB} = S_{ACB} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

Exemplos:

1) Determinemos a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{a} = (2,1,0)$ e $\vec{b} = (1,3,2)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= \vec{i} \cdot 1 \cdot 2 + \vec{j} \cdot 0 \cdot 1 + \vec{k} \cdot 2 \cdot 3 \cdot - \vec{i} \cdot 0 \cdot 3 - \vec{j} \cdot 2 \cdot 2 - k \cdot 1 \cdot 1$

$\vec{a} \times \vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} = (2, -4, 5)$

$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{45}$

$S = 3\sqrt{5}$ u . a.

2) Um triângulo ABC tem vértices $A = (1,0,2)$, $B = (2,1,3)$ e $C = (1,1,3)$. Calculemos sua área.

Mostramos que a área de um triângulo do R^3 é igual à metade

$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{\overline{OB}}$

$h = \overline{OB} \cdot \operatorname{sen}\theta$

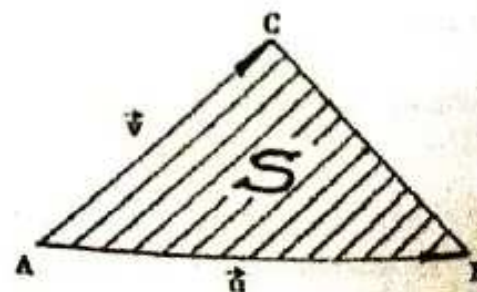
Substituindo-se o valor de h em (I)

$S = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \operatorname{sen}\theta$

Como $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são, respectivamente, os módulos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}\theta$

$S = |\vec{u} \times \vec{v}|$

da área do paralelogramo. E, para determinarmos a área do paralelogramo, necessitamos obter o produto vetorial entre dois vetores que partam de um mesmo de seus vértices. Neste exemplo, faltam-nos, por enquanto, os vetores. Vamos criá-los. Consideremos por exemplo, os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Assim:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, 3) - (1, 0, 2) = (1, 1, 1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 1, 3) - (1, 0, 2) = (0, 1, 1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= \vec{i} \cdot 1 \cdot 1 + \vec{j} \cdot 1 \cdot 0 + \vec{k} \cdot 1 \cdot 1 - \vec{i} \cdot 1 \cdot 1 - \vec{j} \cdot 1 \cdot 1 - \vec{k} \cdot 1 \cdot 0$

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{j} + \vec{k} = (0, -1, 1)$

$$S = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{u. a.}$$

Exercícios

1) Escreva na forma analítica os vetores de componentes

a) $(2, -4)$.
b) $(5, 0)$.
c) $(2, -2, 3)$.

2) Determine as componentes dos vetores do R^2 mostrados a seguir.

a) $3\vec{i} - 2\vec{j}$
b) $5\vec{j} + \vec{i}$

3) Determine as componentes dos vetores do R^3 mostrados a seguir.

a) $2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$
b) $6\vec{j} - 4\vec{i}$

4) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, -1, 2)$ e $\vec{w} = (0, 3, 1)$, determine:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$
b) $\vec{w} \times \vec{u}$
c) $\vec{v} \times (\vec{u} + \vec{w})$
d) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$
e) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$

5) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo de $30°$ e têm módulos respectivamente iguais a 5 e 6. Determine o módulo de $(2\vec{u}) \times (3\vec{v})$.

9) Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores do R^3, tais que $|\vec{a}| = 2$ e $|\vec{b}| = 3$, calcule $|\vec{a} \times \vec{b}|$ se

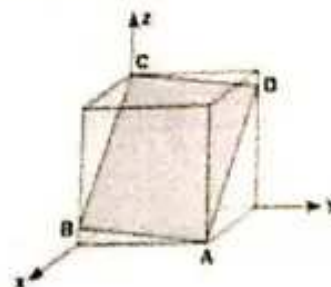
a) $(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$.
b) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ é máximo.
c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$.

10) **(UERJ)** Um projeto bem diferente deveria ser desenvolvido pelos candidatos inscritos em um concurso para arquiteto. O vencedor dessa modalidade foi aquele que determinou a área da região triangular, cujos vértices foram representados pelos pontos $A = (-2, 1, 1)$, $B = (-1, 2, 0)$ e $C = (1, 0, 1)$.

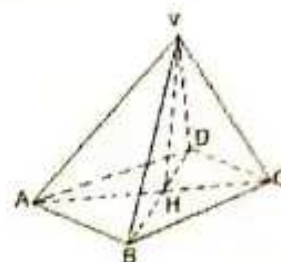
Determine a área correta encontrada pelo arquiteto vencedor.

11) Em R^3, calcule a medida da distância da origem à reta que contém os pontos $(1, 2, 3)$ e $(0, 1, 1)$.

12) **(PUC)** Ache um vetor (x, y, z), em R^3, tal que o produto vetorial $(1, 1, 1) \times (x, y, z)$ seja igual a $(1, 0, -1)$.

13) **(UERJ)** Observe a figura.

Ela representa um cubo de aresta 2, seccionado pelo plano ABCD; $B = (2, 0, t)$ e t varia no intervalo $[0, 2]$.

Determine a menor área do quadrilátero ABCD.

14) **(UERJ)** A figura do R^3 abaixo representa uma pirâmide de base quadrada ABCD, em que as coordenadas são $A(0, 0, 0)$, $B(4, 2, 4)$ e $C(0, 6, 6)$, e o vértice V é equidistante dos demais.

A partir da análise dos dados fornecidos, determine:

a) as coordenadas do vértice D e a medida de cada aresta da base;

b) as coordenadas cartesianas do ponto V, considerando ... é igual a 72.

b) as ... que o volume da pirâmide é ...

6) Determine a área do paralelogramo definido pelos vetores de componentes (2, 0, 1) e (1, 2, 1).

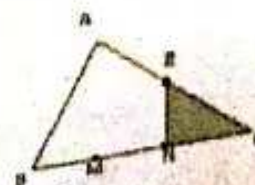
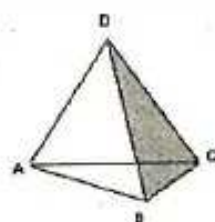
7) Determine as áreas do paralelogramo ABCD e do triângulo ABC, sabendo que A = (1, 2, 2), B = (2, 3, 4) e D = (1,0,-1).

8) (PUC) Se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$, o produto vetorial $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b})$ é igual a:

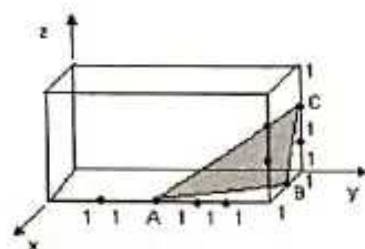
a) $4\vec{v}$
b) $5\vec{v}$
c) $6\vec{v}$
d) $7\vec{v}$
e) $12\vec{v}$

15) Em R^3, calcule a medida da área do paralelogramo cujas diagonais são equipolentes aos vetores $\vec{d_1} = (2, -1, 4)$ e $\vec{d_2} = (1, 3, -2)$.

16) O triângulo de vértices A(2, 3, 1), B(0, 1, -1) e C(3, 1, 2), do R^3, da figura abaixo, tem o lado BC dividido em 3 partes congruentes pelos pontos M e N, e P é o ponto médio do lado AC. Calcule numericamente a área do triângulo CNP.

Anotações

17) Em R^3, os vetores $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 0, 3)$ são, em centímetros, os representantes das arestas do tetraedro ABCD da figura.

Então, em cm^2, a medida da área da face triangular BCD vale:

a) $12\sqrt{2}$
b) $6\sqrt{2}$
c) $3\sqrt{2}$
d) 6
e) 3

18) **(FUVEST)** Em R^3, considere um paralelepípedo retângulo de dimensões 5 cm, 2 cm, 3 cm, como mostra a figura abaixo.

A medida da área do triângulo ABC, vale:

a) $10\ cm^2$
b) $\frac{3\sqrt{11}}{2} cm^2$
c) $\frac{3\sqrt{10}}{2} cm^2$
d) $\frac{7}{2} cm^2$
e) $5\ cm^2$

Gabarito

1)
a) $2\vec{i} - 4\vec{j}$
b) $5\vec{i}$
c) $2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

2)
a) (3, -2)
b) (1, 5)

7) $\sqrt{14}$ u.a. e $\frac{\sqrt{14}}{2}$ u.a.

8) b

9)
a) 3
b) 6
c) $2\sqrt{5}$

10) $\frac{\sqrt{26}}{...}$ u.a.

3)

a) (2, 3, -5)

b) (-4, 6, 0)

4)

a) (1, 4, -5)

b) (7, 1, -3)

c) (-14, -6, 11)

d) (0, 1, -3)

e) -69

5) 90

6) $\sqrt{21}$ u.a.

11) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ u.c.

12) $(t, t-1, t), \forall t \in R$

13) $2\sqrt{6}$ u.a.

14)

a) $D = (-4, 4, 2)$ e aresta 6

b) $(-2, -1, 7)$ ou $(2, 7, -1)$

15) $\frac{\sqrt{213}}{2}$ u.a.

16) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ u.a.

17) c

18) d

Capítulo XV

PRODUTO MISTO

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{\omega} = (x_3, y_3, z_3)$, do R^3, definimos o **produto misto** entre $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\vec{\omega}$, representado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}]$, sendo:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\omega} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo:

Dados os vetores $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$ e $\vec{c} = (0, -1, 2)$, calculemos $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 0 -$$

$$- 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \cdot 2 = 1$$

Propriedades

1) *"O produto misto de três vetores não se altera se, ao invertermos a ordem em que eles são considerados, não alteramos a sua **ordem cíclica**".*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}] = [\vec{v}, \vec{\omega}, \vec{u}] = [\vec{\omega}, \vec{u}, \vec{v}]$$

2) *"O produto misto de três vetores tem o sinal trocado quando, ao invertermos a ordem em que eles são considerados, alteramos a sua **ordem cíclica**".*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{\omega}] = -[\vec{\omega}, \vec{v}, \vec{u}]$$

Exemplos:

Sendo $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 2$, determinemos:

1) $[\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}] = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 2$

2) $[\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = -2$

3) $[\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}] = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 2$

Aplicação Geométrica do Produto Misto

A base, neste caso, é o paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$. Assim:

$$S_B = |\vec{v} \times \vec{\omega}|$$

Na figura anterior, chamamos o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{\omega}$ de θ, e, como h é paralelo a $\vec{v} \times \vec{\omega}$, o triângulo em destaque também tem um ângulo igual a θ. Neste triângulo, temos que

$$\cos\theta = \frac{h}{|\vec{u}|} \rightarrow h = |\vec{u}| \cos\theta$$

Então, o volume do paralelepípedo será dado por:

$$V = S_B \cdot h$$

$$V = \left| |\vec{v} \times \vec{\omega}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\theta \right| = \left| |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{\omega}| \cdot \cos\theta \right|$$

A utilização do módulo deve-se ao fato da necessidade de garantirmos que o volume não seja negativo.

Para a conclusão final, devemos lembrar que, se dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formam um ângulo θ, vale a relação $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$.

Aplicando-se tal conceito à igualdade anterior:

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})|$$

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}]|$$

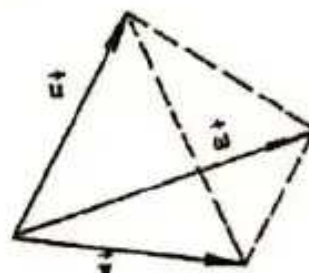
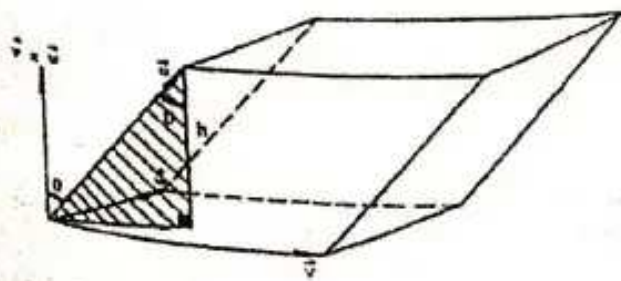
Conclusão

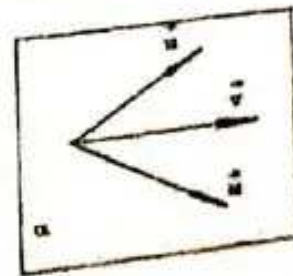
O volume do paralelepípedo gerado por três vetores não coplanares é igual ao módulo do produto misto desses vetores.

Da Geometria Espacial tem-se que todo paralelepípedo pode ser dividido em seis tetraedros equivalentes (de mesmo volume).

Então o volume do tetraedro definido por três vetores não coplanares aplicados em um mesmo ponto é igual à sexta parte do módulo do produto misto entre eles, ou seja:

$$V_{TETRAEDRO} = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}]|}{6}$$

Interpretação Geométrica do Produto Misto

Três vetores não coplanares do R^3 $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$, aplicados em um mesmo ponto, determinam um paralelepípedo. Seja determinar o volume V deste sólido.

É sabido da Geometria Espacial que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área de sua base S_B pela sua altura h.

Se três vetores do R^3 são coplanares, eles não definem um paralelepípedo, e o produto misto deles é nulo. Então:

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}$ são coplanares $\leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}\right] = 0$

Exemplos:

1) Dados os vetores $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$ e $\vec{c} = (1, 2, 2)$, determinemos:

a) O volume do paralelepípedo por eles gerado.

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 . 0 . 2 + 1 . 1 . 1 + 0 . 1 . 2 -$$

$$- 0 . 0 . 1 - 2 . 1 . 2 - 1 . 1 . 2 = -5$$

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right| = |-5| \rightarrow V = 5 \text{u.v.}$$

NOTA: Por u.v. subentenda-se unidades de volumes.

b) O volume do tetraedro definido por eles.

$$V_{TETRAEDRO} = \frac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|}{6} = \frac{|-5|}{6} \rightarrow V_{TETRAEDRO} = \frac{5}{6} \text{u.v.}$$

2) Seja determinar o valor de m, de modo que os vetores $\vec{x} = (m, 1, 2)$, $\vec{y} = (0, 1, 1)$ e $\vec{z} = (1, 1, 3)$ sejam coplanares.

$$\left[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right] = \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = m . 1 . 3 + 1 . 1 . 1 + 2 . 0 . 1 - 2 . 1 . 1 -$$

$$- m . 1 . 1 - 1 . 0 . 3 = 2m - 1$$

$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 0$

$2m - 1 = 0$

$m = 1/2$

Exercícios

1) Determine o valor de $(\vec{a} \times \vec{b}) . \vec{c}$, sabendo que $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$ e $\vec{c} = (-1, 0, 2)$.

2) Considerando que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2$, determine os valores de

a) $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$
b) $[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$
c) $[2\vec{u}, \vec{v}, 3\vec{w}]$
d) $[-\vec{v}, 4\vec{u}, \vec{w}]$

3) **(FGV)** Os vetores $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ geram um paralelepípedo cujo volume vale:

a) 19
b) $\frac{15}{2}$
c) $\frac{19}{2}$
d) 15
e) 5

6) Calcule x, sabendo-se que os vetores $\vec{p} = (x, 2, 3)$, $\vec{q} = (4, 0, -1)$ e $\vec{r} = (1, 1, -5)$ do R^3 geram um paralelepípedo de volume 10.

7) **(IBMEC)** O menor valor do parâmetro k para o qual os vetores $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, k, 4)$ e $\vec{w} = (3, 1, -4k)$ são coplanares é:

a) –1
b) $-\frac{1}{2}$
c) zero
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

8) Considere $0 < \theta < \pi$ e os vetores, $\vec{a} = (\cos 2\theta, 1/2, 0)$, $\vec{b} = (4, 1, 6)$ e $\vec{c} = (\text{sen } \theta, 0, 1)$. Determine o valor ou valores de θ de modo que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ pertençam a um mesmo plano.

9) **(PUC)** Os três vetores do R^3, (1, 1, -1), (0, -1, 2) e (2, 5, -8), são

a) colineares.
b) coplanares.
c) arestas de um paralelepípedo de volume 1.
d) arestas de um paralelepípedo de volume 2.
e) arestas de um paralelepípedo de volume 3.

Gabarito

1) -8

2)
a) 2
b) -2
c) 12
d) 8

a) 3
b) 4
c) 8
d) 12
e) 22

4) Dados os vetores, $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, calcule em R^3 o volume
a) do paralelepípedo gerado por esses vetores.
b) do tetraedro gerado por esses vetores.

5) (FGV) Três arestas de um paralelepípedo P partem de (0, 0, 0) e tem a outra extremidade nos pontos (2, 2, 1), (3, 0, -1) e (1, 1, -2), respectivamente. O volume de P é:

3) b

4)
a) 1 u.v.
b) $\frac{1}{6}$ u.v.

5) d

6) -40 ou -60

7) b

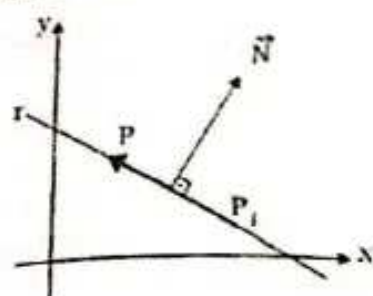
8) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{6}$

9) b

Capítulo XVI

ESTUDO DA RETA NO R^2

Equação Geral

Consideremos uma reta r, do R^2, que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{N} = (A, B)$, chamado de **vetor normal à reta**.

Sendo P(x, y) um ponto genérico da reta, podemos estabelecer um segmento orientado $\overline{P_1P}$. Daí:

$\overline{P_1P} = P - P_1 = (x, y) - (x_1, y_1) = (x - x_1, y - y_1)$

$\vec{N} \perp \overline{P_1P}$

$\vec{N} . \overline{P_1P} = 0$

$(A, B) . (x - x_1, y - y_1) = 0$

$A . (x - x_1) + B . (y - y_1) = 0$

$Ax - Ax1 + By - By_1 = 0$

$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$

Como A, x_1, B e y_1 são números reais dados, o termo $-A . x_1 - B . y_1$ também será um número real. Façamos, portanto, $-A . x_1 - B . y_1 = C$. Então

$$A . x + B . y + C = 0$$

Esta é a equação geral de reta do R^2.

Vale lembrar que as variáveis x e y representam as coordenadas de um ponto qualquer da reta, enquanto que os coeficientes das variáveis, A e B, são as componentes de um vetor normal à reta.

Exemplos:

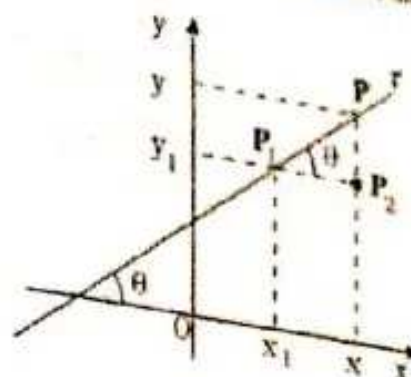
1) Se o ponto A (2, m) pertence à reta de equação $2x + 3y - 7 = 0$, então suas coordenadas satisfarão a essa igualdade quando substituídas nos lugares das variáveis. Assim:

$2 . 2 + 3 . m - 7 = 0$

$3m = 3 \therefore m = 1$

Roberto Ávila

Equação Reduzida

Consideremos uma reta r do R^2, que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ e forma um ângulo θ, chamado de **inclinação da reta**, com o semi-eixo x positivo. Tomemos, ainda um ponto P (x, y), genérico da reta.

Na figura $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{OX}$ logo $P\hat{P_1}P_2 = \theta$ e assim

$tg\theta = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{P_1P}}$

$tg\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

$y - y_1 = tg\,\theta . (x - x_1)$

$y - y_1 = tg\,\theta . x - tg\,\theta . x_1$

$y = tg\,\theta . x + y_1 - tg\,\theta . x_1$

Como x_1, y_1 e θ são números reais dados, a expressão $y_1 - tg\theta . x_1$ também é um número real. Assim façamos $tg\theta = a$ e $y_1 - tg\theta . x_1 = b$:

$$y = a . x + b$$

Esta é a equação reduzida da reta no R^2.

Características da Equação Reduzida

1) As variáveis x e y representam as coordenadas de um ponto qualquer da reta.

2) A variável y fica explícita em um dos membros da equação.

3) O número a, que representa a tangente de inclinação de reta (tg θ), é chamado de **coeficiente angular** da reta.

4) O número b é chamado de **coeficiente linear** da reta.

Se na equação $y = ax + b$, fizermos $x = 0$, concluímos que $y = a . 0 + b$, ou $y = b$. Daí, o coeficiente linear b é a ordenada do ponto em que a reta secciona o eixo y.

Exemplos:

2) A equação da reta que passa pelo ponto $P(2, 1)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$ é dada por
$A . x + B . y + C = 0$

Como $\vec{v} = (3, 2)$ é normal à reta, $A = 3$ e $B = 2$:
$3x + 2y + C = 0$

Substituindo-se as variáveis pelas coordenadas de P:
$3 . 2 + 2 . 1 + C = 0$
$C = -8$

Tiramos então a equação de tal reta:
$3x + 2y - 8 = 0$

1) Escrever a equação reduzida da reta de equação $4x + 3y - 1 = 0$, é isolar o y em um dos membros. Assim:

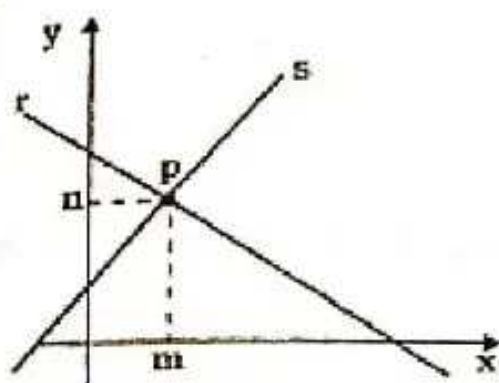
$$4x + 3y - 1 = 0$$

$$3y = -4x + 1$$

$$y = \frac{-4}{3} . x + \frac{1}{3}$$

Esta é a equação reduzida da reta, a qual tem coeficiente angular $-\frac{4}{3}$ e coeficiente linear igual a $\frac{1}{3}$.

Interseção Entre Duas Retas

Consideremos duas retas r e s concorrentes, que se ntersectam em um ponto P (m,n). Seja obter as coordenadas desse ponto P. Se **r** e **s** são dadas por suas equações gerais, emos que:

r: $A_1 . x + B_1 . y + C_1 = 0$

s: $A_2 . x + B_2 . y + C_2 = 0$

Assim, se P pertence a **r** e também a **s**, suas coordenadas atisfarão a ambas as equações e então devemos resolver o istema abaixo:

$$\begin{cases} A_1.x+B_1.y+C_1=0 \\ A_2.x+B_2.y+C_2=0 \end{cases}$$

Exemplo:

Encontrar as coordenadas do ponto de interseção das retas le equações $3x - 2y - 5 = 0$ e $2x + y - 8 = 0$ é resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ 2x+y-8=0 \end{cases}$$

Multiplicando-se a 2ª equação por 2:

$$\begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ 4x+2y-16=0 \end{cases}$$
$$7x-21=0$$

$7x = 21 \quad \therefore \quad x = 3$

$2x + y - 8 = 0$

$2 . 3 + y - 8 = 0 \quad \therefore \quad y = 2$

Assim, a interseção das retas dá-se no ponto de coordenadas (3,2).

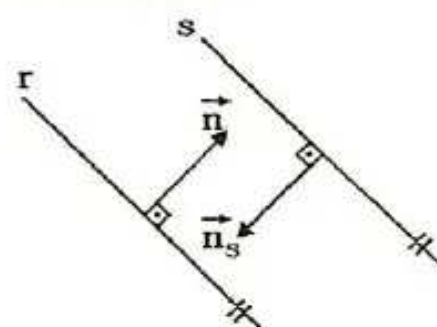
Exemplo:

A distância do ponto (2, -5) à reta r: $4x - 3y - 2 = 0$ é dada por

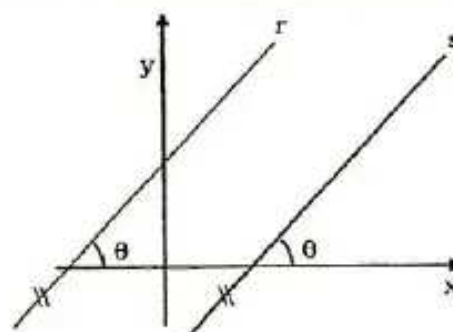
$$d = \left|\frac{A.x_1+B.y_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{4.2+(-3).(-5)-2}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right| = \frac{21}{5}$$

Retas Paralelas

1) Forma geral

Se duas retas **r** e **s** são paralelas, seus vetores normais $\vec{N}_r$ e $\vec{N}_s$ também são paralelos.

$$r // s \Leftrightarrow \vec{N}_r // \vec{N}_s$$

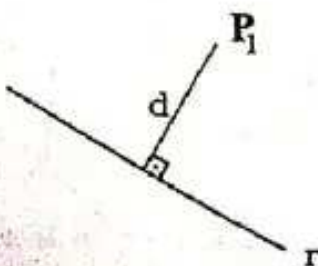
2) Forma reduzida

Se duas retas **r** e **s** são paralelas, elas têm a mesma inclinação em relação ao eixo **x**. Assim, seus coeficientes angulares, que são as tangentes das inclinações, são iguais.

Sendo: $\begin{cases} r: y = a_1.x+b_1 \\ s: y = a_2.x+b_2 \end{cases}$

$$r // s \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

Exemplos:

1) O valor de **m** para que as retas r: $6x - 9y + 1 = 0$ e s: $mx + 12y - 5 = 0$ sejam paralelas será tal que

$\vec{N}_r // \vec{N}_s$

$(6, -9) // (m, 12)$

$$\frac{6}{m} = \frac{-9}{12}$$

Distância do ...

Distância de um ponto à uma reta no R^2

Dados uma reta r: $Ax + By + C = 0$ e um ponto $P_1(x_1, y_1)$, a distância de à reta r é dada pela fórmula:

$$d = \left| \frac{A.x_1 + B.y_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

$-9m = 72$

$m = -8$

2) Se as retas $y = (k+3).\ x + 1$ e $y = 7x - 12$ são paralelas, terão o mesmo coeficiente angular. Então,

$k + 3 = 7$

$k = 4$

Retas Perpendiculares

1) Forma geral

Se duas retas **r** e **s** são perpendiculares, seus vetores normais também são perpendiculares.

$r \perp s \Leftrightarrow \vec{N}_r \perp \vec{N}_s$

2) Forma reduzida

Se duas retas **r** e **s** são perpendiculares, o coeficiente angular de **s** é o simétrico do inverso do coeficiente angular de **r**, e vice-versa.

Com efeito, sejam as retas:

r: $y = a_1 \cdot x + b_1$ e s: $y = a_2 \cdot x + b_2$

Temos que:

$a_1 = tg\ \alpha$ e $a_2 = tg\theta$

No triângulo destacado na figura acima, o ângulo θ, é externo, daí $\theta = 90 + \alpha$. Da Trigonometria:

$$a_2 = tg\ \theta = tg\ (90° + \alpha) = -ctg\ \alpha = -\frac{1}{tg\ \alpha} = -\frac{1}{a_1}$$

Logo: $r \perp s \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{a_1}$

Exemplo:

As retas r: $4x - 3y + 3 = 0$ e s: $k : x + y - 1 = 0$ são perpendiculares, se:

$\vec{N}_r \perp \vec{N}_s$

$\vec{N}_r \cdot \vec{N}_s = 0$

$(4, -3) \cdot (k, 1) = 0$

$4 \cdot k + (-3) \cdot 1 = 0$

$k = \frac{3}{4}$

Exemplo:

Considerando as retas r: $3x + y - 11 = 0$ e s: $2x - y + 4 = 0$, temos que $N_r = (3, 1)$ e $N_s = (2, -1)$. Então:

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{N}_r \cdot \vec{N}_s}{|\vec{N}_r| \cdot |\vec{N}_s|} \right| = \left| \frac{3.2 + 1.(-1)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} \right| = \left| \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} \right| =$$

$$= \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Concluímos que as retas **r** e **s** formam um ângulo de 45°

Exercícios

1) Determine a equação da reta que passa pelo ponto (2, 4) e é perpendicular ao vetor de componentes (3, 2).

2) Em R^2, assinale a alternativa que apresenta um vetor normal à reta de equação $2x + 3y - 5 = 0$.

a) (2, -5)
b) (2, -3)
c) $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$
d) (3, -5)
e) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

3) Determine os coeficientes linear e angular da reta de equação $5x + 3y - 2 = 0$.

4) Qual a inclinação da reta de equação $6x + 6y + 5 = 0$?

5) Determine as equações das retas bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares.

6) Determine a equação da reta que passa pelos pontos (1, -3) e (3, 5).

Ângulo Formado por Duas Retas

Duas retas, concorrentes não ortogonais, r e s, formam entre si dois ângulos distintos, um agudo e outro obtuso. Tomemos como ângulo formado por r e s, salvo disposto em contrário, o menor deles, ou seja o agudo, que tem co-seno positivo. Analisemos, portanto, os casos do R^2 e R^3.

A figura a seguir representa duas retas r e s, do R^2 e seus vetores normais $\vec{N}_r$ e $\vec{N}_s$.

Da Geometria Plana, tiramos que o ângulo formado pelas retas é igual ao menor ângulo formado por seus vetores normais.

Então:

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{N}_r \cdot \vec{N}_s}{|\vec{N}_r| \cdot |\vec{N}_s|}\right|$$

7) Determine a equação da reta mostrada na figura abaixo.

8) Considere o ponto P = (1, 2) e as retas r e s cujas equações são, respectivamente, $3x - 4y - 3 = 0$ e $5x - 12y - 11 = 0$. Determine

a) o ponto de interseção das retas r e s.
b) a distância de P à reta r.
c) a distância de P à reta s.

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{N}_r \perp \vec{N}_s$$

2) Forma reduzida

Se duas retas **r** e **s** são perpendiculares, o coeficiente angular de **s** é o simétrico do inverso do coeficiente angular de **r**, e vice-versa.

Com efeito, sejam as retas:

r: $y = a_1 . x + b_1$ e s: $y = a_2 . x + b_2$

Temos que:

$a_1 = \text{tg}\,\alpha$ e $a_2 = \text{tg}\,\theta$

No triângulo destacado na figura acima, o ângulo θ, é externo, daí $\theta = 90 + \alpha$. Da Trigonometria:

$$a_2 = \text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(90° + \alpha) = -\,\text{ctg}\,\alpha = -\frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = -\frac{1}{a_1}$$

Logo: $r \perp s \Leftrightarrow a_2 = -\dfrac{1}{a_1}$

Exemplo:

As retas r: $4x - 3y + 3 = 0$ e s: $k : x + y - 1 = 0$ são perpendiculares, se:

$\vec{N}_r \perp \vec{N}_s$

$\vec{N}_r . \vec{N}_s = 0$

$(4, -3) . (k, 1) = 0$

$4 . k + (-3) . 1 = 0$

3

Exemplo:

Considerando as retas r: $3x + y - 11 = 0$ e s: $2x - y + 4 = 0$, temos que $N_r = (3, 1)$ e $N_s = (2, -1)$. Então:

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{N}_r \cdot \vec{N}_s}{|\vec{N}_r| \cdot |\vec{N}_s|}\right| = \left|\frac{3.2 + 1.(-1)}{\sqrt{3^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{10}.\sqrt{5}}\right| =$$

$$= \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Concluímos que as retas **r** e **s** formam um ângulo de 45º.

Exercícios

1) Determine a equação da reta que passa pelo ponto (2, 4) e é perpendicular ao vetor de componentes (3, 2).

2) Em R^2, assinale a alternativa que apresenta um vetor normal à reta de equação $2x + 3y - 5 = 0$.

a) (2, -5)
b) (2, -3)
c) $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$
d) (3, -5)
e) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

3) Determine os coeficientes linear e angular da reta de equação $5x + 3y - 2 = 0$.

4) Qual a inclinação da reta de equação $6x + 6y + 5 = 0$?

5) Determine as equações das retas bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares.

6) Determine a equação da reta que passa pelos pontos (1, -3) e (3, 5).

$k = \frac{\quad}{4}$

Ângulo Formado por Duas Retas

Duas retas, concorrentes não ortogonais, r e s, formam entre si dois ângulos distintos, um agudo e outro obtuso. Tomemos como ângulo formado por r e s, salvo disposto em contrário, o menor deles, ou seja o agudo, que tem co-seno positivo. Analisemos, portanto, os casos do R^2 e R^3.

A figura a seguir representa duas retas r e s, do R^2 e seus vetores normais $\vec{N}_r$ e $\vec{N}_s$.

Da Geometria Plana, tiramos que o ângulo formado pelas retas é igual ao menor ângulo formado por seus vetores normais.

Então:

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{N}_r \cdot \vec{N}_s}{|\vec{N}_r| \cdot |\vec{N}_s|}\right|$$

7) Determine a equação da reta mostrada na figura abaixo.

8) Considere o ponto P = (1, 2) e as retas r e s cujas equações são, respectivamente, $3x - 4y - 3 = 0$ e $5x - 12y - 11 = 0$. Determine

a) o ponto de interseção das retas r e s.
b) a distância de P à reta r.
c) a distância de P à reta s.

9) Dadas as retas de equações $3x + 4y - 7 = 0$ e $(k + 2)x - 6y + 1 = 0$, determine o valor do número real k em cada uma das situações abaixo.

a) As retas são paralelas.
b) As retas são perpendiculares.

10) (PUC) Em R^2, dado o ponto A(1, -2) e a reta r: $3x - y + 8 = 0$, determine

a) a equação da reta s que contém A e é paralela a s;
b) a equação da reta t que contém A e é perpendicular a r.

11) (FGV) Em R^2, considere o ponto A(2, -3) e a reta r de equação $x + y + 7 = 0$.

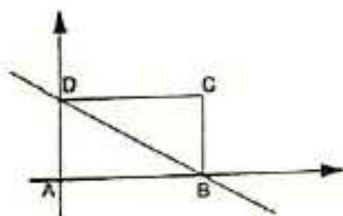
Determine as coordenadas do ponto P, que é a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta r.

12) Dado o triângulo ABC, de vértices A = (2, 6), B = (0, -4) e C = (4, 2), determine

a) a equação da reta suporte da mediana AM.
b) a equação da reta suporte da mediatriz do lado AB.
c) a equação da reta suporte da altura relativa ao lado AC.

13) Determine a medida do ângulo formado pelas retas $2x - y + 8 = 0$ e $x - 3y + 7 = 0$.

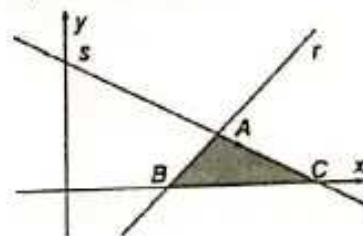
14) Determine a distância entre as retas de equações $3x + y - 3 = 0$ e $3x + y + 7 = 0$.

15) (PUC) O retângulo ABCD tem um lado sobre o eixo x e um lado sobre o eixo y como mostra a figura. A área do retângulo ABCD é 15 e a medida do lado AB é 5. A equação da reta que passa por D e por B é:

a) $y = -5x + 3$
b) $y = 3x + 5$
c) $y = -3x + 5$
d) $y = -\frac{3x}{5} + 3$
e) $y = \frac{3x}{5} + 3$

16) (PUC) Considere o quadrado ABCD, em que A = (6, 13) e C = (12, 5).

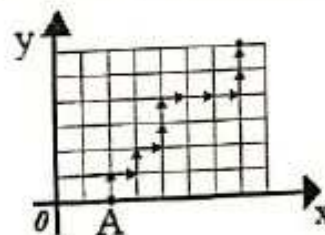
A equação da reta r que passa pelos vértices A e C é:

a) $y = -x + 7$
b) $y = -\frac{x}{3} + 5$
c) $y = -\frac{x}{2} + 5$
d) $y = -\frac{x}{2} + 7$
e) $y = \frac{x}{3} + 7$

18) (PUC) Sejam r e s as retas de equações $y = x - 2$ e $y = -x/2 + 5/2$, respectivamente, representadas no gráfico abaixo. Seja A o ponto de interseção das retas r e s. Sejam B e C os pontos de interseção de r e s com o eixo horizontal, respectivamente.

A área do triângulo ABC vale:

a) 1,0
b) 1,5
c) 3,0
d) 4,5
e) 6,0

19) (UERJ) Uma partícula parte do ponto A(2; 0), movimentando-se para cima (C) ou para a direita (D), com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo no plano cartesiano.

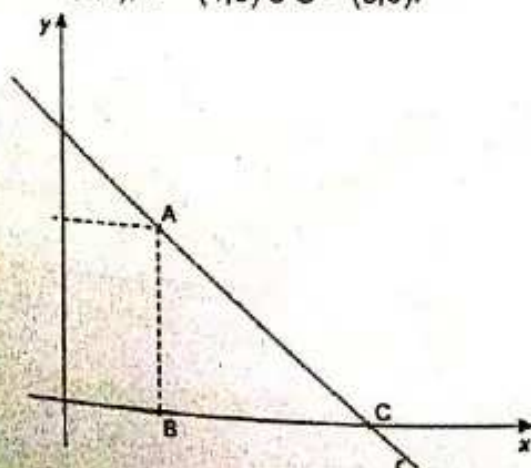
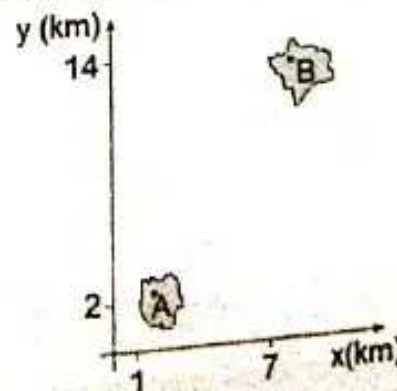
O gráfico abaixo exemplifica uma trajetória dessa partícula, durante 11 segundos, que pode ser descrita pela sequência de movimento CDCDCCDDDCC.

Admita que a partícula faça outra trajetória composta somente pela sequência de movimentos CDD, que se repete durante 5 minutos, partindo de A.

Determine a equação da reta que passa pela origem 0 (0, 0) e pelo último ponto dessa nova trajetória.

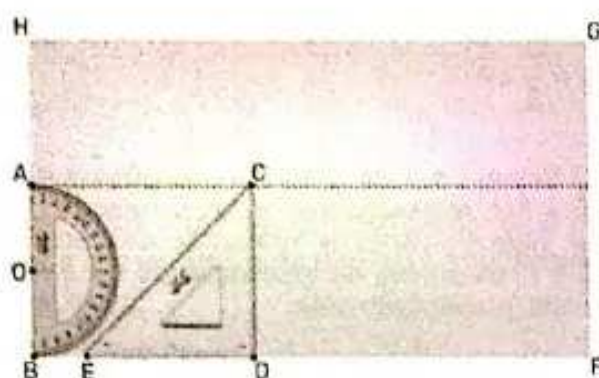
20) (UERJ) Uma ferrovia foi planejada para conter um trecho retilíneo cujos pontos são equidistantes dos

Determine a equação da reta r que passa pelo ponto M (médio de AC) e pelo ponto P = (1, 1).

17) **(PUC)** O triângulo ABC da figura abaixo tem área 25 e vértices A = (4,5), B = (4,0) e C = (c,0).

trecho retilíneo ... centros A e B de dois municípios. Em seu projeto de construção, utilizou-se o plano cartesiano, com coordenadas em quilômetros, em que A = (1, 2) e B = (7, 14). Observe o gráfico:

Determine, utilizando esse sistema referencial, a equação da reta suporte desse trecho retilíneo da ferrovia.

21) **(UERJ)** A figura abaixo representa a superfície plana de uma mesa retangular BFGH na qual estão apoiados os seguintes instrumentos para desenho geométrico, ambos de espessuras desprezíveis:

- um transferidor com a forma de um semicírculo de centro O e diâmetro $\overline{AB}$;
- um esquadro CDE, com a forma de um triângulo retângulo isósceles.

Considere as informações abaixo:

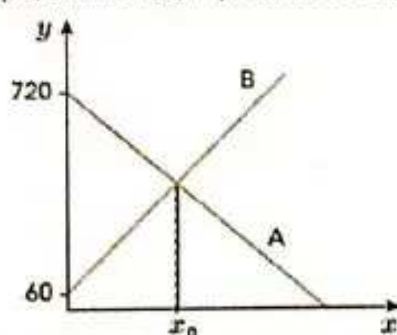
$\overline{ED}$; está contido em $\overline{BF}$;

$\overline{OA}$; está contido em $\overline{BH}$;

$\overline{AB} = 10$ cm;

$\overline{BD} = 13$ cm.

Calcule a medida, em centímetros, do menor segmento que liga a borda do transferidor à borda do esquadro.

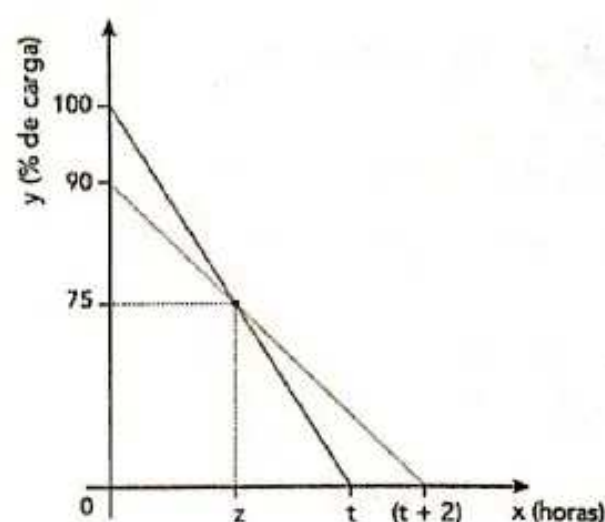
22) **(UERJ)** O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x.

Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.

23) **(UERJ)** Em um determinado dia, duas velas foram acesas: a vela A às 15 horas e a vela B, 2 cm menor, às 16 horas. Às 17 horas desse mesmo dia, ambas tinham a mesma altura.

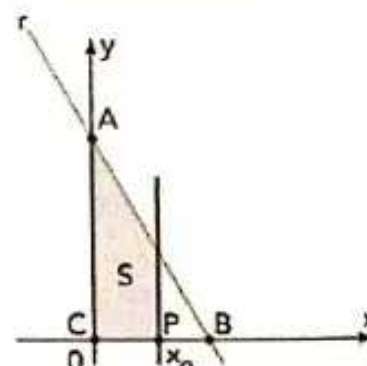
Observe o gráfico que representa as alturas de cada uma das velas em função do tempo a partir do qual a vela A foi

24) **(UERJ)** As baterias B_1 e B_2 de dois aparelhos celulares apresentam em determinado instante, respectivamente, 100% e 90% da carga total. Considere as seguintes informações:

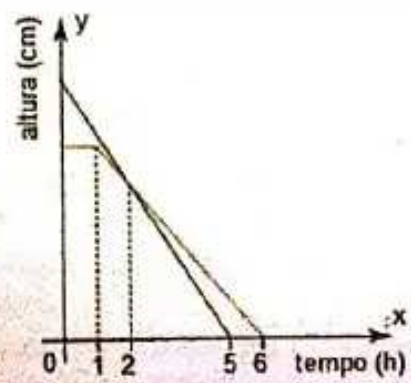
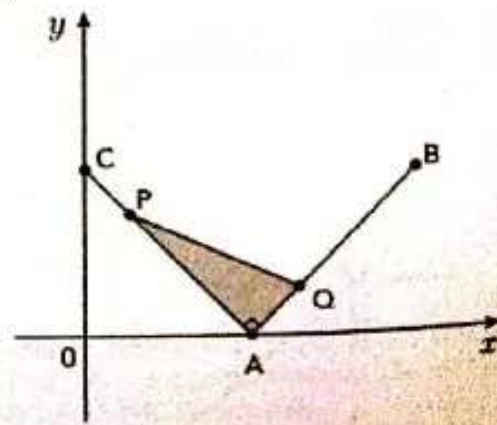
- as baterias descarregam linearmente ao longo do tempo;
- para descarregar por completo, B_1 leva **t** horas e B_2 leva duas horas a mais do que B_1;
- no instante **z**, as duas baterias possuem o mesmo percentual de carga igual a 75%.

Observe o gráfico:

O valor de t, em horas, equivale a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

25) **(UERJ)** Considere o gráfico a seguir, em que a área S é limitada pelos eixos coordenados, pela reta r, que passa por A(0,4) e B(2,0), e pela reta perpendicular ao eixo x no ponto $P(x_0,0)$, sendo $0 \le x_0 \le 2$.

Para que a área S seja a metade da área do triângulo de vértices C(0,0), A e B, o valor de x_0 deve ser igual a:

a) $2 - \sqrt{2}$
b) $3 - \sqrt{2}$
c) $4 - 2\sqrt{2}$
d) $5 - 2\sqrt{2}$

das velas em função do tempo a partir do qual a vela A foi acesa.

Calcule a altura de cada uma das velas antes de serem acesas.

26) **(UERJ)**

Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio
b) 3 meses e meio
c) 1 mês e meio
d) 4 meses
e) 1 mês

Gabarito

1) $3x + 2y - 14 = 0$

2) c

3) $\frac{2}{3}$ e $-\frac{5}{3}$

4) 135°

5) $y = x$ e $y = -x$

6) $y = 4x - 7$

7) $2x - 3y - 6 = 0$

8)

a) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{8}\right)$

b) $-\frac{8}{5}$

c) $-\frac{30}{13}$

9)

a) $-\frac{13}{2}$

b) 6

10)

a) $3x - y - 5 = 0$

b) $x + 3y + 5 = 0$

11) (-1, -6)

12)

a) $x = 2$

b) $y = -\frac{x}{5} + \frac{6}{5}$

c) $y = \frac{x}{2} - 4$

13) 45°

17) d

18) b

19) $y = \frac{50}{101}x$

20) $y = \frac{-x}{2} + 10$

21) $\left(4\sqrt{2} - 5\right)$ cm

22) 30h

23) $h_A = 8$ cm e $h_B = 6$ cm

24) d

25) a

26) $\frac{1}{4}$

27) c

28) b

29)

a) $3x + y = 3$

b) (0, -4)

30) 4

31) $3x - 4y + 23 = 0$

32)

a) (0, 1) e (2, 3)

b) 0

c) $x = 1$, $y = -x + 1$ e $y = 3x - 3$

33)

a) $\frac{1}{3} < k < \frac{3}{4}$

d) $k = \frac{4}{7}$ ou $k = 2$

34) c

14) $\sqrt{10}$

15) d

16) y = x

35) a

Anotações

Capítulo XVII

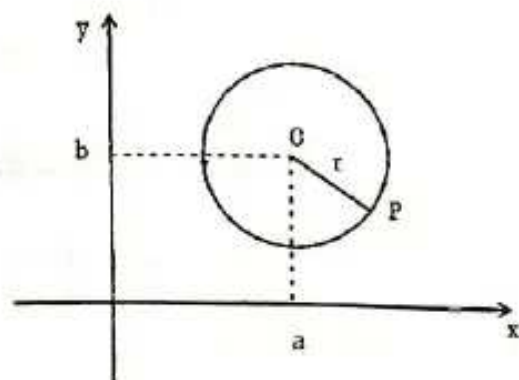
ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA NO R^2

Definição

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto dado chamado de centro. Essa distância constante é o raio da circunferência.

Equação reduzida:

Consideremos uma circunferência de centro **O** (a,b) e raio r. Seja **P** (x,y) um ponto genérico da circunferência.

Então:

$$d_{o,p} = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Esta é a equação reduzida da circunferência.

Exemplos:

1) Determine a equação da circunferência que tem raio 3 e centro no ponto (2, -4)

Resolução:

Centro: 0(a, b) = (2, -4) → a = 2 e b = -4

Raio: r = 3

Equação: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$

2) Determine o centro e o raio da circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 16$

Resolução:

a = - 1 e b = 5

Centro: 0 (a, b) = (-1, 5)

que é a equação geral da circunferência.

Devemos lembrar que:

$-2a = A \rightarrow a = -A/2$

$-2b = B \rightarrow b = -B/2$

$a^2 + b^2 - r^2 = C \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$

Exemplo:

Determine o centro e o raio das circunferências de equações:

a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$

Resolução:

Nesta equação temos A = -6, B = -8 e C = -11. Então:

$a = -A/2 = \frac{-6}{2} = 3$

$b = -b/2 = \frac{-8}{2} = 4$

Centro: 0 (3, 4)

$r = \sqrt{a^2 + b^2 - C} = \sqrt{3^2 + 4^2 - (-11)} = \sqrt{36} \rightarrow r = 6$

b) $2x^2 + 2y^2 - 5x + 7y - 13 = 0$

Resolução:

É importante observar que para que a equação de uma circunferência, esteja na forma geral é necessário que os coeficientes de x^2 e y^2 sejam ambos iguais a 1 (um). Assim, neste caso, devemos antes de mais nada dividir os dois membros da equação por 2:

$2x^2 + 2y^2 - 5x + 7y - 13 = 0$

$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}y - \frac{13}{2} = 0$ (:2)

Nesta equação, agora na forma geral, temos que:

$A = -5/2 \rightarrow a = -\frac{A}{2} = 5/4$

$B = 7/2 \rightarrow b = -\frac{B}{2} = -7/4$

Centro: 0 (5/4, -7/4)

$r = \sqrt{a^2 + b^2 - C} = \sqrt{(5/4)^2 + (-7/4)^2 - (13/2)} =$

$= \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{49}{16} + \frac{13}{2}} = \sqrt{\frac{178}{16}}$

Raio: $r = 4$

Equação geral

A equação geral é obtida através do desenvolvimento algébrico da equação reduzida. Então:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Como a,b e r são números reais, -2a, -2b e $a^2 + b^2 - r^2$ também são. Assim, chamando tais resultados de A, B e C, respectivamente, a equação pode ser escrita na forma:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$r = \frac{\sqrt{178}}{4}$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Para que a equação

$Mx^2 + Ny^2 + Pxy + Qx + Ry + S = 0$

Represente uma circunferência, é necessário que:

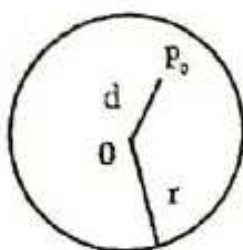
1º) $M = N \neq 0$

2º) $P = 0$

3º) $Q^2 + R^2 - 4MS > 0$

Posições Relativas Entre Um Ponto e Uma Circunferência

Dada uma circunferência, de raio **r** e centro 0 (a,b), por intermédio de sua forma geral $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, um ponto $P_0\ (x_0, y_0)$ pode apresentar três posições relativas a ela.

1º caso: P_0 é interior à circunferência.

Neste caso temos que:

$$d_{0,P0} < r$$

$\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} < \sqrt{a^2 + b^2 - C}$

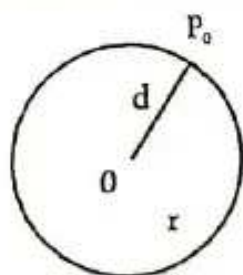
$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < a^2 + b^2 - C$

$x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y_0^2 - 2by_0 + b^2 < a^2 + b^2 - C$

$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + C < 0$

$\mathbf{x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C < 0}$

Observe que o primeiro membro desta inequação é obtido substituindo-se as coordenadas do ponto P_0 nas variáveis do primeiro membro da equação geral da circunferência. Tal expediente será utilizado nos demais casos.

2º caso: P_0 está sobre a circunferência

Neste caso temos que:

$$d_{0,P0} = r$$

Assim:

$x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C = 0$

3º caso: P_0 é exterior à circunferência

P_0

a) A (1, 4)

Resolução:

Substituindo-se suas coordenadas nas variáveis do primeiro membro da equação:

$$1^2 + 4^2 - 4 \cdot 1 - 6 \cdot 4 + 9 = -2 < 0$$

Então **A** é interior à circunferência.

b) B (2,5)

Resolução:

$$2^2 + 5^2 - 4 \cdot 2 - 6 \cdot 5 + 9 = 0$$

Logo **B** pertence à circunferência.

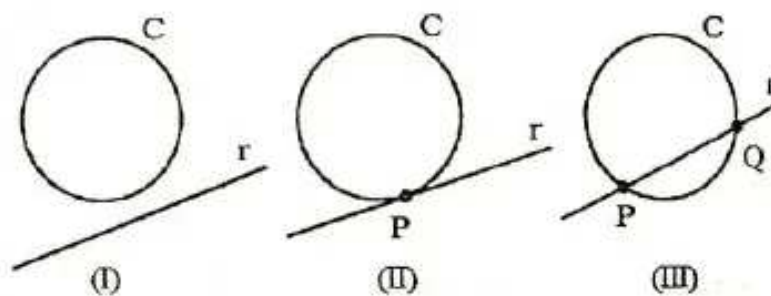
c) C (3,6)

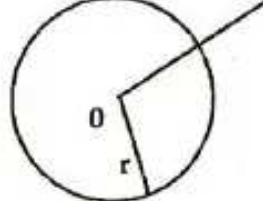
Resolução:

$$3^2 + 6^2 - 4 \cdot 3 - 6 \cdot 6 + 9 = 6 > 0$$

Portanto **C** é exterior à circunferência.

Posições Relativas Entre Uma Reta e Uma Circunferência

Dadas uma reta r e uma circunferência C do R^2, esquematicamente, elas podem apresentar três posições relativas, como mostrado a seguir.

No esquema (I) como não há interseção, a reta e a circunferência são **exteriores**; já no esquema (II) há um ponto de contato, portanto elas são **tangentes**, enquanto que no esquema (III), C e r se intersectam em dois pontos,então são **secantes**. Ficou claro que o tipo de posição relativa entre uma reta e uma circunferência depende do número de pontos em que elas se intersectam. Daí, na pesquisa do número de pontos comuns, basta resolvermos um sistema formado pelas equações da reta e da circunferência. Uma sugestão de solução é escrevermos a equação da reta na forma reduzida e substituir o valor de "y" na equação da circunferência, quando então obteremos uma equação do segundo grau. Como estudamos anteriormente, a natureza das raízes de uma equação do segundo grau depende de seu discriminante Δ.

Assim:

Neste caso temos que:

$$d_{0,P0} > r$$

Então:

$x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C > 0$

Exemplo:

Verifique a posição dos pontos abaixo relacionados em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ SECANTES (2 raízes reais e diferentes).

$\Delta = 0 \Rightarrow$ TANGENTES (2 raízes reais e iguais).

$\Delta < 0 \Rightarrow$ EXTERIORES (2 raízes complexas).

Exemplo:

Verifique a posição relativa entre a reta $2x - y + 1 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4 = 0$

Solução:

Devemos estudar o número de soluções do sistema.

$2x - y + 1 = 0$ (I)

$x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4 = 0$ (II)

Vamos escrever a equação da reta (I) na forma reduzida.

$2x - y + 1 = 0$

$y = 2x + 1$

Substituindo-se em (II).

$x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4 = 0$

$x^2 + (2x+1)^2 - 3x + 2.(2x+1) - 4 = 0$

$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 3x + 4x + 2 - 4 = 0$

$5x^2 + 5x - 1 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4.5.(-1)$

$\Delta = 45 > 0$

Logo a reta e a circunferência são secantes, pois haverá dois pontos distintos em que elas se intersectam.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Quando traçamos uma circunferência no plano R^2, ela divide tal plano em três regiões: a dos pontos pertinentes à circunferência, a dos pontos interiores a ela e a dos pontos a ela exteriores. É bom lembrar que o circulo é constituído pelo conjunto dos pontos da circunferência unido ao conjunto de pontos interiores a ela. Portanto, pelo exposto, o círculo centrado no ponto 0 (a, b) e raio r é dado pela inequação.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

Superfície Esférica

Um estudo análogo ao da circunferência pode ser feito em relação à superfície esférica.

Assim, a superfície esférica é o lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes de um ponto dado chamado de centro.

Essa distância constante é o raio da superfície esférica.

Equação reduzida:

Considerando uma superfície esférica de centro 0 (a,b,c) e raio r, sua equação reduzida pode ser obtida de forma semelhante àquele utilizada no estudo da circunferência. Daí, obtemos a equação:

Lembrando que:

$A = -2a \rightarrow a = -A/2$

$B = -2b \rightarrow b = -B/2$

$C = -2c \rightarrow c = -C/2$

$D = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - D}$

Exemplos:

a) Determine as equações reduzida e geral da superfície esférica centrada no ponto 0 (2, -3, 4) e cujo raio vale 1.

Resolução:

$0 = (a,b,c) = (2,-3,4) -> a = 2, b = -3$ e $c = 4$

$r = 1$

Equação reduzida:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 1$

Equação geral:

Devemos desenvolver a equação reduzida.

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 1$

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 28 = 0$

b) Determine as coordenadas do centro e o valor do raio da superfície esférica de equação $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 6y + 4z + 3 = 0$

Resolução:

Em primeiro lugar, devemos dividir ambos os membros da equação por 2, para que os coeficientes de x^2, y^2 e z^2 sejam todos iguais a 1 e, portanto, tenhamos a equação na forma geral.

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 6y + 4z + 3 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z + 3/2 = 0$ (:2)

$A = -1 \rightarrow a = -A/2 = ½$

$B = 3 \rightarrow b = -B/2 = -3/2$

$C = 2 \rightarrow c = -C/2 = -1$

$D = 3/2$

Centro : 0 (a, b, c) = (1/2, -3/2, -1)

Raio: $r = \sqrt{a^2 + b'^2 + c^2 - D} =$

$$= \sqrt{(1/2)^2 + (-3/2)^2 + (-1)^2 - 3/2} = \sqrt{2}$$

Posições Relativas Entre Um Ponto e Uma Superfície Esférica

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Equação geral:

Desenvolvendo-se algebricamente a equação acima, chegamos a:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

Chamando-se -2a, -2b, -2c e $a^2 + b^2 + c^2 - r^2$, que são números reais, de A, B, C e D, respectivamente, chegamos à equação geral:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Superfície Esférica

Neste caso,utilizamos um raciocínio análogo àquele feito para circunferência, guardadas as devidas proporções, pois agora trabalhamos com termos ordenados de R^3. Assim, dada uma superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ e um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ao substituirmos as coordenadas de P_0 no primeiro membro da equação da superfície esférica, temos três casos a considerar.

1º Caso: PONTO INTERIOR À SUPERFÍCIE ESFÉRICA

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D < 0$$

2º Caso: PONTO PERTINENTE À SUPERFÍCIE ESFÉRICA

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Substituindo-se em (II).

$x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4 = 0$

$x^2 + (2x+1)^2 - 3x + 2.(2x+1) - 4 = 0$

$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 3x + 4x + 2 - 4 = 0$

$5x^2 + 5x - 1 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4.5.(-1)$

$\Delta = 45 > 0$

Logo a reta e a circunferência são secantes, pois haverá dois pontos distintos em que elas se intersectam.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Quando traçamos uma circunferência no plano R^2, ela divide tal plano em três regiões: a dos pontos pertinentes à circunferência, a dos pontos interiores a ela e a dos pontos a ela exteriores. É bom lembrar que o circulo é constituído pelo conjunto dos pontos da circunferência unido ao conjunto de pontos interiores a ela. Portanto, pelo exposto, o círculo centrado no ponto 0 (a, b) e raio r é dado pela inequação.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

Superfície Esférica

Um estudo análogo ao da circunferência pode ser feito em relação à superfície esférica.

Assim, a superfície esférica é o lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes de um ponto dado chamado de centro.

Essa distância constante é o raio da superfície esférica.

Equação reduzida:

Considerando uma superfície esférica de centro 0 (a,b,c) e raio r, sua equação reduzida pode ser obtida de forma semelhante àquele utilizada no estudo da circunferência. Daí,

Lembrando que:

$A = -2a \rightarrow a = -A/2$

$B = -2b \rightarrow b = -B/2$

$C = -2c \rightarrow c = -C/2$

$D = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - D}$

Exemplos:

a) Determine as equações reduzida e geral da superfície esférica centrada no ponto 0 (2, -3, 4) e cujo raio vale 1.

Resolução:

0 = (a,b,c) = (2,-3,4) - > a = 2, b = -3 e c = 4

r = 1

Equação reduzida:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 1$

Equação geral:

Devemos desenvolver a equação reduzida.

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 1$

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 28 = 0$

b) Determine as coordenadas do centro e o valor do raio da superfície esférica de equação $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 6y + 4z + 3 = 0$

Resolução:

Em primeiro lugar, devemos dividir ambos os membros da equação por 2, para que os coeficientes de x^2, y^2 e z^2 sejam todos iguais a 1 e, portanto, tenhamos a equação na forma geral.

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 6y + 4z + 3 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z + 3/2 = 0$ (:2)

$A = -1 \rightarrow a = -A/2 = ½$

$B = 3 \rightarrow b = -B/2 = -3/2$

$C = 2 \rightarrow c = -C/2 = -1$

$D = 3/2$

Centro : 0 (a, b, c) = (1/2, -3/2, -1)

Raio: $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - D} =$

$= \sqrt{(1/2)^2 + (-3/2)^2 + (-1)^2 - 3/2} = \sqrt{2}$

Posições Relativas Entre Um Ponto e Uma

obtemos a equação:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Equação geral:

Desenvolvendo-se algebricamente a equação acima, chegamos a:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

Chamando-se -2a, -2b, -2c e $a^2 + b^2 + c^2 - r^2$, que são números reais, de A, B, C e D, respectivamente, chegamos à equação geral:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Superfície Esférica

Neste caso,utilizamos um raciocínio análogo àquele feito para circunferência, guardadas as devidas proporções, pois agora trabalhamos com termos ordenados de R^3. Assim, dada uma superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ e um ponto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ ao substituirmos as coordenadas de P_0 no primeiro membro da equação da superfície esférica, temos três casos a considerar.

1º Caso: PONTO INTERIOR À SUPERFÍCIE ESFÉRICA

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D < 0$$

2º Caso: PONTO PERTINENTE À SUPERFÍCIE ESFÉRICA

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Capítulo XVIII

SUPERFÍCIES CÔNICAS

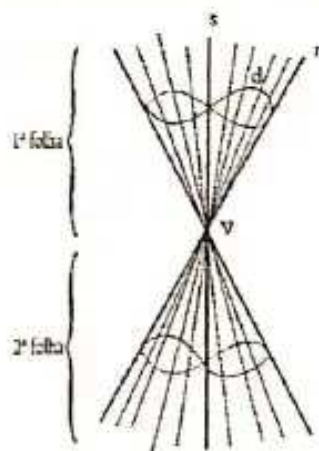
Definição

Denomina-se **superfície cônica** àquela gerada por uma reta **r** (geratriz) a qual se desloca passando por um mesmo ponto fixo **V** (vértice), apoiando-se numa linha curva **d** (diretriz). A superfície cônica é composta de duas folhas, e pode ser aberta ou fechada, conforme seja aberta ou fechada a sua diretriz. O **eixo** de uma superfície cônica é uma reta vertical que passa pelo seu vértice.

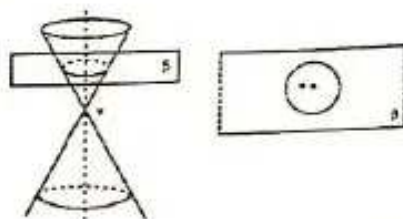
r - geratriz

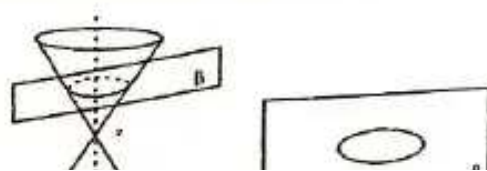
v - vértice

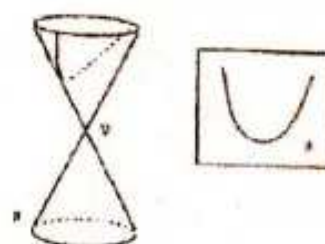
d - diretriz

s - eixo

Seções Cônicas

A interseção de um plano β com uma superfície cônica fechada, cuja geratriz tem inclinação constante em relação ao eixo, é chamada de seção cônica. A seguir vamos enumerar as principais **seções cônicas**, aquelas que vamos estudar de uma forma analítica e não apenas geométrica.

1) *O plano* β *é perpendicular ao eixo e não contém o vértice V.*

Neste caso a seção é uma **circunferência**

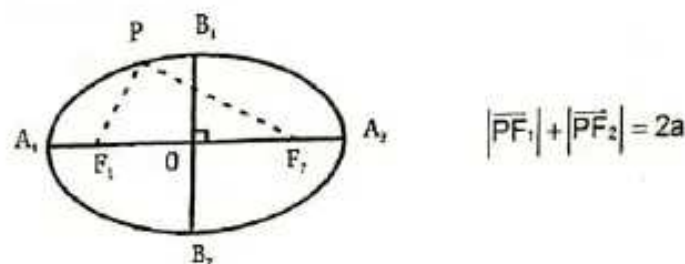
2) *O plano* β *é oblíquo ao eixo, intersecta a geratriz apenas numa das folhas da superfície cônica e não contém V.*

Devemos notar que a hipérbole possui dois ramos.

4) *O plano* β *é paralelo à geratriz e não contém V.*

Neste caso a seção é uma **parábola**.

Agora que já mostramos a obtenção de cada cônica geometricamente, vamos passar a estudá-las analiticamente, através de suas equações e gráficos. Antes porém, é importante entender um conceito que será bastante utilizado daqui para frente, o conceito de **lugar geométrico** (l.g.). Chamamos de **lugar geométrico** ao conjunto de pontos tais que eles, e apenas eles, possuem uma determinada propriedade. Por exemplo, o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de um ângulo é a bissetriz desse ângulo.

ESTUDO DA ELIPSE

Definição

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos F_1 e F_2 desse plano, chamados de focos, é igual a uma constante positiva 2a.

Elementos da elipse

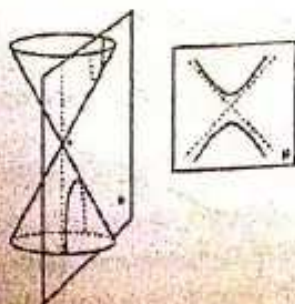
1) **Distância focal:** é a distância entre os pontos F_1 e F_2 que são os focos aludidos na definição. A distância focal é normalmente representada por 2c, então:

$$\overline{F_1F_2} = 2c$$

2) **Centro:** é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Na figura é representado pelo ponto **0**.

3) **Eixo maior:** é o segmento de reta que contém os focos F_1 e F_2 e tem como extremos os pontos A_1 e A_2 da elipse. O eixo maior tem comprimento igual a **2a**, assim:

Neste caso a seção é uma **elipse**.

3) *O plano β intersecta ambas as folhas da superfície cônica e não contém V.*

Neste caso a seção é uma **hipérbole**.

eixo maior tem comp...

$$\overline{A_1A_2} = 2a$$

4) **Eixo menor:** é o segmento de reta que passa pelo centro 0, é perpendicular ao eixo maior A_1A_2 e tem como extremos os pontos B_1 e B_2 da elipse. Consideremos o comprimento do eixo menor igual a **2b**, daí:

$$\overline{B_1B_2} = 2b$$

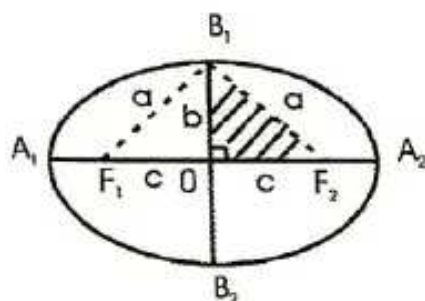
5) **Vértices:** são os extremos dos eixos maior e menor. Portanto, são vértices A_1, A_2, B_1 e B_2.

6) **Excentricidade:** a excentricidade **e** de uma cônica é a razão entre a distância focal e o eixo maior.

$$e = \frac{2c}{2a}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

7) **Simetrias na elipse:** a elipse tem dois eixos de simetria que são os eixos maior e menor. Além disso, seus pontos são simétricos, dois a dois, em relação ao centro **0**.

Relação Fundamental

Pela definição de elipse, a soma das distâncias de qualquer um de seus pontos aos focos F_1 e F_2 vale sempre 2a. Na figura abaixo, o triângulo $B_1F_1F_2$ é isósceles, com $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2}$. Como B_1 é ponto da elipse:

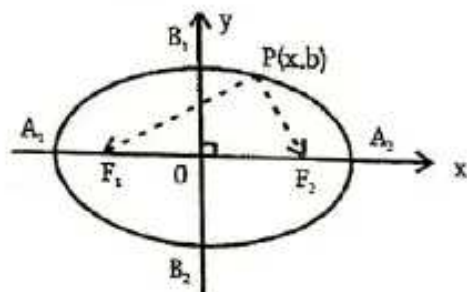
$$|B_1F_1| + |B_1F_2| = 2a$$

Logo:

$$|B_1F_1| = |B_1F_2| = a$$

Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo $0B_1F_2$:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Equação da Elipse

Considerando-se uma elipse centrada na origem do sistema de eixos, com focos no eixo horizontal, como mostra a figura, e um ponto P (x, y) genérico, pertinente a ela, temos que:

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$$

Desenvolvendo ...

Elipse Equilátera

Uma elipse é dita **equilátera** quando o eixo menor tem comprimento igual ao da distância focal, ou seja, 2b = 2c, ou ainda b = c. Neste tipo de elipse o quadrilátero de vértices B_1, F_1, B_2 e F_2 é um quadrado.

Exemplos:

a) Determine a equação de elipse centrada na origem cujo eixo maior está sobre o eixo x e mede 10cm e cuja distância focal mede 6 cm.

Resolução:

eixo maior = 2a = 10 → a = 5

distância focal = 2c = 6 → c = 3

Pela relação fundamental:

$a^2 = b^2 + c^2$

$5^2 = b^2 + 3^2 \therefore b = 4cm$

Equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

b) Determine a excentricidade de elipse de equação: $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Resolução:

Para que a equação seja reduzida, o segundo membro deve ser igual a 1, portanto devemos dividir ambos os membros de equação por 36.

$9x^2 + 4y^2 = 36$ (:36)

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Observe que neste caso como o maior denominador está sob o termo y^2, o eixo maior está na direção do eixo y, assim:

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

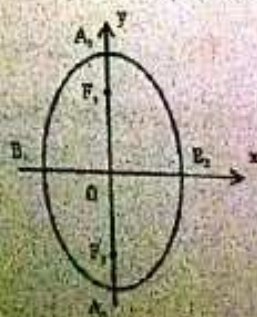
$b^2 = 4 \rightarrow b = 2$

$a^2 = b^2 = c^2$

$3^2 = 2^2 + c^2 \therefore c = \sqrt{5}$

Desenvolvendo-se analiticamente os módulos dos vetores $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, chegamos à equação reduzida de elipse:

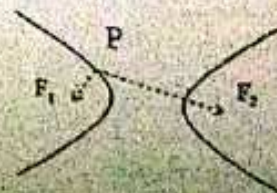
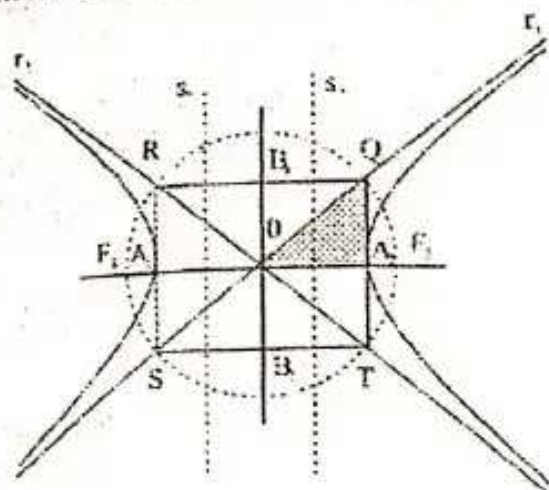
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Se considerarmos uma elipse centrada na origem e com os focos no eixo vertical, chagaremos, utilizando um método análogo ao anterior, à sua equação reduzida:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$e=\frac{c}{a}\therefore e=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ESTUDO DA HIPÉRBOLE

Definição

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo módulo da diferença entre as distâncias a dois pontos F_1 e F_2 desse plano, chamados de focos, é igual a uma constante real positiva 2a.

Elementos da Hipérbole

1) **Distância focal:** é a distância 2c entre os focos F_1 e F_2, então:

$$\overline{F_1F_2}=2c$$

2) **Centro:** é ponto **0**, médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.

3) **Eixo real:** é o segmento $\overline{A_1A_2}$, onde A_1 e A_2 são as interseções da reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ com a hipérbole. Note que $\overline{A_1A_2}=2a$.

4) **Circunferência fundamental:** Chamaremos de circunferência fundamental àquela que tem centro **0** e raio igual a **c**.

5) **Retângulo fundamental:** é o retângulo cujos vértices são as interseções da circunferência fundamental com as perpendiculares ao eixo real que passam por A_1 e A_2. Na figura, QRST é o retângulo fundamental.

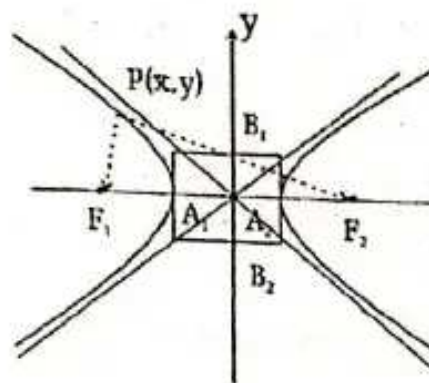
6) **Eixo imaginário ou transverso:** é o segmento $\overline{B_1B_2}=2b$, que é perpendicular ao eixo real e passa pelo centro **0**.

7) **Vértices:** são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.

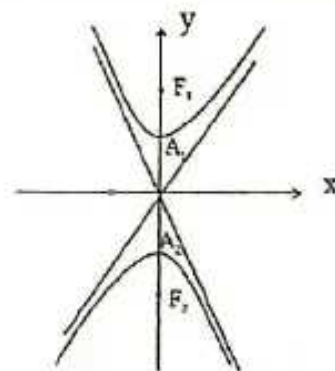
8) **Assíntotas:** devemos lembrar que assíntota é uma reta da qual uma curva se aproxima, sem no entanto haver interseção. No caso da figura, r_1 e r_2 são as assíntotas e têm equações:

$$r_1: y=\frac{b}{a}.x \quad e \quad r_2: y=\frac{-b}{a}.x$$

Obs.: Quando o eixo real é vertical, os coeficientes angulares das assíntotas são ± a/b

$$\left\|\overline{PF_1}\right|-\left|\overline{PF_2}\right\|=2a$$

Desenvolvendo-se analiticamente os módulos dos vetores e algebricamente a equação obtida, chegaremos à equação reduzida de hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

No caso de hipérbole centrada na origem e com focos no eixo das ordenadas, utilizando-se um procedimento análogo ao anterior, chegaremos à sua equação reduzida:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Quando o semi-eixo transverso for igual ao semi-eixo real, ou seja, a = b, a hipérbole é chamada de **equilátera**. Neste caso o seu retângulo fundamental é um quadrado e suas assíntotas, que contêm os diagonais desse quadrado, são as bissetrizes dos quatro quadrantes, e portanto, perpendiculares. Cabe ressaltar que sua excentricidade vale $\sqrt{2}$.

Exemplo:

a) Determine todos os elementos da hipérbole $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

Resolução:

$a_2 = 4 \rightarrow a = 2$ (semi-eixo real)

$b_2 = 9 \rightarrow b = 3$ (semi-eixo transverso)

$c_2 = 4 + 9 \therefore c=\sqrt{13}$ (semi-distância focal)

Como na equação reduzida dada acima o coeficiente de x^2 é positivo, a hipérbole tem eixo real sobre o eixo horizontal,

9) **Diretrizes:** são retas s_1 e s_2, paralelas ao eixo imaginário, distando deste $\frac{a^2}{c}$ unidades, cada uma.

Relação Fundamental

No triângulo OQA_2 da figura anterior, temos que $\overline{OQ} = c$, $\overline{A_2Q} = \overline{OB_1} = b$ e $\overline{OA_1} = a$. Então, aplicando-se o teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Equação da Hipérbole

Consideremos uma hipérbole centrada na origem do sistema de eixos e com focos no eixo horizontal. Assim, dado um ponto genérico P (x, y), pertinente à hipérbole, temos que:

seus vértices são:

$$A_1\ (-2, 0),\ A_2\ (2, 0),\ B_1\ (0, 3) \text{ e } B_2\ (0, -3)$$

enquanto que os focos são os pontos:

$$F_1\ (-\sqrt{13}, 0) \text{ e } F_2\ (\sqrt{13}, 0)$$

sua excentricidade é dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

as assíntotas têm equações:

$$y = \pm \frac{b}{a} . x$$

$$r_1 : y = \frac{3}{2} . x \text{ e } r_2 : y = \frac{-3}{2} . X$$

E conjunto solução seria

$S' = \{(p, q, 3p + 4q - 1);\ p, q \in R\}$

Teriam S e S' o mesmo significado matemático?

Verificamos que $(1, 1, 6) \in S$.

Se fizermos $p = 1$ e $q = 1$, a terna ordenada $(p, q, 3p + 4q - 1) = (1, 1, 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1) = (1, 1, 6) \in S'$. E tal fato irá ocorrer para todas as demais soluções. Assim, $S = S'$.

2) $4x - 12y + 5k + 3z = -4$

Façamos $y = \alpha$, $k = \beta$ e $z = \gamma$

$4x - 12\alpha + 5\beta + 3\gamma = -4$

$$x = \frac{12\alpha - 5\beta - 3\gamma - 4}{4}$$

3) $0x + 0y + 0z = 0$

Neste caso, quaisquer que sejam os valores atribuídos às variáveis, a equação será satisfeita. Logo:

$$S = R^3$$

4) $0x + 0y = 1$

Podemos observar que não existem valores de x e y que tornem verdadeira a igualdade. Então a equação é **impossível**, e daí.

$$S = \varnothing$$

NOTA: Pelo exposto, uma equação linear com duas ou mais incógnitas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_n + x_n = b$$

Será possível e indeterminada (infinitas soluções), com exceção do caso em que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ e $b \neq 0$, no qual ela é **Impossível** (sem solução).

Sistemas de Equações Lineares

Valendo-se da observação anterior, a equação

$$4x - 3y = 5 \text{ (I)}$$

tem uma infinidade de soluções. Obtenhamos algumas delas. Por exemplo, vamos atribuir a x alguns valores inteiros.

$x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0 - 3y = 5 \rightarrow y = -\frac{5}{3}$

$x = 1 \rightarrow 4 \cdot 1 - 3y = 5 \rightarrow y = -\frac{1}{3}$

Podemos observar que o par (2, 1) é uma solução comum às equações lineares (I) e (II). Daí, dizemos que (2, 1) é solução do sistema linear.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

De forma genérica, dizemos que

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um **sistema linear** de **m** equações com **n** incógnitas.

Nele podemos identificar:

1. **Incógnitas:** $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. **Coeficientes das incógnitas:** $a_{11}, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$
3. **Termos independentes:** $b_1, b_2, \ldots, b_m$

Resolver um sistema linear é determinar seu conjunto solução S, cujos elementos são as n-uplas $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que satisfazem às **m** equações simultaneamente.

Classificação de Um Sistema Linear

De acordo com o número de soluções, um sistema é classificado segundo o esquema abaixo:

Exemplos:

Seja resolver os sistemas

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

$X = 2 \rightarrow 4 \cdot 2 - 3y = 5 \rightarrow y = 1$

$X = 3 \rightarrow 4 \cdot 3 - 3y = 5 \rightarrow y = \frac{7}{3}$

Então $\left(0, -\frac{5}{3}\right), \left(1, -\frac{1}{3}\right), (2, 1), \left(3, \frac{7}{3}\right)$, ... são soluções de (I).

Utilizemos, agora, um raciocínio análogo para a equação

$$3x + 2y = 8 \text{ (II)}$$

$X = 0 \rightarrow 3.0 + 2y = 8 \rightarrow y = 4$
$X = 1 \rightarrow 3.1 + 2y = 8 \rightarrow y = 5/2$
$X = 2 \rightarrow 3.2 + 2y = 8 \rightarrow y = 1$
$X = 3 \rightarrow 3.3 + 2y = 8 \rightarrow y = -1/2$

Assim, (0, 4), (1, 5/2), (2, 1), (3, -1/2), ... são soluções de (II).

Multipliquemos ambos os membros da segunda equação por 3 e adicionemos as equações membros a membro.

$$+\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$$
$$11x = 33$$
$$x = 3$$

$$2x + 3y = 12$$
$$2.3 + 3y = 12$$
$$3y = 6$$
$$y = 2$$

$$S = \{(3, 2)\}$$

Como a solução é única, tal sistema é **possível e determinado**.

2) $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

Multipliquemos ambos os membros da 2ª equação por -2 e adicionemos as equações membro a membro:

$$+\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ -2x - 4y = -12 \end{cases}$$
$$0x + 0y = -9$$

Como esta igualdade não é satisfeita por nenhum par de valores das variáveis, este sistema é **impossível** e então:

$$S = \varnothing$$

3) $\begin{cases} 6x + 2y - 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$

Resolvendo-se o sistema

$$+\begin{cases} 6x + 2y - 4z = 4 \\ -6x - 2y + 4z = -4 \end{cases}$$
$$0x + 0y + 0z = 0$$

Observamos que qualquer valores de x,y e z satisfazem a esta equação. Logo, o sistema é **possível** e **inderterminado**, e daí

$$S = R^3$$

Sistema Homogêneo

Um sistema linear que apresenta todos os termos independentes nulos é chamado **sistema homogêneo**.

Assim, o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é homogêneo.

Todo sistema homogêneo admite como solução a n-upla (0, 0, ..., 0), chamada **solução trivial**.

Assim, todo sistema homogêneo é possível, sendo determinado, se apresentar como solução apenas a trivial, ou indeterminado se, além desta, apresentar outras soluções.

2. O sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

é homogêneo. Posteriormente, iremos aprender como resolver sistemas desse tipo. Porém, por ora, podemos afirmar que este sistema admite a solução (0, 0, 0). A terna (1, -2, 3) também satisfaz às equações (verifique!), e, portanto, é solução do sistema. Como tal sistema admite mais de uma solução, é possível e indeterminado.

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas são ditos **equivalentes**, quando possuem conjuntos-solução iguais.

Se dois sistemas S_1 e S_2 são equivalentes, podemos escrever, simbolicamente, que $\mathbf{S_1 \sim S_2}$.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

a) Quando permutamos duas equações de um sistema S_1 obtemos um sistema S_2 equivalente a S_1.

b) Quando multiplicamos ambos os membros de uma equação de um sistema S_1 por um mesmo número diferente de zero, obtemos um sistema S_2 equivalente a S_1.

c) Quando adcionamos a uma das equações de um sistema S_1 uma das outras equações multiplicadas por um mesmo número diferente de zero, obtemos um sistema S_2 equivalente a S_1.

Exemplo:

São equivalentes os sistemas

$$S_1 \begin{cases} x - 3y + 4k + z = 12 \\ 3x - 2y + k - z = 1 \\ x + y + k + z = 10 \\ 2x + 2y - 3k - z = 2 \end{cases}$$

e

$$S_2 \begin{cases} x - 3y + 4k + z = 12 \\ 3x - 2y + k - z = 1 \\ 7x - 3y + 3k - z = 12 \\ 2x + 2y - 3k - z = 2 \end{cases}$$

Assim, a 3ª equação S_2, foi obtida somando-se à 3ª equação de S_1 sua 2ª equação multiplicada por 2.

Representação Matricial de Um Sistema Linear

Exemplos:

1. Resolvendo-se o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x+2y=0 \to \times 2 \\ 5x-4y=0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 5x-4y=0 \end{cases}$$
$$7x=0$$
$$x=0$$

$$x+2y=0$$
$$0+2y=0$$
$$y=0$$

Obtemos $S = \{(0, 0)\}$. Daí que o sistema é possível e determinado, pois só admite a solução trivial.

No capítulo de matrizes, verificamos que um sistema do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

pode ser escrito através de equação matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz dos coeficientes — Matriz das variáveis — Matriz dos termos independentes

A matriz dos coeficientes é chamada **matriz incompleta** associada ao sistema S. Enquanto a matriz formada pelos coeficientes das variáveis e pelos termos independentes é chamada **matriz completa** associada ao sistema S.

Exemplo:

A representação matricial do sistema

$$S_1 \begin{cases} 3x-2y+z=4 \\ 5y-z=2 \\ 2x+3y+4z=1 \end{cases}$$

é dada por

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sua matriz incompleta é $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

e a matriz completa $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Sistema Escalonado

Um sistema de m equações com n incógnitas é escalonado (em forma de escada) quando a quantidade de coeficientes nulos das incógnitas, que iniciam as equações, vai aumentando de equação para equação, até obtermos, em certos casos, todos os coeficientes nulos.

Exemplos:

São escalonados os sistemas:

1) $S_1 \begin{cases} x-4y=3 \\ 0x-2y=1 \end{cases}$

2) $S_2 \begin{cases} 3x-2y+4z=7 \\ 3y+z=-1 \\ 4z=3 \end{cases}$ ou seja

$S_2 \begin{cases} 3x-2y+4z=7 \\ 0x+3y+z=-1 \\ 0x+0y+4z=3 \end{cases}$

3) $S_3 \begin{cases} 2x-4y+3z-w=4 \\ 5z+3w=-1 \end{cases}$ ou seja

Resolução de Um Sistema Escalonado

Dado um sistema escalonado com m equações e n incógnitas, o processo de resolução depende do tipo de sistema, como analisaremos em seguida

1° Tipo: EXISTE UMA EQUAÇÃO COM TODOS OS COEFICIENTES NULOS

Neste caso, a matriz completa associada ao sistema é dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m \end{pmatrix}$$

Assim, temos ao menos uma equação do tipo
$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = b_m$
e aí, a resolução depende do valor de b_m.

Se $b_m \neq 0$, tal equação não admite solução e, por conseguinte, o sistema será impossível.

Se, no entanto, $b_m = 0$, a equação será satisfeita para quaisquer valores das variáveis. Assim, esta equação não deve ser levada em consideração, sendo abandonada. E a resolução do sistema vai se processar utilizando as demais equações.

Exemplos:

1. O sistema S_1: $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 4y-5z=-1 \\ 0x+0y+0z=7 \end{cases}$ é impossível, pois a equação $0x + 0y + 0z = 7$ não é satisfeita por nenhuma terna $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

2. O conjunto-solução do sistema

$$S_1 \begin{cases} 3x+2y-z-w=3 \\ -3y+z+w=2 \\ -5z+3w=-1 \\ 0x+0y+0z+0w=0 \end{cases}$$

é o do sistema S_2: $\begin{cases} 3x+2y+z-w=3 \\ -3y+z+w=2 \\ -5z+3w=-1 \end{cases}$

pois a equação

$$0x + 0y + 0z + 0w = 0$$

$$5w = 7$$

$$S_3 \begin{cases} 2x - 4y + 3z - w = 4 \\ 0x + 0y + 5z + 3w = -1 \\ 0x + 0y + 0z + 5w = 7 \end{cases}$$

4) $$S_4 \begin{cases} 6x - 3y + 2z = -3 \\ 4y - z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

5) $$S_5 \begin{cases} x + y + z - w = 3 \\ y - 3z + 2w = 1 \\ 0x + 0y + 0z + w = 7 \end{cases}$$

é satisfeita por qualquer quádrupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Daí temos $S_2 \sim S_1$.

As soluções de sistemas do tipo S_2 serão analisadas a seguir.

2º Tipo: NÃO EXISTE EQUAÇÃO COM TODOS OS COEFICIENTES NULOS

A resolução deste tipo de sistema escalonado depende da relação entre o número m de equações e o número n de incógnitas. Assim, temos dois casos a considerar:

1º Caso: m = n

Quando, em um sistema escalonado, o número de equações é igual ao número de incógnitas, a matriz completa associada ao sistema é dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix},$$

onde $a_{ij} \neq 0$, $\forall i = j$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Assim, na última equação

$$a_{nn}x_n = b_n$$

Calculamos $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

Tal valor deve ser substituído na equação anterior de modo a obtermos o valor de x_{n-1}, e, assim, sucessivamente, até obtermos a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ... \alpha_n)$, solução do sistema.

Como neste caso a solução é única, o sistema é possível e determinado.

Exemplo:

Seja resolver um sistema S cuja matriz completa é dada por

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Assim, temos que

$$S: \begin{cases} 2x + y + 4z = 15 \;\; (I) \\ 3y + 2z = -1 \;\; (II) \\ 3z = 12 \;\; (III) \end{cases}$$

Obtendo o valor de z em (III)

$3z = 12$

$z = 4$

Substituindo-se este valor em (II)

$3y + 2 . z = -1$

$3y + 2 . 4 = -1$

$3y = -9$

$y = -3$

E, finalmente, utilizando a equação (I)

$2x + y + 4z = 15$

$2x + (-3) + 4 . 4 = 15$

$2x = 2$

Observamos que existem 2 equações $(m = 2)$ e 3 incógnitas $(n = 3)$. Daí, temos que $m < n$. O número de variáveis livres é dado por $n - m = 3 - 2 = 1$, ou seja, existe uma variável livre. Em S podemos observar que z é a única incógnita que não inicia qualquer equação, daí ela é a variável livre deste sistema.

Para resolvermos tal sistema, indentificadas as variáveis livres, devemos substituí-las por parâmetros reais $\alpha, \beta, \gamma, ...$ e determinar as outras variáveis em função desses parâmetros.

Neste exemplo, como existe apenas uma variável livre, devemos fazer

$$z = \alpha$$

E então, substituindo-se em S

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4\alpha = 2 \;\; (I) \\ y - 2\alpha = 3 \;\; (II) \end{cases}$$

Em (II) temos que

$y - 2\alpha = 3$

$y = 3 + 2\alpha$

Substituindo-se y em (I)

$2x - 3y + 4\alpha = 2$

$2x - 3(3 + 2\alpha) + 4\alpha = 2$

$2x - 9 - 6\alpha + 4\alpha = 2$

$2x = 2\alpha + 11$

$x = \dfrac{2\alpha + 11}{2}$

Assim, todos os ternos da forma

$\left(\dfrac{2\alpha + 11}{2}, 3 + 2\alpha, \alpha\right)$, $\alpha \in R$, são soluções deste sistema, logo ele é possível e indeterminado.

Em seguida vamos determinar algumas soluções de S, arbitrando valores reais para α.

Se $\alpha = 0 \rightarrow \left(\dfrac{2.0 + 11}{2}, 3 + 2.1, 1\right) = \left(\dfrac{11}{2}, 3, 0\right)$ é solução de S.

Se $\alpha = 1 \rightarrow \left(\dfrac{2.1 + 11}{2}, 3 + 2.1, 1\right) = \left(\dfrac{13}{2}, 5, 1\right)$ é solução de S.

Se $\alpha = \dfrac{3}{2} \rightarrow \left(\dfrac{2.\frac{3}{2} + 11}{2}, 3 + 2.\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = \left(7, 6, \dfrac{3}{2}\right)$ é solução de S.

$x = 1$

Então, a solução é a terna (1, -3, 4).

2º Caso: $m < n$

Quando no sistema escalonado, o número de equação é menor que o número de incógnitas, existem **n - m** incógnitas, de coeficientes diferentes de zero, que não iniciam qualquer equação. Tais incógnitas são chamadas de variáveis livres, e o resultado de **n - m** é o grau de indeterminação do sistema, representando a quantidade de variáveis para as quais serão arbitrados valores, de modo a obtermos as soluções do sistema.

Exemplos:

1. Seja resolver o sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 2 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$

2. Obtenhamos as soluções do sistema

$$\begin{cases} x + y + z + w = 6 \\ z + w = 5 \end{cases}$$

Neste caso, $m = 2$ e $n = 4$, e então existem $n - m = 4 - 2 =$ 2 variáveis livres, que são y e w.

Façamos $y = \alpha$ e $w = \beta$. Substituindo-se em (II)

$z + w = 5$

$z + \beta = 5$

$z = 5 - \beta$

Utilizemos agora a equação (I)

$x + y + z + w = 6$

$x + \alpha + 5 - \beta + \beta = 6$

$x = 1 - \alpha$

Então, todas quádruplas da forma $(1 - \alpha, \alpha, 5 - \beta, \beta)$ com $\alpha, \beta \in R$ são soluções desse sistema.

3. Vamos discutir o sistema

$S: \begin{cases} (k+2).x + ky = 4 \\ (k+3).y = -2 \end{cases}$ em relação ao parâmetro k.

Discutir um sistema em relação ao parâmetro $k \in R$, é determinar que valores de k tornam o sistema possível determinado (SPD), possível indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

Então, em S, verificamos que $m = n = 2$. Se ele estiver escalonado, será uma SPD, e para que isto ocorra os coeficientes dos termos iniciais de cada equação não podem ser nulos. Daí.

$$k + 2 \neq 0 \quad e \quad k + 3 \neq 0$$

Ou seja, para $k \neq -2$ e $k \neq -3$, o sistema é possível e determinado. O próximo passo é negar taiz condições e verificar o tipo de sistema obtido. Assim:

Se $k = -2$, o sistema se resume a

$$\begin{cases} (-2+2).x + (-2).y = 4 \\ (-2+3).y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y = 4 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Observa-se que, neste caso, as equações são satisfeitas para $y = -2$ e quaisquer valores de x. Logo o sistema tem infinitas soluções, então é possível e indeterminado.

A terceira hipótese é $k = -3$, e aí:

$$\begin{cases} (-3+2).x + (-3).y = 4 \\ (-3+3).y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ 0y = -2 \end{cases}$$

Como a segunda equação não se verifica para qualquer valor de y, o sistema é impossível.

Conclusão: $\begin{cases} k \neq -2 \text{ e } k \neq -3 \rightarrow SPD \\ k = -2 \rightarrow SPI \\ k = -3 \rightarrow SI \end{cases}$

Escalonamento

No item anterior, nós estudamos a resolução de um

Com o objetivo de minimizar o nosso trabalho, ao invés de operarmos nas equações de S, podemos operar com as linhas da matriz M, escalonando-a. Para isto podemos utilizar as três operações elementares já antes aludidas no item SISTEMAS EQUIVALENTES.

Cabe-nos adaptá-las para a aplicação em matrizes. Assim, no escalonamento de uma matriz, é permitido:

1. PERMUTAR DUAS LINHAS QUAISQUER.
2. MULTIPLICAR TODOS OS ELEMENTOS DE UMA MESMA LINHA POR UM MESMO NÚMERO REAL.
3. ADICIONAR AOS ELEMENTOS DE UMA LINHA OS ELEMENTOS CORRESPONDENTES DE UMA OUTRA LINHA QUALQUER, MULTIPLICADOS, POR UM MESMO NÚMERO REAL.

Exemplos:

Seja escalonar e resolver os sistemas abaixo

1) $S_1 \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x - y + 4z = -13 \\ 2x + 5y - z = 15 \end{cases}$

Em primeiro lugar devemos escrever a matriz completa de S_1.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -13 \\ 2 & 5 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

A seguir devemos ter a primeira linha com o primeiro elemento, de preferência igual a 1. Neste caso, basta permutarmos as duas primeiras linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -13 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

O próximo passo é anular os primeiros elementos das segunda e terceira linhas. Para tanto, devemos adcionar à segunda linha o resultado da primeira multiplicada por -3, e à terceira, o resultado da primeira multiplicada por -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -13 \\ 0 & 5 & -11 & 43 \\ 0 & 7 & -9 & 41 \end{pmatrix}$$

E finalmente, devemos tornar nulo o segundo elemento da terceira linha, multiplicando-a por 5 e adicionando-a à segunda multiplicada por -7

sistema previamente escalonado; porém, na maioria das vezes, o sistema não está escalonado e são as técnicas de escalonamento de um sistema que iremos abordar a seguir.

Consideramos um sistema de m equações com n incógnitas

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

De matriz completa a ele associada

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -13 \\ 0 & 5 & -11 & 43 \\ 0 & 0 & 32 & -96 \end{pmatrix}$$

Obtivemos, portanto, a matriz escalonada, a qual está associada ao sistema escalonado

$$S_2\begin{cases} x - y + 4z = -13 \quad (I) \\ 5y - 11z = 43 \quad (II) \\ 32z = -96 \quad (III) \end{cases}$$

que é equivalente a S_1.

Assim, resolvemos a equação (III)

$32z = -96$

$z = -3$

Substituindo-se em (II) e posteriormente em (I)

$5y - 11z = 43$

$5y - 11(-3) = 43$

$5y = 10$

$y = 2$

$x - y + 4z = -13$

$x - 2 + 4 \cdot (-3) = -13$

$x = 1$

Então, a solução de S_1 é a terna (1, 2, -3).

2) $$S_2\begin{cases} x + 3y + 5z - w = 5 \\ 4x - 12y + 7z + 3w = 2 \\ 2x + 6y + 10z - 2w = 4 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 5 \\ 4 & -12 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Adicionemos à segunda linha, a primeira multiplicada por -4, e à terceira, a primeira multiplicada por -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -24 & -13 & 7 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$, que é a matriz escalonada

associada ao sistema S_2. Devemos observar que a terceira linha representa a equação

$$0x + 0y + 0z + 0w = -6$$

que não é satisfeita por nenhuma quádrupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, logo o sistema é impossível.

3) $$S_3:\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 3z = 7 \\ 2x + 2y + 4z = 10 \end{cases}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Vamos adicionar à segunda linha, a primeira multiplicada por -3, e à terceira, a primeira multiplicada por -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ \ldots \end{pmatrix}$$, que é a matriz escalonada do sistema S

Substituindo-se em (I)

$x + y + 2z = 5$

$x + 3\alpha - 8 + 2\alpha = 5$

$x = 13 - 5\alpha$

Logo, as soluções de S_3 serão todos as ternas da forma $(13 - 5\alpha, 3\alpha - 8, \alpha)$, com $\alpha \in R$ e S_3 possível e indeterminado.

Resolução do Sistema n x n Pela Regra de Cramer

Um sistema linear de m equações e n incógnitas é dito **sistema normal** se o número de equações é igual ao número de incógnitas (m = n) e se o determinante D da matriz dos coeficientes, chamado **determinante principal**, for diferente de zero.

Na resolução de um sistema normal, podemos utilizar um processo prático chamado regra de Cramer.

Assim, no sistema normal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

temos como determinante principal:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chamamos **determinante característico** da incógnita x_j, representado por $\mathbf{D_{x_j}}$, ao determinante obtido substituindo-se no determinante principal D a j-ésima coluna dos coeficientes da incógnita $\mathbf{x_j}$, pela coluna dos termos independentes do sistema.

Então:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{b_1} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ \mathbf{b_2} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{b_n} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{b_1} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{b_2} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A terceira linha está associada à equação $0x + 0y + 0z = 0$ que é satisfeita para qualquer valores das variáveis; assim, tal equação deve ser descartada, resolvendo-se, então, o sistema formado pelas demais equações. Assim:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \quad (I) \\ y - 3z = -8 \quad (II) \end{cases}$$

temos duas equações ($m = 2$) e três incógnitas ($n = 3$). Existe, portanto, uma variável livre (resultado de $n - m$), que é a incógnita z.

Façamos $z = \alpha$ em (II)

$y - 3z = -8$

$y - 3\alpha = -8$

$y = 3\alpha - 8$

$$\begin{vmatrix} a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Pela regra de Cramer, o valor da incógnita x_j no sistema é dado por

$$x_j = \frac{D_{x_j}}{D}$$

Ou seja:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}; \dots; x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$$

Exemplos:

Resolver, se possível, os sistemas abaixo pela regra de Cramer.

1) $S_1: \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + 5y = -16 \end{cases}$

Logo o sistema é possível e determinado.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -16 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 1.(-16) = 26$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = 3.(-16) - 2.2 = -52$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{26}{13} = 2 \text{ e } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-52}{13} = -4$$

Então, o par (2,-4) é a solução de S_1.

2) $S_2: \begin{cases} 3x - y + 2x = 7 \\ 4y + z = 1 \\ 2x \quad - 5z = 15 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 3 \,.\, 4 \,.\, (-5) + (-1) \,.\, 1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 0 - 2 \,.\, 4 \,.\, 2 -$$

$- 3 \,.\, 1 \,.\, 0 - (-1) \,.\, 0 \,.\, (-5) = -78 \neq 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 15 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -7 \,.\, 4 \,.\, (-5) + (-1) \,.\, 1 \,.\, 15 + 2 \,.\, 1 \,.\, 0 -$$

$- 2 \,.\, 4 \,.\, 15 - (-7) \,.\, 1 \,.\, 0 - (-1) \,.\, 1 \,.\, (-5) = 0$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 15 & -5 \end{vmatrix} = 3 \,.\, 1 \,.\, (-5) + (-7) \,.\, 1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 0 \,.\, 15 - 2 \,.\, 1 \,.\, 2 -$$

$- 3 \,.\, 1 \,.\, 15 - (-7) \,.\, 0 \,.\, (-5) = -78$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 3 \,.\, 4 \,.\, 15 + (-1) \,.\, 1 \,.\, 2 + (-7) \,.\, 0 \,.\, 0 -$$

$- (-7)\, 4 \,.\, 2 - 3 \,.\, 1 \,.\, 0 - (-1) \,.\, 0 \,.\, 15 = 234$

$D \quad 0 \qquad D \quad -78$

Podemos observar que se $D \neq 0$, todas as frações serão possíveis de determinar e terão valor único.

Assim, neste caso, o sistema é **possível e determinado**.

Se, no entanto, $D = 0$, teremos:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} \to D \,.\, x_1 = D_{x1} \to 0 \,.\, x_1 = D_{x_1}$$

$$x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} \to D \,.\, x_2 = D_{x2} \to 0 \,.\, x_2 = D_{x_2}$$

....

$$x_n = \frac{D_{x_n}}{D} \to D \,.\, x_n = D_{xn} \to 0 \,.\, x_n = D_{x_n}$$

Observemos que as equações

$$0 \,.\, x_j = D_{x_j}$$

serão satisfeitas para quaisquer valores de x_j se, e somente se, $D_{x_j} = 0$, ou seja, se $D_{x_j} = 0$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e aí o sistema será **possível e indeterminado**.

Porém, se tivermos $D_{x_j} \neq 0$ para algum $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, e então a equação

$$0 \,.\, x_j = D_{x_j}$$

não será satisfeita por nenhum valor de x_j e, assim o sistema será **impossível**.

Resumindo:

$D \neq 0 \to SPD$

$$D = 0 \begin{cases} D_{x_j} = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \to SPI \\ \exists D_{x_j} \neq 0, j \in \{1, 2, \dots, n\} \to SI \end{cases}$$

Exemplos:

1) Seja classificar os sistemas, utilizando a regra Cramer.

a) $S_1: \begin{cases} x + 2y - 3y = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (-1) \,.\, 4 + 2 \,.\, 1 \,.\, 0 + (-3) \,.\, 2 \,.\, 3 -$$

$- (-3) \,.\, (-1) \,.\, 0 - 1 \,.\, 1 \,.\, 3 - 2 \,.\, 2 \,.\, 4 = -41$

Como $D \neq 0$, S_1 é um SPD.

b) $S_2: \begin{cases} 6x + 8y = 4 \\ 9x + 12y = 6 \end{cases}$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{0}{-78} = 0$; $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-78}{-78} = 1$

e $z = \frac{D_z}{D} = \frac{234}{-78} = -3$

Daí, temos que a solução de S_2 é a terna (0, 1, -3)

Discussão do Sistema n x n Pela Regra de Cramer

Pelo exposto no item anterior, num sistema normal de **n** equações com **n** incógnitas, com determinante principal D e determinante característico da incógnita x_i representado por D_{x_i} as soluções são dadas por:

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D};\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 6 \,.\, 12 \,.\, -8 \,.\, 9 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 4 \,.\, 12 - 8 - 6 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6 \,.\, 6 - 4 \,.\, 9 = 0$$

Como $D = 0$ e $D_x = D_y = 0$, concluímos que é um SPI.

c) $S_3 : \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - 3y - 2z = 2 \\ 5x - y + z = 4 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 .\ (-3) \,.\, 1 + 2 \,.\, (-2) \,.\, 5 + 3 \,.\, 4 \,.\, (-1) -$$

$- 3 \,.\, (-3) \,.\, 5 - 1 \,.\, (-2) \,.\, (-1) - 2 \,.\, 4 \,.\, 1 = 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (-3) \,.\, 1 + 2 \,.\, (-2) \,.\, 4 + 3 \,.\, 2\ (-1) -$$

$- 3 \,.\, (-3) \,.\, 4 - 1 \,.\, (-2) \,.\, (-1) - 2 \,.\, 2 \,.\, 1 = 5$

O sistema S_3 é um SI, pois $D = 0$ e $Dx \neq 0$.

2) Discutir o sistema abaixo em relação aos parâmetros a e b:

$$S: \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ -y + 2z = 1 \\ x - y - z = b \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a \,.\, (-1) \,.\, (-1) + 1 \,.\, 2 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0 \,.\, (-1) -$$

$-1 \,.\, (-1) \,.\, 1 - a \,.\, 2 \,.\, (-1) - 1 \,.\, 0 \,.\, (-1) = 3a + 3$

O sistema será possível e determinado se $D \neq 0$, então:

$D \neq 0$

$3a + 3 \neq 0 \ \therefore\ a \neq -1$

No caso de $D = 0$, ou seja $a = -1$, teremos:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ b & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \,.\, (-1) \,.\, (-1) + 1 \,.\, 2 \,.\, b + 1 \,.\, 1 \,.\, (-1) - 1$$

$.\ (-1) \,.\, b - 0 \,.\, 2 \,.\, (-1) - 1 \,.\, 1 \,.\, (-1) = 3b$

O sistema será possível e indeterminado se

$D_x = 0$

$3b = 0 \ \therefore\ b = 0$

No entanto, o sistema será impossível se

$D_x \neq 0$

$3b = \neq 0 \ \therefore\ b \neq 0$

Conclusão $\begin{cases} a \neq -1 \to SPD \\ a = -1 \begin{cases} \nearrow b = 0 \to SPI \\ \searrow b \neq 0 \to SI \end{cases} \end{cases}$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a } 3^a \text{ coluna é múltipla da } 2^a.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a } 3^a \text{ coluna é múltipla da } 1^a.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a } 1^a \text{ coluna é múltipla da } 2^a.$$

Como $D = 0$ e $D_x = D_y = D_z = 0$, por Cramer concluímos que S é um SPI.

Porém, vamos escalonar o sistema S:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Adicionemos à segunda linha, a primeira multiplicada por -2, e à terceira, a primeira multiplicada por -3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, no sistema S escalonado, temos que tanto a segunda quanto a terceira equações não admitem soluções. Logo, na realidade o sistema S é impossível e não possível e indeterminado, como sugeriu a regra de Cramer.

Sob o ponto analítico, cada uma das equações componentes do sistema em questão representa um plano em R^3, com vetores normais (2, 1, 3), (4, 2, 6) e (6, 3, 9), respectivamente. Tais vetores são paralelos, e, portanto, os planos também são paralelos e distintos, pois as equações não são equivalentes (com todos os coeficientes correspondentes proporcionais), e então não há nenhum ponto comum a eles, e daí concluímos que o sistema é impossível.

Então, a sugestão do autor para total segurança na discussão de um sistema de n equações com n incógnitas é calcular o valor do determinante principal D. Daí temos dois casos a considerar:

1º Caso: $D \neq 0 \to$ SPD

2º Caso: $D = 0 \to$ Escalonar o sistema e aplicar as técnicas estudadas neste capítulo.

NOTA DO AUTOR: Embora prática e muito utilizada, a regra de Cramer, em certos casos, tem eficiência duvidosa na discussão de um sistema.

Seja, por exemplo, classificar o sistema S pela regra de Cramer.

$$S: \begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ 4x+2y+6z=3 \\ 6x+3y+9z=4 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}=0$$, pois a 1ª coluna é múltipla da 2ª.

Exercícios

1) Identifique as equações lineares.
   a) $7x + 2y - 3z + 5 = 0$
   b) $0x + 0y = 0$
   c) $4xy - 3xz + yz - 2 = 0$
   d) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1$
   e) $\frac{4}{x}+\frac{2}{y}-7=0$

2) Considerando a equação $3x + 4y - 5z + (2m + n - 2)x^2 + (2m - n + 10)y^3 = 0$, de variáveis x, y e z, determine os valores dos números reais m e n de modo que ela seja linear.

3) Assinale a(s) opção(ões) em que encontramos uma solução da equação $4x - 2y + 3z - 3 = 0$.
   a) (1, 2, 1)
   b) (-2, 3, 0)
   c) (2, -2, -3)
   d) (3, 2, 1)

4) Determine o valor real de k, sabendo que (2, 3, -1, 2) é solução da equação $3a + 2b - 4c + d + 2k - 3 = 0$, de variáveis a, b, c e d.

5) **(UNICAMP)** Considere o sistema linear nas variáveis x, y e z, $\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 7x+8y-mz=26 \end{cases}$, onde m é um número real.

   Sejam $a < b < c$ números inteiros consecutivos tais que $(x, y, z) = (a, b, c)$ é uma solução desse sistema. O valor de m é igual a
   a) 3.
   b) 2.
   c) 1.
   d) 0.

6) **(UNICAMP)** Considere o sistema linear nas variáveis x, y, z e w, $\begin{cases} x-y=1 \\ y+z=2 \\ w-z=3 \end{cases}$. Logo, a soma $x + y + z + w$ é igual a
   a) -2.
   b) 0.
   c) 6.
   d) 8.

7) Em que opções abaixo encontramos sistemas lineares?

   a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=7 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x^2+y^3-2z=9 \\ xyz=-1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 2a+3b-5c=5 \\ 2b+7c=-2 \\ 3c=7 \end{cases}$

8) Determine os valores dos números reais a, b e c sabendo que o sistema $\begin{cases} 7x-5y+2z=a-b+c \\ 5x+3y+4z=a+b-7 \\ 3x-4y+8z=a-c+1 \end{cases}$, de variáveis x, y e z, é homogêneo.

11) Escreva um sistema de matriz completa $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12) Resolva os sistemas abaixo.

   a) $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ 2x-y+2z=8 \\ x+2y+3z=17 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+4z=1 \\ 3x+4y+5z=2 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 3x-2y+4z=5 \\ 2x+4y-z=5 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+4y+2z=3 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=6 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$

   f) $\begin{cases} 2x-y+5z=-2 \\ 3x+y+10z=2 \\ x+y+4z=2 \end{cases}$

   g) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+2y+2z=3 \\ 2x+y+5z=0 \end{cases}$

13) **(FGV)** Resolvendo o sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=1 \\ 6y+3z=-12 \end{cases}$, obtém-se para z o valor:
   a) -3
   b) -2
   c) 0
   d) 2
   e) 3

14) João, Maria e Pedro possuem juntos R$ 70,00. Sabe-se que João e Pedro possuem juntos R$ 40,00 e que Maria e João possuem juntos R$ 58,00. Qual dos três possui a menor quantia?

15) Na perfumaria Xerobom, o xampu, o condicionador e a loção de sua fabricação estão sendo apresentados aos clientes em três tipos de conjuntos:

9) Resolva os sistemas equivalentes $\begin{cases} 7x - 4y = 2k - 2 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} 5x + 3y = 4 - 2m \\ 3x + y = 15 \end{cases}$, de variáveis x e y.

10) Escreva as matrizes completas dos sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y + 5z = 1 \\ 2x - 3y + 7z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z - w = 8 \\ 2x + z + 3w = 0 \\ x - y + z = 9 \\ 3y = 7 \end{cases}$

CONJUNTO	PREÇO
2 loções e 3 xampus	R$ 38,00
4 xampus e 2 condicionadores	R$ 26,00
2 loções e 1 condicionadores	R$ 31,00

Determine o preço de cada um desses produtos, considerando que o preço individual de cada produto é o mesmo, independente do conjunto ao qual pertence.

16) **(FUVEST)** João entrou na lanchonete BOG e pediu 3 hambúrgueres, 1 suco de laranja e 2 cocadas, gastando R$ 21,50. Na mesa ao lado, algumas pessoas pediram 8 hambúrgueres, 3 sucos de laranja e 5 cocadas, gastando R$ 57,00. Sabendo-se que o preço de um hambúrguer, mais o de um suco de laranja, mais o de uma cocada totaliza R$ 10,00, calcule o preço de cada um desses itens.

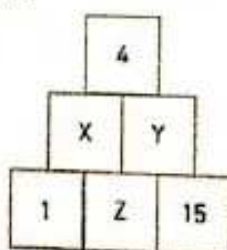
17) **(UERJ)** Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R$ 65,00. Veja na tabela os preços da água por embalagem:

VOLUME DA EMBALAGEM (L)	PREÇO (R$)
20	10,00
10	6,00
2	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a **n**. O valor de **n** é um divisor de:

a) 32
b) 65
c) 77
d) 81

18) **(FUVEST)** Três cidades A, B e C situam-se longe de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A a B. Um encontro foi marcado por três moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e à distância de 210 km de A. Sabendo-se que P está 20 km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

19) **(UERJ)** A ilustração abaixo mostra seis cartões numerados organizados em três linhas. Em cada linha, os números estão dispostos em ordem crescente, da esquerda para a direita. Em cada cartão, está registrado um número exatamente igual à diferença positiva dos números registrados nos dois cartões que estão imediatamente abaixo dele. Por exemplo, os cartões 1 e Z estão imediatamente abaixo do cartão X.

Determine os valores de X, Y e Z.

Determine o número do tijolo situado na base da pirâmide e apontado pela seta.

21) O tempo de decomposição de materiais depende do volume e das condições do solo, mas existem alguns valores de referência. Considerando valores de referência em 1 000 kg de cada material e chamando de P o tempo de decomposição do plástico, A do alumínio e V do vidro, em anos, temos:

$$\begin{cases} V = 10P - A \\ 2A - P + V = 4550 \\ 4A + 5P - V = 250 \end{cases}$$

Para esses valores de referência, determine os tempos de decomposição do plástico, do alumínio e do vidro.

22) **(UERJ)** Observe a equação química que representa a fermentação do açúcar:

$$xC_6H_{12}O_6 \rightarrow yC_2H_5OH$$

Uma das formas de equilibrar essa equação é igualar, em seus dois membros, as quantidades de átomos de cada elemento químico. Esse processo dá origem ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 12x = 6z \\ 6x = 2y + z \end{cases}$$

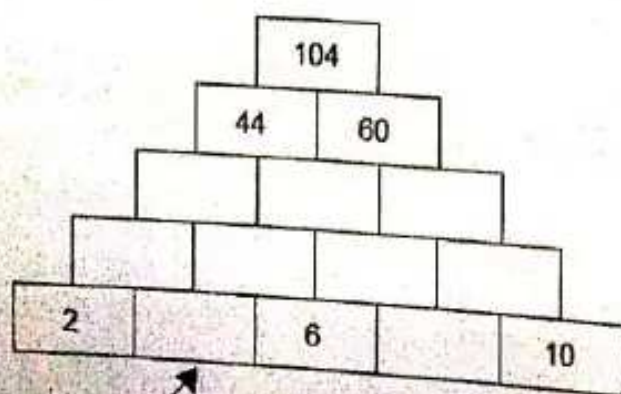
Determine o conjunto-solução do sistema e calcule os menores valores inteiros positivos de x, y e z que formam uma das soluções desse sistema.

23) Um campeonato de futebol foi disputado por 10 equipes em um único turno, de modo que cada time enfrentou cada um dos outros apenas uma vez. O vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha ponto algum; em caso de empate, cada equipe ganha 1 ponto. Ao final do campeonato, tivemos a seguinte pontuação:

Equipe 01 – 20 pontos
Equipe 02 – 10 pontos
Equipe 03 – 14 pontos
Equipe 04 – 09 pontos
Equipe 05 – 12 pontos
Equipe 06 – 17 pontos
Equipe 07 – 09 pontos
Equipe 08 – 13 pontos
Equipe 09 – 04 pontos
Equipe 10 – 10 pontos

Determine quantos jogos desse campeonato terminaram empatados.

Determine os valores de X, Y e Z. empatados.

20) Na pirâmide a seguir, para as camadas acima da base, o número colocado em cada tijolo é a soma dos números dos tijolos nos quais ele se apoia e que estão imediatamente abaixo dele.

24) Determine os valores de k, de modo que os sistemas abaixo sejam possíveis e determinados.

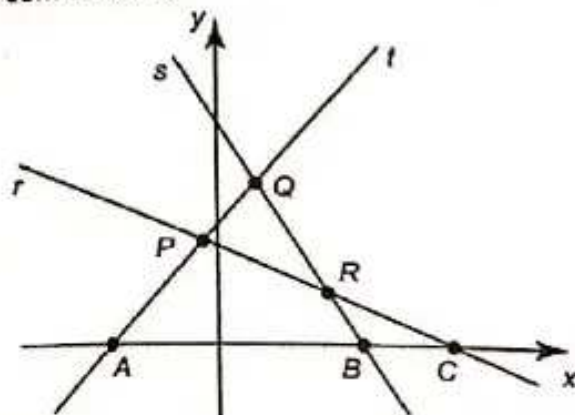
a) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 3x+ky=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y+kz=3 \\ 2x+3y+4z=1 \\ kx+y+3z=2 \end{cases}$

25) Determine os valores de m e p, de modo que o sistema $\begin{cases} 2x+2y-z=m \\ 2x+py+3z=4 \\ x-3y+2z=1 \end{cases}$ não admita solução.

26) O sistema $\begin{cases} x-y+mz=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ admite uma solução não trivial.

Determine o valor de m.

27) **(ENEM)** Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.

Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.
b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.
c) Possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.
d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.
e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

28) **(PUC)** Considere o sistema $\begin{cases} 2x+ay=3 \\ x+2y=1 \end{cases}$ e assinale a alternativa correta:

a) O sistema tem solução para todo $a \in \mathbb{R}$.
b) O sistema tem exatamente uma solução para $a = 2$.
c) O sistema tem infinitas soluções para $a = 1$.
d) O sistema tem solução para $a = 4$.
e) O sistema tem exatamente três soluções para $a = -1$.

29) **(UNICAMP)** Sabendo que k é um número real, considere o sistema linear nas variáveis x e y, $\begin{cases} x+ky=1 \\ x+y=k \end{cases}$. É correto afirmar que esse sistema

a) tem solução para todo k.
b) não tem solução única para nenhum k.
c) não tem solução se $k = 1$.
d) tem infinitas soluções se $k \neq 1$.

32) **(PUC)** Considere o sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y=1 \end{cases}$.

a) Este sistema tem alguma solução?
b) Qual a dimensão do conjunto solução deste sistema?
c) Descreva geometricamente este conjunto solução.

33) Dado o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+z=6 \\ 2x+3y+a^2z=6a \end{cases}$, determine os valores de a para os quais tal sistema é

a) possível e determinado.
b) possível e indeterminado.
c) impossível.

34) **(UNICAMP)** Sejam a e b números reais. Considere, então, os sistemas lineares $\begin{cases} x-y=a \\ z-y=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=b \end{cases}$, nas variáveis x, y e z. Sabendo que esses dois sistemas possuem uma solução comum, podemos afirmar que

a) $a-b=0$.
b) $a+b=1$.
c) $a-b=2$.
d) $a+b=3$.

35) **(UNICAMP)** Sabendo que m é um número real, considere o sistema linear $\begin{cases} mx+2z=4 \\ x-y+z=3 \\ 2x+mz=4 \end{cases}$, nas variáveis x, y e z.

a) Seja A a matriz dos coeficientes desse sistema. Determine os valores de m para os quais a soma dos quadrados dos elementos da matriz A é igual à soma dos elementos da matriz $A^2 = A \cdot A$.
b) Para $m = 2$, encontre a solução do sistema linear para a qual o produto xyz é mínimo.

36) **(IME)** Considere o sistema de equações $\begin{cases} x+y+2z=b_1 \\ 2x-y+3z=b_2 \\ 5x-y+az=b_3 \end{cases}$

Sendo b_1, b_2 e b_3 valores reais quaisquer, qual a condição para que o sistema possua solução única?

37) **(ITA)** Para que valores do número a, o sistema $\begin{cases} 3^a x-9^a y+3z=2^a \\ 3^{a+1}x-5y+9z=2^{a+1} \\ x+3^{a-1}y+3^{a+1}z=1 \end{cases}$, de incógnitas x, y e z, é possível e determinado?

30) **(PUC)** Considere o sistema $\begin{cases} ax+10y=25 \\ 3x+by=15 \end{cases}$. Determine os valores de a e b tais que o sistema tenha mais que uma solução.

31) **(PUC)** O conjunto de todas as soluções do sistema $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \end{cases}$

a) é vazio.
b) consiste apenas no vetor nulo (0, 0, 0).
c) consiste apenas no vetor (1, -2, 1).
d) consiste em todos os múltiplos {(a, -2a, a)} de (1, -2, 1).
e) consiste em todos os múltiplos {(a, a, -2a)} de (1, 1, -2).

38) **(IME)** Resolva o sistema $\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases}$, onde $a \neq 1$ e $a > 0$.

Gabarito

1) a; b
2) m = -2 e n = 6
3) a; c
4) $-\frac{15}{2}$
5) a
6) d

7) a; c
8) a = 2, b = 5 e c = 3
9) S = {(4, 3)}
10)
a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

11) $\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ 4x+6z=5 \\ x+y=0 \end{cases}$

12)
a) S = {(1, 2, 4)}
b) S = {(k+2, -2k-1, k), k ∈ R}
c) S = (1, 1, 1)}
d) S = ∅
e) S = {(3, -k, k), k ∈ R}
f) S = {(0, 2, 0)}
g) S = {(-1, 2, 0)}

13) d
14) Pedro
15) X : R$ 4,00
L : R$ 13,00
C : R$ 5,00

16) H : R$ 4,00
S : R$ 2,50
C : R$ 3,50

17) c
18) 60 km
19) X = 5; Y = 9 e Z = 6
20) 5
21) 450 anos, 500 anos e 4000 anos
22) S = {(t, 2t, 2t); t ∈ R} e x = 1, y = 1 e z = 2
23) 17

32)
a) Sim
b) 1
c) A reta contendo os pontos (1, 0, 0) e (0, 1, 0).

33)
a) $a \neq \pm 1$
b) a = 1
c) a = -1

34) d
35)
a) m = 0
b) (1, -1, 1)

36) $a \neq 8$
37) 0 e $\frac{-1+\log_3^5}{2}$

38) $x = a^{\frac{1}{a-1}}$

$y = a^{\frac{a}{a-1}}$

Anotações

24)

a) $k \neq -\frac{9}{2}$

b) $k \neq 1$ e $k \neq \frac{7}{3}$

25) $p = -\frac{29}{5}$ e $m \neq 12$

26) -8

27) d

28) b

29) a

30) $a = 5$ e $b = 6$

31) d

Capítulo XXII

NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

Nos dias de hoje a Estatística é uma importante ferramenta em diversas áreas do conhecimento humano. Tem grande aplicação em situações que envolvem tomada de decisões, interpretação da manifestação de preferência de um grupo, censos demográficos e econômicos, entre outras.

Neste capítulo vamos definir termos usados na Estatística, bem como mostrar, de modo prático, a utilização dos cálculos estatísticos nos problemas do nosso cotidiano e as suas respectivas interpretações. Afinal de contas, a Estatística nos auxilia a entender melhor o comportamento de todo um conjunto de indivíduos ou situações (população) utilizando as conclusões obtidas em uma parte que lhe seja representativa (amostra).

Consideremos, por exemplo, o caso do secretário de esportes de um certo município que deseja investir na modernização e ampliação dos equipamentos esportivos de sua cidade. Como seria impossível ouvir a opinião de todos os moradores (população) ele resolve escolher um conjunto formado de 2.000 habitantes de diferentes bairros e diferentes classes sociais (amostra). Cada um dos entrevistados deveria escolher um entre grupos de modalidades esportivas disputadas em CAMPO, QUADRA, PISCINA ou GINÁSIO DE ATLETISMO. Para uma melhor compreensão das autoridades, o resultado da pesquisa poderia ser indicado em uma tabela formada por três colunas:

1) a das VARIÁVEIS, que são os grupos de modalidades que receberão os votos;
2) a das FREQUÊNCIAS ABSOLUTAS, que são as quantidades de votos que cada variável recebeu;
3) a das FREQUÊNCIAS RELATIVAS, que são as razões entre as frequências absolutas das variáveis e o total de elementos do conjunto que serviu como amostra, dadas, geralmente, sob a forma de porcentagem.

GRUPOS DE MODALIDADES	FREQUÊNCIA ABSOLUTA	FREQUÊNCIA RELATIVA
Campo	800	40%
Quadra	500	25%
Piscina	400	20%
Ginásio	300	15%

1) CAMPO: 40% de 360° = 144°
2) QUADRA: 25% de 360° = 90°
3) PISCINA: 20% de 360° = 72°
4) GINÁSIO: 15% de 360° = 54°

Total = 360°

Distribuição de Frequência

Em determinadas pesquisas, devido ao grande número de dados coletados, não é aconselhável construirmos uma tabela onde cada valor apurado seja analisado em separado. Tal procedimento faria com que a tabela tivesse muitas linhas e, portanto, dificultaria a interpretação do resultado. Nesses casos recomenda-se dividir os valores encontrados em intervalos de mesmo comprimento (amplitude).

Para um melhor entendimento de como, na prática, podemos construir uma tabela utilizando-se a DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA, vamos considerar que, por exemplo, uma empresa de ônibus deseja conhecer o perfil do usuário de uma de suas linhas regulares. Assim, em um certo dia, o fiscal anotou as idades de todos os passageiros em uma das viagens de um coletivo nessa referida linha. Os resultados obtidos foram:

20	61	16	58	42	50	50	60	10	24
54	20	11	59	55	64	33	47	58	12
51	62	18	54	21	60	48	35	32	47
56	34	59	48	43	10	44	58	43	63

O próximo passo consiste em agrupar esses dados em intervalos de mesmo comprimento (amplitude).

Observemos que o menor valor do rol é 10, portanto o primeiro intervalo deve conter o número 10, e no último intervalo deve estar incluído o maior valor, neste caso, o número 64.

Vamos escolher, por exemplo, intervalos de amplitude 10. Os intervalos devem ser semi-abertos à direita, ou seja, com o limite inferior incluído e o limite superior excluído. Na nossa amostra, o primeiro intervalo considerado seria o semi-aberto à direita de 10 a 20, cuja representação é 10 |— 20. Nele estarão incluídas as idades de 10 (inclusive) a 20(exclusive).

Devemos, portanto, utilizar na primeira coluna os intervalos, na segunda coluna as frequências absolutas de cada uma dessas classes, e, na terceira, as respectivas frequências relativas, como mostrado a seguir.

IDADES	FREQUÊNCIA	FREQUÊNCIA

TOTAL	2.000	100%

Podemos observar na tabela que o grupo de modalidades esportivas disputadas em campo foi o vencedor com 800 votos equivalente à fração ____ do total, ou seja, 40%.

Uma outra forma muito utilizada para representar o resultado desse tipo de pesquisa é o **GRÁFICO DE SETORES**. Nele, as variáveis são dispostas em setores circulares, considerando-se um círculo de raio qualquer. Os ângulos dos setores são proporcionais às frequências relativas das variáveis a eles associadas. Sabemos que o círculo equivale a um ângulo central de 360°, portanto podemos determinar de modo prático o ângulo de cada setor:

	ABSOLUTA	RELATIVA
10 ⊢ 20	6	15%
20 ⊢ 30	4	10%
30 ⊢ 40	4	10%
40 ⊢ 50	8	20%
50 ⊢ 60	12	30%
60 ⊢ 70	6	15%
TOTAL	40	100%

Medida de Posição Central

Já vimos que os dados coletados podem ser organizados em um rol e tabelados em intervalos de amplitude constante, a chamada distribuição por frequência. Muitas vezes necessitamos destacar um valor que represente o intervalo, valor esse em torno do qual os dados tendam a agrupar-se. Daí, vamos destacar os dois critérios mais utilizados para buscar esse valor mais central do intervalo.

1ª Média aritmética ($\overline{X}$)

A média aritmética, ou simplesmente média, independe dos dados estarem ou não em ordem crescente ou decrescente. A média aritmética é igual à soma de todos os dados coletados, dividida pela quantidade deles.

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Tornemos como exemplo as partidas disputadas pelo Arranca Toco Futebol Clube. Na disputa de um torneio foram contabilizadas todas as falta cometidas por essa equipe em cada partida: 18, 16, 24, 18, 13, 29, 20, 32, 30, 15, e 27.

A média de faltas cometidas por jogo foi:

$$\overline{X} = \frac{18+16+24+18+13+29+20+32+30+15+27}{11} = \frac{242}{11} = 22$$

2ª Mediana (M_d)

Para obtermos a mediana de uma amostra de dados devemos colocá-los em ordem crescente ou decrescente. A mediana será o valor que ocupar a posição central. No caso de uma amostra com número par de dados, a mediana será a média aritmética dos dois valores mais centrais.

Na situação anterior poderíamos considerar o rol dos dados em ordem crescente, por exemplo:

Portanto, temos que Md = 20.

Note que a mediana é o valor central, levando-se em consideração apenas a posição que ele ocupa quando ordenamos os valores. Já a média aritmética é calculada levando-se em consideração todos os valores, nem sempre é um elemento do rol de dados e representa melhor o valor médio do intervalo.

Vamos propor uma reflexão: considerando o rol 2; 4; 6; 88; 110, temos que:

$$\overline{X} = \frac{2+4+6+88+110}{5} = \frac{210}{5} = 42 \quad \text{e}$$

Md = 6

Se você tivesse que escolher um desses dois valores para representar o valor médio desse rol, com qual deles ficaria?

Medidas de Dispersão

Como acabamos de ver, a média aritmética e a mediana são valores que expressam a tendência central, ou seja os valores em torno das quais os dados de certa amostra tendem a agrupar-se. Em algumas situações é importante aplicarmos mecanismos que nos possibilitam verificar o quão dispersos estão os dados em relação à média, ou quanto homogêneo é o conjunto de dados da amostra que está sendo estudada. Por vezes, em uma seleção de candidatos postulantes a uma determinada vaga que tenham a mesma média, dá-se preferência àquele cujas notas estejam mais próximos da média, com uma menor dispersão.

Neste segmentos vamos mostrar as opções que dispomos para calcular a variabilidade dos dados de uma amostra em relação à média.

1º Desvio Médio (D_M)

Vamos definir o desvio d de um elemento como sendo a diferença entre o seu valor e a média aritmética dos valores dos elementos do conjunto.

Consideremos as amostras A e B a seguir:

A: 24; 26; 27; 28; 30

B: 10; 21; 30; 32; 42

Vamos determinar a média e os desvios da amostra A:

$$\overline{X} = \frac{24+26+27+28+30}{5} = \frac{135}{5} = 27$$

DESVIOS: 24 – 27 = -3 26 – 27 = -1 27 – 27 = 0 28 – 27 = 1 30 – 27 = 3

NOTA: A soma de todos os desvios de uma amostra é sempre igual a zero.

No exemplo anterior: -3 + (-1) + 0 + 1 + 3 = 0

Vamos determinar agora, a média e os desvios da amostra B:

$$\overline{X} = \frac{10+21+30+32+42}{5} = \frac{135}{5} = 27$$

DESVIOS: 10 – 27 = - 17 21 – 27 = -6 30 – 27 = 3 32 – 27 = 5 42 – 27 = 15

Verifique a soma!
- 17 + (-6) + 3 + 5 + 15 = 0

Definimos o desvio médio de uma amostra como sendo a

Se essas quantidades representassem os números de exercícios que você fez por dia, em uma determinada semana, qual você acha que teria sido sua média diária 42 ou 6?

Moda (M_0)

Chamamos de MODA de uma amostra ao valor que aparece mais vezes, ou seja, tem a maior frequência. Nem todo conjunto tem moda, neste caso é chamado de AMODAL.

Exemplos:

a) 6; 8; 5; 6 → Mo = 6

b) 4; 1; 6; 7; 2 → Amodal

c) 3; 8; 7; 8; 3; 1 → Mo = 3 e 8 (Bimodal)

média aritmética dos módulos de todos os desvios.

Na amostra A:

$$D_m = \frac{|-3|+|-1|+|0|+|1|+|3|}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

Na amostra B:

$$D_m = \frac{|-17|+|-6|+|3|+|5|+|15|}{5} = \frac{46}{5} = 9{,}2$$

A amostra B, com maior desvio médio, apresenta uma maior dispersão, ou seja, é o conjunto menos homogêneo.

2ª Variância (V_{AR})

A variância de uma amostra é igual à média aritmética dos quadrados dos desvios de todos os seus elementos.

Continuemos a considerar as amostras A e B do exemplo anterior.

Na amostra A:

$$V_{ar} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+0^2+1^2+3^2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

Na amostra B:

$$V_{ar} = \frac{(-17)^2+(-6)^2+3^2+5^2+15^2}{5} = \frac{584}{5} = 116{,}8$$

Confirmando a conclusão obtida na análise dos desvios médios, a amostra B tem uma maior variância, logo é menos homogênea.

3ª Desvio Padrão (D_P)

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

Tomando a amostra **A** anterior:

$$D_P = \sqrt{V_{ar}} = \sqrt{4} = 2$$

Na amostra **B**:

$$D_P = \sqrt{V_{ar}} = \sqrt{116{,}8} \cong 10{,}8$$

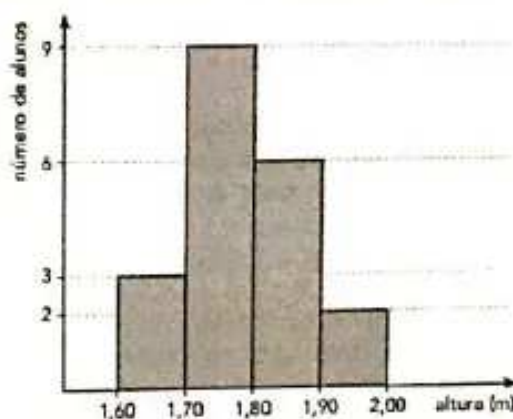
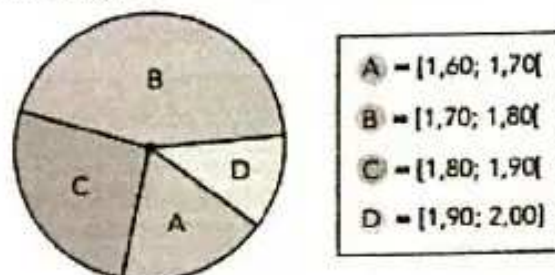
Logo o maior desvio padrão implica em uma amostra mais dispersa.

Exercícios

1) **(ENEM)** Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como o representado na figura abaixo.

O ângulo do maior desses setores medirá, em graus,

a) 108,0.
b) 122,4.
c) 129,6.
d) 151,2.
e) 154,8.

3) **(UERJ)** Após serem medidas as alturas dos alunos de uma turma, elaborou-se o seguinte histograma:

Os dados do histograma também podem ser representados em um gráfico de setores. Observe:

Calcule o maior ângulo central, em graus, desse gráfico de setores.

4) **(ENEM)** O presidente de um time de futebol quer contratar um atacante para seu elenco e um empresário lhe ofereceu cinco jogadores. Ele deseja contratar o jogador que obteve a maior média de gols nos anos de 2010 a 2013.

O quadro apresenta o número de gols marcados nos anos de 2010 a 2013 por cada um dos cinco jogadores: I, II, III,

Ao setor a estão associadas 35% das respostas, ao setor b, 270 respostas e, aos setores c e d, um mesmo número de respostas. Esse número é:

a) 45
b) 90
c) 180
d) 450
e) 900

2) **(ENEM)** Uma revista publicará os dados, apresentados no gráfico, sobre como os tipos sanguíneos estão distribuídos entre a população brasileira. Contudo, o editor dessa revista solicitou que esse gráfico seja publicado na forma de setores, em que cada grupo esteja representado por um setor circular.

IV e V.

Jogador	Número de gols em 2010	Número de gols em 2011	Número de gols em 2012	Número de gols em 2013
I	21	21	24	21
II	20	21	22	22
III	26	21	20	21
IV	23	23	19	18
V	16	21	26	16

O presidente do time deve contratar o jogador

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

5) **(ENEM)** Cinco amigos marcaram uma viagem à praia em dezembro. Para economizar, combinaram de ir num único carro. Cada amigo anotou quantos quilômetros seu carro fez, em média, por litro de gasolina, nos meses de setembro, outubro e novembro. Ao final desse trimestre, calcularam a média dos três valores obtidos para escolherem o carro mais econômico, ou seja, o que teve a maior média. Os dados estão representados na tabela:

Carro	Desempenho médio mensal (km/litro)		
	Setembro	Outubro	Novembro
I	6,2	9,0	9,3
II	6,7	6,8	9,5
III	8,3	8,7	9,0
IV	8,5	7,5	8,5
V	8,0	8,0	8,0

Qual carro os amigos deverão escolher para a viagem?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

6) **(ENEM)** Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas. O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é

a) 18.
b) 19.
c) 22.
d) 25.
e) 26.

7) **(ENEM)** Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro

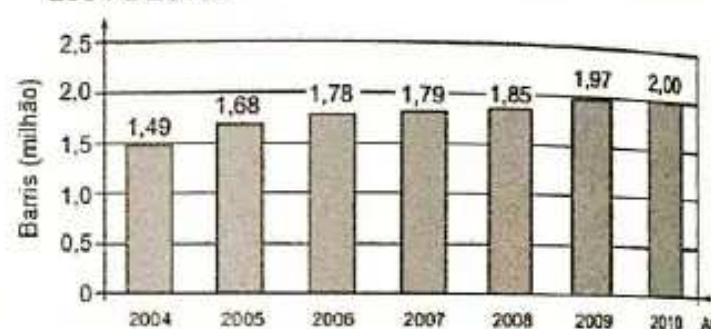
Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII

8) **(ENEM)** A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

a) 26
b) 29
c) 30
d) 31
e) 35

9) **(ENEM)** O gráfico mostra a média de produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, no período de 2004 a 2010.

Estimativas feitas naquela época indicavam que a média de produção diária de petróleo no Brasil, em 2012, seria 10% superior à média dos três últimos anos apresentados no gráfico. Se essas estimativas tivessem sido confirmadas a média de produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, em 2012, teria sido igual a

a) 1,940.
b) 2,134.
c) 2,167.
d) 2,420.
e) 6,402.

10) **(ENEM)** O índice de eficiência utilizado por um produtor de leite para qualificar suas vacas é dado pelo produto do tempo de lactação (em dias) pela produção média diária de leite (em kg), dividido pelo intervalo entre partos (em meses). Para esse produtor, a vaca é qualificada como eficiente quando esse índice é, no mínimo, 281 quilogramas por mês, mantendo sempre as mesmas condições de manejo (alimentação, vacinação e outros). Na comparação de duas ou mais vacas, a mais eficiente é a que tem

meses:

- 1º mês: 21;
- 2º mês: 22;
- 3º mês: 25;
- 4º mês: 31;
- 5º mês: 21.

No início do primeiro mês, esse posto de saúde tinha 228 vacinas contra febre amarela em estoque. A política de reposição do estoque prevê a aquisição de novas vacinas, no início do sexto mês, de tal forma que a quantidade inicial em estoque para os próximos meses seja igual a 12 vezes a média das quantidades mensais dessas vacinas aplicadas nos últimos cinco meses.

- 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

a) 59
b) 65
c) 68
d) 71
e) 80

16) **(ENEM)** Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

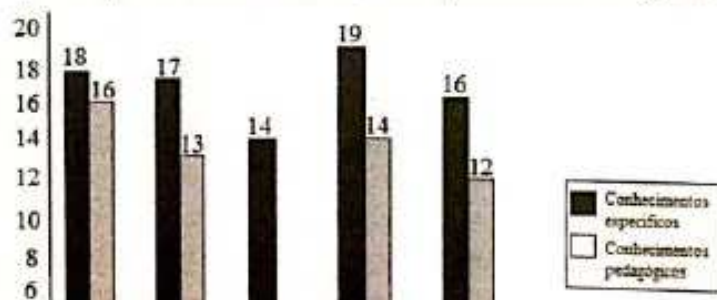
	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

17) **(PUC)** Foi feita uma pesquisa sobre a qualidade do doce de abóbora da empresa Bora-Bora. Cada entrevistado dava ao produto uma nota de 0 a 10. Na primeira etapa da pesquisa foram entrevistados 1.000 consumidores e a média das notas foi igual a 7. Após a realização da segunda etapa da pesquisa, constatou-se que a média das notas dadas pelos entrevistados nas duas etapas foi igual a 8. O número de entrevistados na segunda etapa foi, no mínimo, igual a:

a) 300
b) 400
c) 500
d) 700
e) 850

18) **(ENEM)** As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico.

19) **(ENEM)** Uma partida de voleibol entre Brasil e Itália foi decidida em cinco sets. As pontuações do jogo estão descritas na tabela.

	1º set	2º set	3º set	4º set	5º set
Brasil	25	25	24	25	18
Itália	16	20	26	27	16

Nessa partida, a mediana dos pontos obtidos por set pelo time da Itália foi igual a

a) 16.
b) 20.
c) 21.
d) 23.
e) 26.

20) **(ENEM)** Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

a) 20,70.
b) 20,77.
c) 20,80.
d) 20,85.
e) 20,90.

21) **(ENEM)** Para as pessoas que não gostam de correr grandes riscos no mercado financeiro, a aplicação em caderneta de poupança é indicada, pois, conforme a tabela (período 2005 até 2011), a rentabilidade apresentou pequena variação.

Ano	Rentabilidade (%)
2005	7,0
2006	4,9
2007	6,4
2008	6,2
2009	7,2
2010	6,8
2011	7,0

Com base nos dados da tabela, a mediana dos percentuais de rentabilidade, no período observado, é igual a

a) 6,2.
b) 6,5.
c) 6,6.
d) 6,8.
e) 7,0.

4
2
0
1
Avaliador A Avaliador B Avaliador C Avaliador D Avaliador E

Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora. Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

a) 0,25 ponto maior.
b) 1,00 ponto maior.
c) 1,00 ponto menor.
d) 2,00 pontos menor.
e) 1,25 ponto maior.

22) **(ENEM)** Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra/branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

Mês	Cotação	Ano
Outubro	R$ 83,00	2007
Novembro	R$ 73,10	2007
Dezembro	R$ 81,60	2007
Janeiro	R$ 82,00	2008
Fevereiro	R$ 85,30	2008
Março	R$ 84,00	2008
Abril	R$ 84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra/branco nesse período era igual a

a) R$ 73,10.
b) R$ 81,50.
c) R$ 82,00.
d) R$ 83,00.
e) R$ 83,30.

23) **(ENEM)** Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será

a) K.
b) L.
c) M.
d) N.
e) P.

24) **(ENEM)** Uma pessoa está disputando um processo de seleção para uma vaga de emprego em um escritório. Em uma das etapas desse processo, ela tem de digitar oito textos. A quantidade de erros dessa pessoa, em cada um dos textos digitados, é dada na tabela.

Texto	Número de erros
I	2
II	0
III	2
IV	2
V	6
VI	3
VII	4
VIII	5

Nessa etapa do processo de seleção, os candidatos serão avaliados pelo valor da mediana do número de erros. A mediana dos números de erros cometidos por essa pessoa é igual a

a) 2,0.
b) 2,5.

26) **(ENEM)** Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe:

a) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
b) seria a vencedora, se ele obtivesse nota 10.
c) seria a segunda colocada, se ele obtivesse nota 8.
d) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
e) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação, se o aluno obtivesse nota 9.

27) **(ENEM)** O quadro a seguir indica a quantidade de medalhas obtidas por atletas brasileiros nos Jogos Olímpicos de 1976 a 2008.

Ano	Número de medalhas
1976	2
1980	4
1984	8
1988	6
1992	3
1996	15
2000	12
2004	10
2008	15

A mediana e a média do número de medalhas obtidas pelos atletas brasileiros nos Jogos Olímpicos de 1976 a 2008 são, respectivamente, iguais a

a) 7 e 7,5.
b) 7 e 8,3.
c) 8 e 7,5.
d) 8 e 8,3.
e) 15 e 8,3.

28) **(ENEM)** O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) mede a variação dos custos dos gastos no período do primeiro ao último dia de cada mês de referência. O quadro a seguir mostra informações sobre o IPCA dos meses de janeiro a outubro de 2011.

c) 3,0.
d) 3,5.
e) 4,0.

25) **(ENEM)** Os salários, em reais, dos funcionários de uma empresa são distribuídos conforme o quadro:

Valor do salário (R$)	622,00	1 244,00	3 110,00	6 220,00
Número de funcionários	24	1	20	3

A mediana dos valores dos salários dessa empresa é, em reais,

a) 622,00.
b) 933,00.
c) 1 244,00.
d) 2 021,50.
e) 2 799,00.

Mês/ano	Índice do mês (em %)
Out./2011	0,43
Set./2011	0,53
Ago./2011	0,37
Jul./2011	0,16
Jun./2011	0,15
Maio/2011	0,47
Abr./2011	0,77
Mar./2011	0,79
Fev./2011	0,80
Jan./2011	0,83

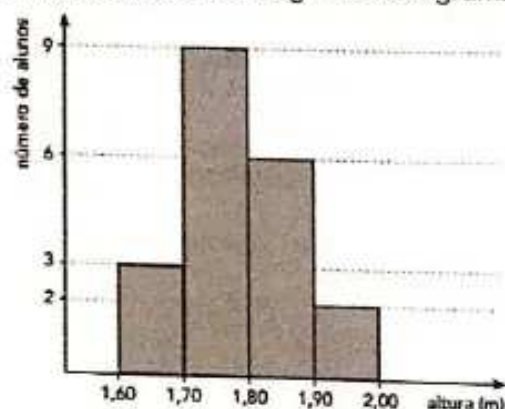
Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo, 2011.
Disponível em: www.portalbrasil/ipca.htm.

De acordo com as informações dadas, a mediana e a média aritmética do IPCA, de janeiro a outubro de 2011, são, respectivamente,

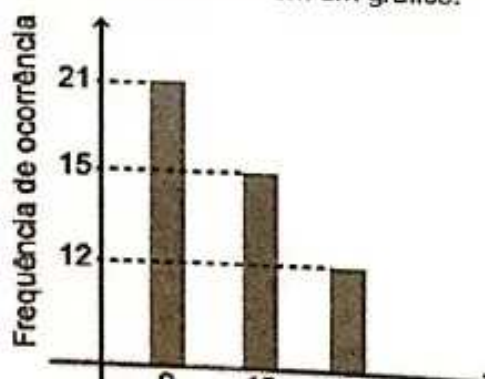
a) 0,53 e 0,50.
b) 0,50 e 0,53.
c) 0,50 e 0,49.
d) 0,49 e 0,50.
e) 0,49 e 0,53.

29) **(FUVEST)** Cada uma das cinco listas dadas é a relação de notas obtidas por seis alunos de uma turma em certa prova. Assinale a única lista na qual a média das notas é maior do que a mediana.

a) 5, 5, 7, 8, 9, 10
b) 4, 5, 6, 7, 8, 8
c) 4, 5, 6, 7, 8, 9
d) 5, 5, 5, 7, 7, 9
e) 5, 5, 10, 10, 10, 10

30) **(UERJ)** Após serem medidas as alturas dos alunos de uma turma, elaborou-se o seguinte histograma:

Sabe-se que, em um histograma, se uma reta vertical de equação $x = x_0$ divide ao meio a área do polígono formado pelas barras retangulares, o valor de x_0 corresponde à mediana da distribuição dos dados representados.

Calcule a mediana das alturas dos alunos representadas no histograma.

31) **(ENEM)** Uma pessoa, ao fazer uma pesquisa com alguns alunos de um curso, coletou as idades dos entrevistados e organizou esses dados em um gráfico.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	1

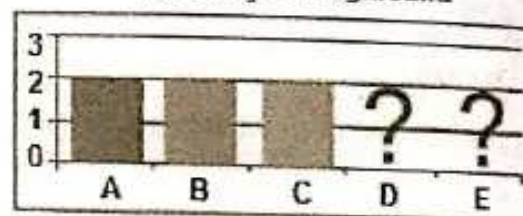
Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

33) As idades, em ano, de 9 pessoas de um grupo são: 5; 14; 7; k + 7; 8; k; 2k – 5; k + 7 e 5.

Sabendo que a média aritmética dessas idades é igual a k, determine a moda e a mediana dessa amostra.

34) **(ENEM)** Cinco equipes A, B, C, D e E disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0,1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos.

As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir, entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe D e da equipe E.

Mesmo sem aparecer as notas das equipes D e E, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente

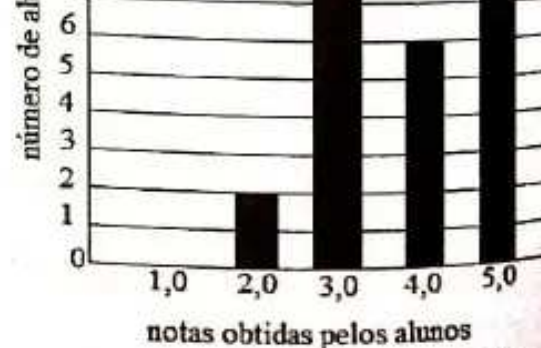
a) 1,5 e 2,0.
b) 2,0 e 1,5.
c) 2,0 e 2,0.
d) 2,0 e 3,0.
e) 3,0 e 2,0.

35) **(IBMEC)** O professor Joelson aplicou uma prova de Matemática a 25 alunos, contendo 5 questões, valendo 1 ponto cada uma. Após fazer a correção, o professor construiu o gráfico abaixo, que relaciona o número de alunos às notas obtidas por eles.

9 12 18 Idade (ano)

Qual a moda das idades, em anos, dos entrevistados?

a) 9
b) 12
c) 13
d) 15
e) 21

32) **(ENEM)** Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Observando o gráfico, conclui-se que a moda e a mediana das notas obtidas pelos 25 alunos correspondem, respectivamente, a:

a) 2,0 e 3,0
b) 2,0 e 4,0
c) 2,0 e 5,0
d) 3,0 e 4,0
e) 3,0 e 5,0

36) **(ENEM)** Depois de jogar um dado em forma de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências.

Número obtido	Frequência
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

A média, mediana e moda dessa distribuição de frequências são, respectivamente

a) 3, 2 e 1.
b) 3, 3 e 1.
c) 3, 4 e 2.
d) 5, 4 e 2.
e) 6, 2 e 4.

37) **(ENEM)** O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

a) $X = Y < Z$.
b) $Z < X = Y$.
c) $Y < Z < X$.
d) $Z < X < Y$.
e) $Z < Y < X$.

38) **(ENEM)** Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.

a) branca e os de número 38.
b) branca e os de número 37.
c) branca e os de número 36.
d) preta e os de número 38.
e) preta e os de número 37.

39) **(ENEM)** Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.
c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
d) Paulo, pois obteve maior mediana.
e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

40) **(ENEM)** O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas

a) I e III.

A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor

b) I e IV.
c) II e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

41) **(ENEM)** Em uma escola, cinco atletas disputam a medalha de ouro em uma competição de salto em distância. Segundo o regulamento dessa competição, a medalha de ouro será dada ao atleta mais regular em uma série de três saltos. Os resultados e as informações dos saltos desses cinco atletas estão no quadro.

Atleta	1º salto	2º salto	3º salto	Média	Mediana	Desvio padrão
I	2,9	3,4	3,1	3,1	3,1	0,25
II	3,3	2,8	3,6	3,2	3,3	0,40
III	3,6	3,3	3,3	3,4	3,3	0,17
IV	2,3	3,3	3,4	3,0	3,3	0,60
V	3,7	3,5	2,2	3,1	3,5	0,81

A medalha de ouro foi conquistada pelo atleta número

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

42) **(ENEM)** Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapa, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas.

Equipes	Média	Moda	Desvio-padrão
Equipes I	45	40	5
Equipes II	45	41	4
Equipes III	45	44	1
Equipes IV	45	44	3
Equipes V	45	47	2

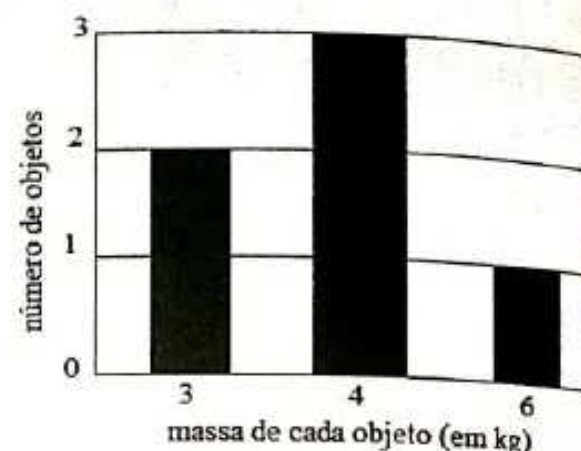
Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

43) **(ENEM)** Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra de talhões de sua propriedade. Os talhões têm a mesma área de 30000m² e o valor obtido para desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare. A variância das produções dos talhões expressas em (sacas/hectare)² é

a) 20,25.
b) 4,50.
c) 0,71.
d) 0,50.
e) 0,25.

44) **(ENEM)** Um produtor de café contratou uma empresa de consultoria para avaliar as produções de suas diversas fazendas. No relatório entregue consta que a variância das produtividades das fazendas foi igual a 9216 kg²/ha². Esse produtor precisa apresentar essa informação, mas em ou-

45) **(FGV)** O gráfico a seguir indica a massa de um grupo de objetos.

Acrescente-se à amostra n objetos, com massa 4 kg cada, a média não se altera, mas o desvio padrão se reduz à metade do que era. Assim, é correto afirmar que n é igual a:

a) 18
b) 15
c) 12
d) 9
e) 8

Gabarito

1) d
2) e
3) 162°
4) c
5) c
6) a
7) d
8) e
9) b
10) d
11) 77,5 km/h
12) b
13) b

27) d
28) b
29) d
30) $\frac{16}{9}$
31) a
32) d
33) Moda = 19 e Mediana = 12
34) c
35) d
36) b
37) e
38) a
39) b

tra unidade de produtividade: sacas/ha. Ele sabe que a saca de café tem 60 kg, mas tem dúvidas em determinar o valor da variância em sacas²/ha².

A variância das produtividades das fazendas de café expressa em sacas²/ha² é

a) 153,60.
b) 12,39.
c) 6,55.
d) 2,56.
e) 1,60.

14) b
15) d
16) b
17) c
18) b
19) b
20) d
21) d
22) d
23) d
24) b
25) b
26) d

40) c
41) c
42) c
43) e
44) d
45) a

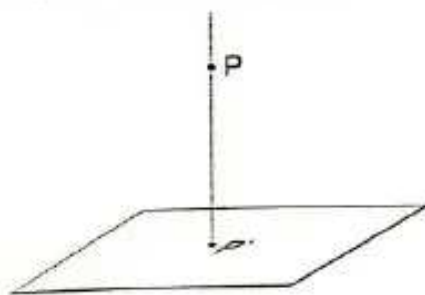
Apêndice I

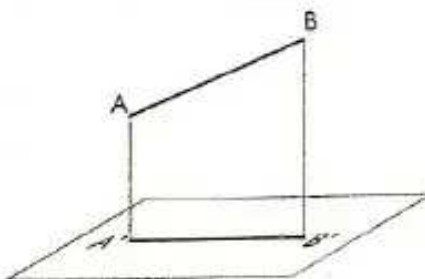
Projeções e transformações geométricas

Projeção ortogonal

é uma figura determinada em um plano por pontos, segmentos, retas, figuras geométricas que não pertencem a esse plano. De uma maneira prática, a projeção ortogonal de um objeto é como se fosse a sombra produzida por ele no chão, quando consideramos o sol do meio-dia, o sol a pino. Nesse momento, a sombra possui dimensões idênticas às do objeto.

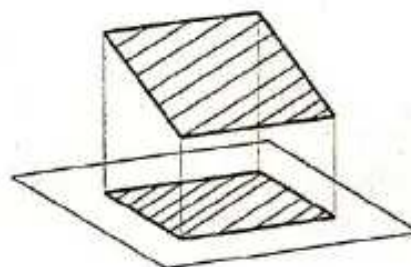
Projeção ortogonal de um ponto

A projeção ortogonal de um ponto P em um plano, é o ponto P', que é o pé da perpendicular baixada de P até o plano.

Projeção ortogonal de um segmento

A projeção ortogonal de um segmento AB em um plano é o segmento A'B', em que A' e B' são, respectivamente, as projeções ortogonais de A e B nesse plano.

Projeção ortogonal de uma reta

A projeção ortogonal em um plano de uma reta que passa pelos pontos A e B, é a reta que, no plano, passa pelos pontos A' e B' que são, respectivamente, as projeções ortogonais de A e B.

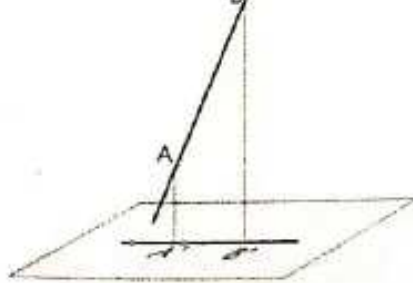
B

DICA:LEMBRE-SE DA SOMBRA!!

Transformações geométricas

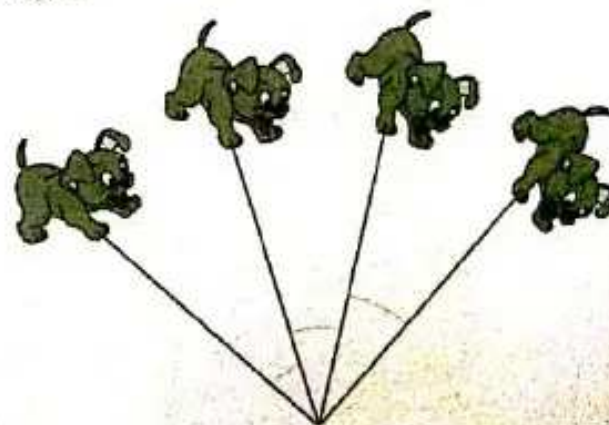
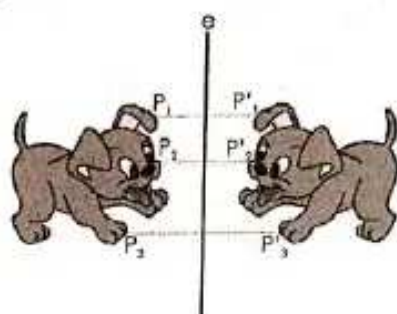
Quando aplicarmos uma transformação geométrica em uma figura plana, obtemos outra figura igual ou semelhante à figura original. Uma transformação pode ser ISOMÉTRICA, quando a figura transformada é idêntica à original, pois ela preserva as distâncias entre os pontos correspondentes nas figuras, bem como a amplitude dos ângulos. A transformação é NÃO ISOMÉTRICA quando a figura transformada é semelhante e não congruente à original.

As principais transformações isométricas, ou isomerias, são: TRANSLAÇÃO, ROTAÇÃO e REFLEXÃO. Já a HOMOTETIA é o exemplo de uma transformação não isométrica ou não isometria.

Translação

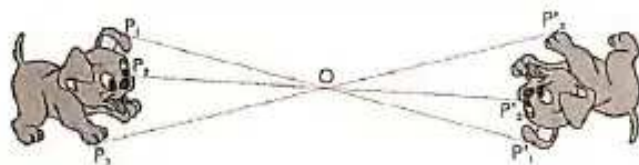
Essa transformação desloca todos os pontos da figura de uma mesma distância, mas mantendo a mesma direção, o mesmo sentido e conservando a amplitude dos ângulos.

Projeção ortogonal de uma figura

A projeção ortogonal de uma figura em um plano é formada pelas projeções ortogonais de todos os pontos que compõem a figura.

Rotação

Nessa transformação todos os pontos da figura descrevem arcos concêntricos de mesma amplitude e sentido.

Reflexão

A REFLEXÃO ou SIMETRIA AXIAL, é uma transformação feita em relação a uma reta **e**, chamada de EIXO DE SIMETRIA. Nela, cada ponto P, da figura original, é transformado em um ponto P', de modo que P e P' sejam equidistantes do eixo e e o segmento PP' seja perpendicular a esse mesmo eixo.

Simetria central

A simetria central é mais um caso de isomeria. Para formarmos a simetria central de uma figura, em primeiro lugar, devemos estabelecer um ponto fixo **O**, chamado de CENTRO DE SIMETRIA, em relação ao qual a simetria será realizada. Nesse caso, a distância de um ponto P qualquer, da figura original, até o ponto O será igual à distância de O até P', ponto a ele associado na figura transformada. É importante ressaltar que os pontos P, O e P' deverão sempre ser colineares.

Homotetia

Tal como vimos na simetria central, na homotetia devemos estabelecer um ponto **O**, chamado de CENTRO DE HOMOTETIA e considerar um número real positivo **k**, chamado de RAZÃO DE HOMOTETIA. Dado o ponto P de uma figura, o ponto P', homólogo a ele na figura transformada, é tal que $OP' = k \cdot OP$, lembrando que P, O e P' devem sempre ser colineares. Na homotetia, a figura original e a figura transformada são semelhantes, têm razão de semelhança igual a k e suas áreas estão na razão k^2. Note que quando $k > 1$ a homotetia é uma **AMPLIAÇÃO** e quando $0 < k < 1$ a homotetia é uma **REDUÇÃO**.

Exercícios

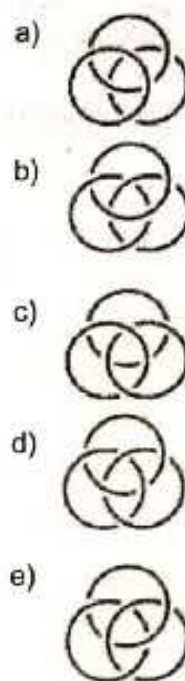
1) **(ENEM)** Em Florença, Itália, na Igreja de Santa Croce, é possível encontrar um portão em que aparecem os anéis

a)

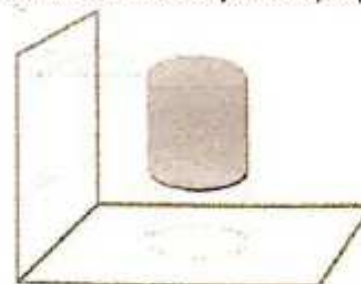
b)

c)

d)

e)

2) Um hospital adquiriu uma van e vai adaptá-la para transportar seus pacientes. Assim, por medida de segurança, deseja pintar em sua dianteira uma inscrição de modo que o motorista que estiver imediatamente à sua frente, no trânsito, leia, pelo retrovisor a palavra AMBULÂNCIA. Assinale a opção que indica a inscrição que deve ser pintada na dianteira da van.

a) AICNÂLUBMA
b) ⱯWBՈꞀⱯИCIⱯ
c) AIƆИÂ⅃UᙠMA
d) AMᙠU⅃ÂИƆIA

3) Na figura a seguir temos as projeções ortogonais de um cilindro circular reto em dois planos perpendiculares.

A projeção no plano vertical é um retângulo de base 8 cm e altura 10 cm. A área limitada, em cm², pela projeção no plano horizontal equivale a

(Considere, se necessário, a aproximação $\pi = 3$.)

a) 24.
b) 48.
c) 72.

de Borromeo. Alguns historiadores acreditavam que os círculos representavam as três artes: escultura, pintura e arquitetura, pois elas eram tão próximas quanto inseparáveis.

Scientific American, ago. 2008.

Qual dos esboços a seguir melhor representa os anéis de Borromeo?

d) 144.
e) 192.

4) **(ENEM)**

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de

a) 45°.
b) 60°.
c) 90°.
d) 120°.
e) 180°.

5) **(ENEM)** As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.

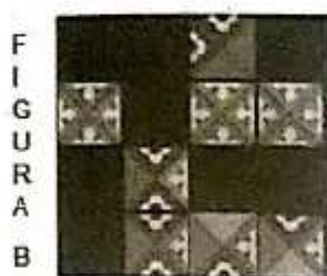



FIGURA A

FIGURA B

Peça 1 Peça 2

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocada a peça:

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário.
b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.
c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.
d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.
e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

6) **(ENEM)** Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

c)

d)

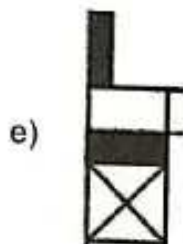
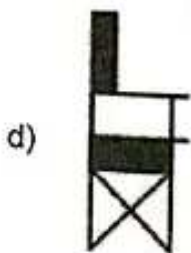
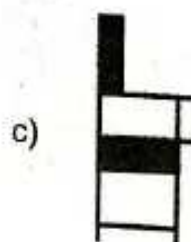
e)

7) **(ENEM)** Um grupo de escoteiros mirins, numa atividade no parque da cidade onde moram, montou uma barraca conforme a foto da Figura 1. A Figura 2 mostra o esquema da estrutura dessa barraca, em forma de um prisma reto, em que foram usadas hastes metálicas.

Figura 1

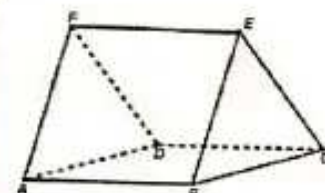
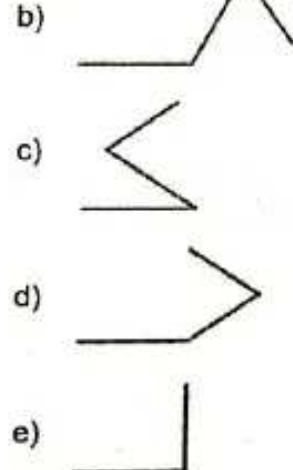
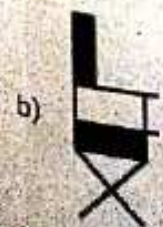
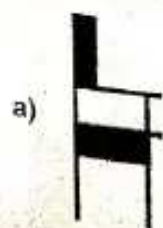
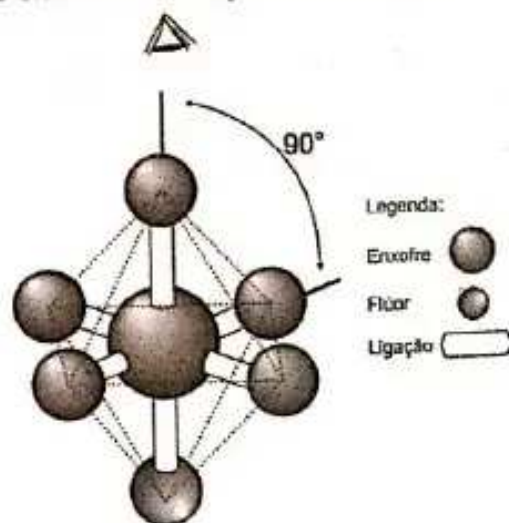
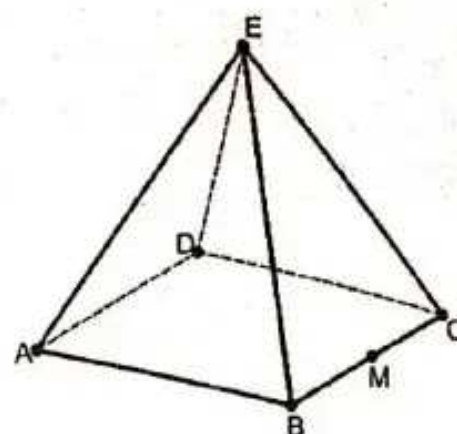
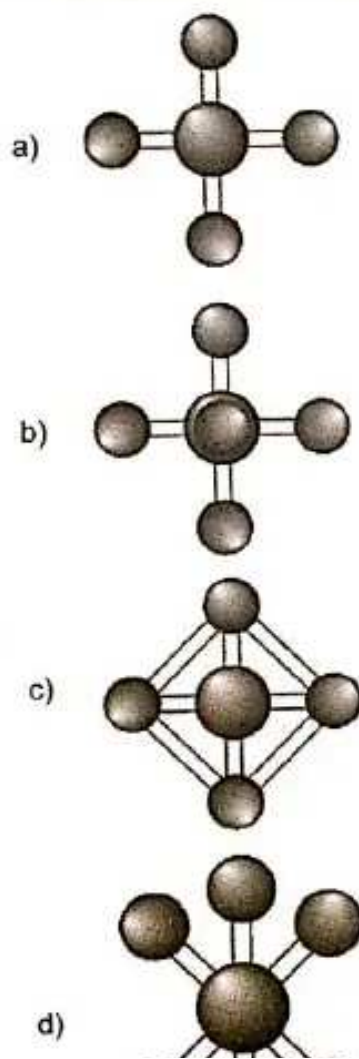



Figura 2

Após a armação das hastes, um dos escoteiros observou um inseto deslocar-se sobre elas, partindo do vértice A em direção ao vértice B, deste em direção ao vértice E e, finalmente, fez o trajeto do vértice E ao C. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os pontos.

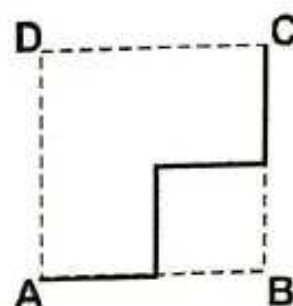
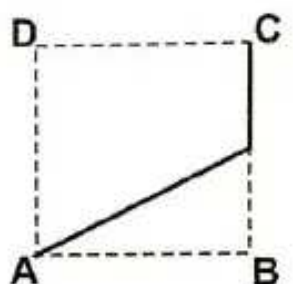
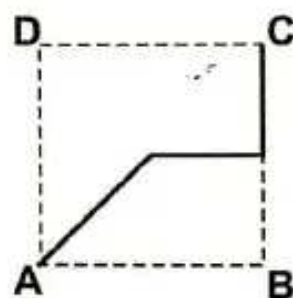
A projeção do deslocamento do inseto no plano que contém a base ABCD é dada por

a)

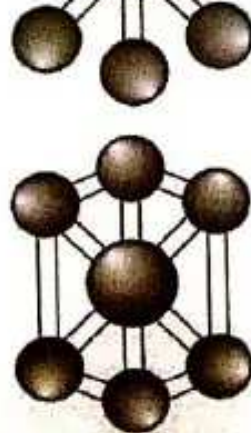
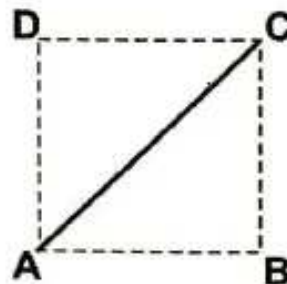
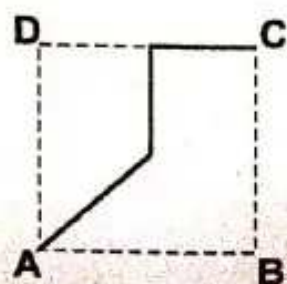
8) **(ENEM)** A figura é uma representação tridimensional da molécula do hexafluoreto de enxofre, que tem a forma bipiramidal quadrada, na qual o átomo central de enxofre está cercado por seis átomos de flúor, situados nos seis vértices de um octaedro. O ângulo entre qualquer par de ligações enxofre-flúor adjacentes mede 90°.

A vista superior da molécula, como representada na figura é:

O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

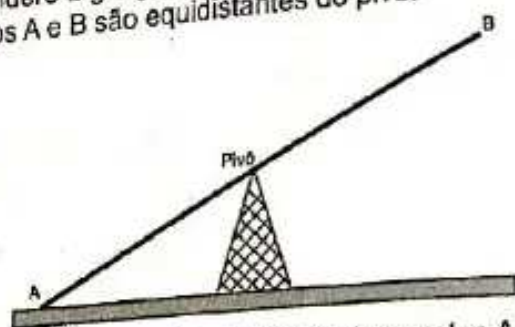
O desenho que Bruno deve fazer é

a)

D C

A B

b)

c)

d)

e)

9) **(ENEM)** João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

10) **(ENEM)** Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua, longa e estreita, equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô.

A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é

a)

A B

b)

A B

c)

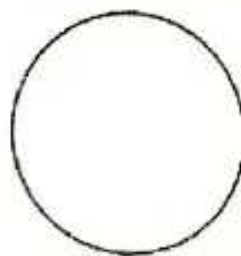
d)

A B

e)

Na figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representado por

a)

b)

c)

d)

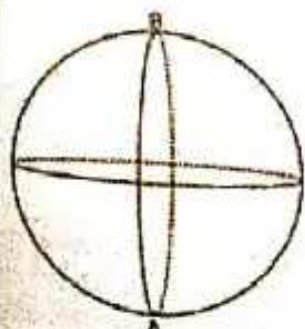
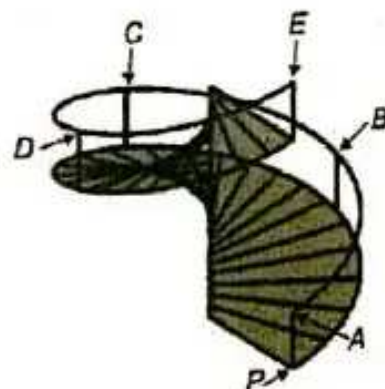
e)

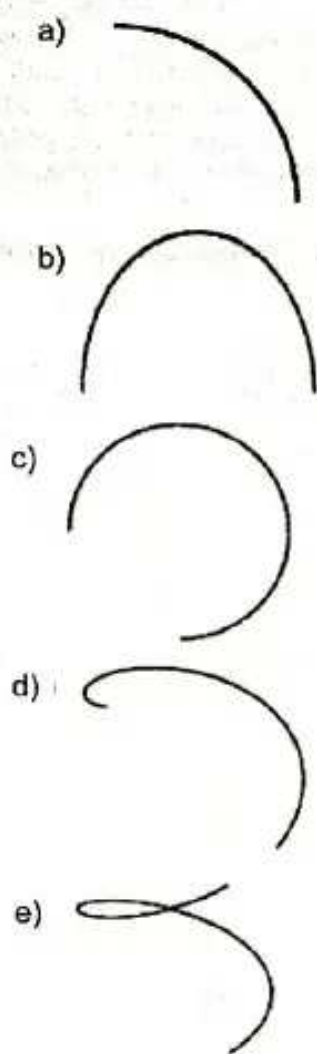
12) **(ENEM)** O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cincos pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.

11) **(ENEM)** O globo ...

(ENEM) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2 uma esfera que ilustra um globo da morte.

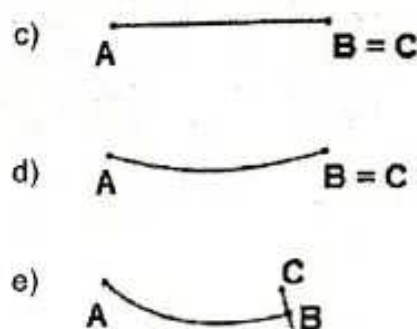
Figura 1 Figura 2

A até o ponto D.

A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

a) b) c) d) e)

13) **(ENEM)** A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.

c)

d)

e)

14) **(ENEM)** Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas bandeirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a Figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados BC e AD, de modo que C e D coincidam, e o mesmo ocorra com A e B, conforme ilustrado na Figura 2. Marcaram os pontos médios O e N, dos lados FG e AF, respectivamente, e o ponto M do lado AD, de modo que AM seja igual a um quarto de AD. A seguir, fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

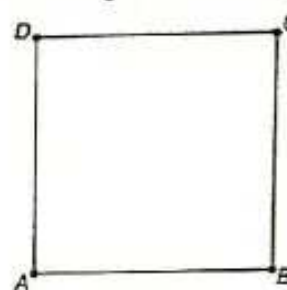
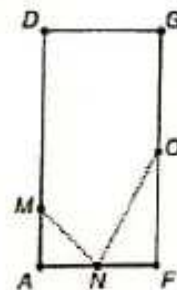
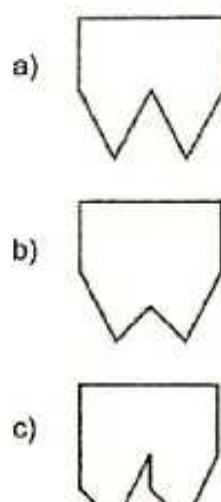



Figura 1 Figura 2

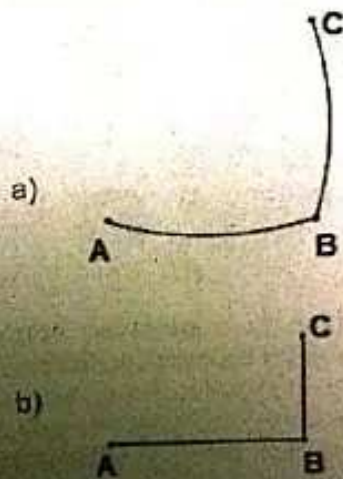
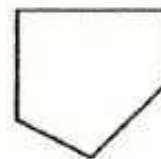
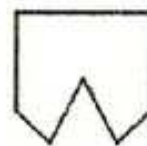
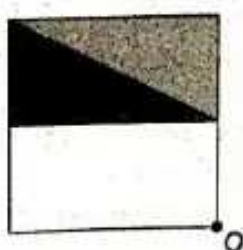
Após os cortes, a folha é aberta e a bandeirinha está pronta. A figura que representa a forma da bandeirinha pronta é

a)

b)

c)

A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

a)

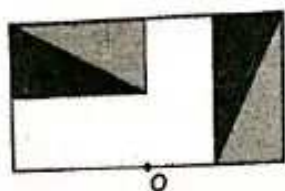
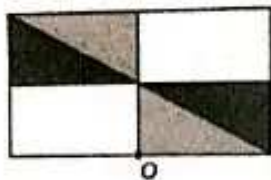
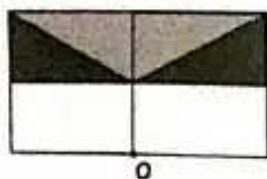
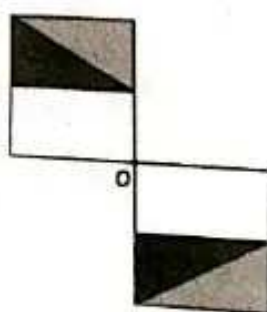
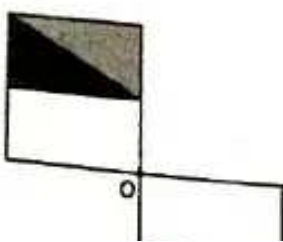
b)

d)

e)

15) **(ENEM)** Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

A imagem que representa a nova figura é:

a)

b)

c)

d)

e)

Anotações

Gabarito

1) e
2) c
3) b
4) d
5) c
6) c
7) e
8) b
9) c
10) b
11) e
12) c
13) e
14) e
15) e

Apêndice II

Análise e interpretação de gráficos e tabelas

Nesse apêndice vamos fazer uma viagem pelo interessante mundo dos gráficos e tabelas. O nosso objetivo é dar algumas noções e dicas importantes para que você entenda melhor esse assunto, responsável por diversas questões para os exames do ENEM e também para os demais vestibulares do Brasil.

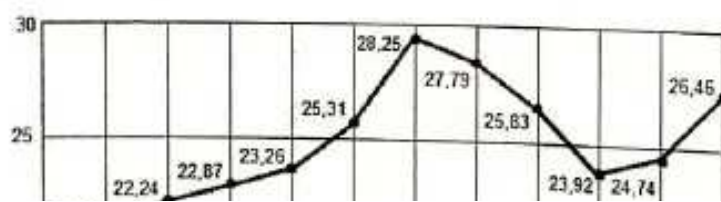
Presente em vários itens cobrados nas provas de Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas, a representação gráfica é uma ferramenta eficiente no tratamento de informações quantitativas (NUMÉRICAS), nos ajudando a entender melhor as relações entre grandezas relevantes dessas áreas do conhecimento. Um gráfico nos ajuda a visualizar as informações de maneira mais objetiva, mais direta.

Vamos agora analisar os dois tipos de gráficos mais utilizados na representação de situações que envolvem dados numéricos.

Em primeiro lugar temos o GRÁFICO CARTESIANO, desenvolvido a partir da criação do sistema de eixos coordenados pelo matemático René Descartes, em 1637. Nesse caso, as informações quantitativas são dispostas em dois eixos perpendiculares: um eixo horizontal, chamado de eixo das abscissas ou eixo (x) e outro eixo vertical, que é o eixo das ordenadas ou eixo (y), como abordado no capítulo de funções. Há diversos tipos de gráficos cartesianos, dependendo da relação existente entre as grandezas representadas nos eixos x e y. Porém, aquele que é utilizado com maior frequência é o gráfico linear, em que os pontos obtidos através da correspondência entre os elementos de cada eixo são ligados por segmentos de reta.

Como exemplo, vamos reproduzir, em seguida, uma questão de um exame anterior do ENEM.

"O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico a seguir mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:

RESOLUÇÃO: Observe que esse gráfico é formado por pontos unidos por segmentos de reta. Logo, é um gráfico linear, como comentamos anteriormente em nossa exposição teórica. A primeira dica para a interpretação de um gráfico cartesiano é identificar as grandezas que são representadas em cada eixo. Nesse exercício, podemos verificar que no eixo horizontal estão os anos em que os dados foram coletados, enquanto que no eixo vertical temos os percentuais que o agronegócio representa no PIB brasileiro. Observamos que o primeiro ano da pesquisa foi 1998 e que, nesse ano, o agronegócio respondeu a 21,33% do PIB do Brasil. No ano seguinte, em 1999, o percentual passou a ser 22,24%. Os percentuais foram aumentando até o ano de 2003, quando alcançou a margem de 28,28%. A partir daí, até o ano de 2006, houve decréscimos sucessivos. Em 2007 e 2008 os percentuais voltaram a crescer.

Portanto o período de queda nos percentuais ocorreu entre os anos de 2003 e 2006.

E a resposta correta é a letra **C**.

E então?

Acompanhou a análise que fizemos?

Percebeu quantos dados importantes aparecem explicitamente nos gráficos?

Basta prestar atenção nos detalhes!

Em segundo lugar temos os GRÁFICOS DE BARRAS, que são construídos utilizando-se barras retangulares horizontais ou verticais. No caso de utilizarmos barras verticais, temos o chamado GRÁFICO DE COLUNAS, que é o mais comum em exercícios de exames vestibulares. Em um GRÁFICO DE COLUNAS, no eixo horizontal são representadas as variáveis que serão avaliadas na pesquisa. Essas variáveis podem ser QUALITATIVAS (não numéricas), por exemplo: meses do ano, tipos de combustíveis, países, meios de transporte, entre outras; ou QUANTITATIVAS (numéricas, como já nos referimos anteriormente), por exemplo: ano, número de filhos, velocidade, peso, etc. O eixo horizontal pode ser visível ou não no gráfico. Mas cuidado, pois no caso de uma variável quantitativa a disposição deve ser feita em ordem crescente de valores, o que já não ocorre com a organização de uma variável qualitativa nesse eixo, que pode ser feita em qualquer ordem.

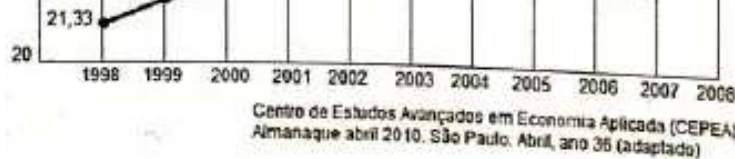
Todas as barras devem ter a mesma largura e guardarem entre si a mesma distância. A altura de cada barra varia de acordo com a frequência ou intensidade das variáveis. No caso da utilização de barras horizontais, as variáveis aparecem no eixo vertical e os comprimentos das barras representarão suas intensidades, indicadas no eixo horizontal.

A utilização de barras horizontais ou verticais tem o mesmo efeito haja vista que a diferença é apenas estética,

21,33

20

1998 1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008

Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). Almanaque abril 2010. São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado)

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

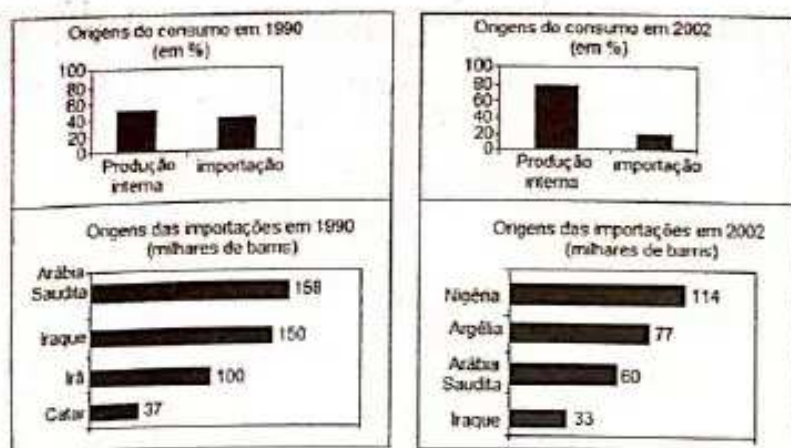
Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

a) 1998 e 2001.
b) 2001 e 2003.
c) 2003 e 2006.
d) 2003 e 2007.
e) 2003 e 2008."

visando aproveitar melhor o espaço disponível para a exibição do gráfico.

Como ressaltamos no início dessa exposição, a representação gráfica tem papel importante em diversas áreas do conhecimento humano.

Vamos agora analisar uma questão de um exame anterior do ENEM, da área de Ciências Humanas, mais precisamente de Geografia.

"Os dados abaixo referem-se à origem do petróleo consumido no Brasil em dois diferentes anos.

Analisando os dados, pode-se perceber que o Brasil adotou determinadas estratégias energéticas, dentre as quais podemos citar

a) a diminuição das importações dos países muçulmanos e redução do consumo interno.
b) a redução da produção nacional e diminuição do consumo do petróleo produzido no Oriente Médio.
c) a redução da produção nacional e o aumento das compras de petróleo dos países árabes e africanos.
d) o aumento da produção nacional e redução do consumo de petróleo vindo dos países do Oriente Médio.
e) o aumento da dependência externa de petróleo vindo de países mais próximos do Brasil e redução do consumo interno."

RESOLUÇÃO: Bem, nesse exemplo temos gráficos de barras horizontais e verticais. Podemos notar que nos gráficos de colunas mostrados nessa questão, ou seja, de barras verticais, como havíamos comentado, as variáveis, nesse caso qualitativas (não numéricas) são: PRODUÇÃO INTERNA e IMPORTAÇÃO, que aparecem no eixo horizontal. No eixo vertical temos as respectivas frequências dadas pelos percentuais que essas variáveis representam do consumo total de petróleo no Brasil, em duas épocas: 1990 e 2002. Do primeiro ano mostrado (1990) para o segundo (2002) observamos que há um aumento percentual na produção interna, que representava menos de 60% e passou a ser mais de 80% do consumo total. No mesmo período, o petróleo importado teve uma redução na representatividade no consumo total, passando de 50% para aproximadamente 20%.

Analisando os gráficos de barras horizontais, podemos observar que em 1990 os países que mais exportavam petróleo para o Brasil situavam-se no Oriente Médio (Arábia Saudita, Iraque, Irã e Catar). Este quadro mudou em 2002, pois as maiores exportações de petróleo passaram a vir de

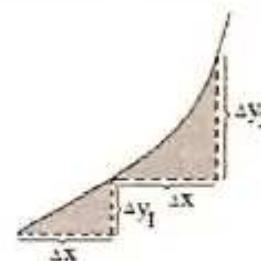
uma pessoa resolva fazer, um exercício físico...uma corrida! No início, por estar descansado, ele vai aumentando o número de passadas a cada segundo; após algum tempo, ele mantém a quantidade de passadas por segundo e, finalmente, bate o cansaço, e o número de passadas, a cada segundo, vai diminuindo gradativamente.

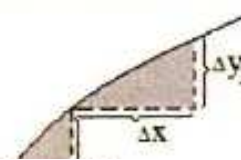
Fazendo-se uma análise na variação da distância percorrida por unidade de tempo durante esse percurso, verificamos que no primeiro trecho o número de passadas aumentava a cada segundo, logo a taxa de variação da distância percorrida era crescente, aumentava em função do tempo (movimento acelerado); no segundo trecho, o número de passadas se manteve inalterado a cada segundo, logo a taxa de variação foi constante (movimento uniforme); já no último trecho o número de passadas a cada segundo diminuiu, logo a taxa de variação do espaço percorrido em relação ao tempo diminuiu também, foi decrescente (movimento retardado).

Entendido?

Podemos verificar a taxa de variação entre duas grandezas em qualquer gráfico cartesiano. Para isso, devemos avaliar a variação no eixo vertical (vamos chamá-la de Δy) ocasionada por variações de mesmo módulo ou tamanho no eixo horizontal (chamada de Δx):

- se os valores de Δy aumentarem, para um mesmo Δx, a taxa de variação é **crescente**
- se os valores de Δy diminuírem, para um mesmo Δx, a taxa de variação é **decrescente**
- se os valores de Δy forem os mesmos, para um mesmo Δx, a taxa de variação é **constante**

Observe os gráficos a seguir, nos quais omitimos os eixos coordenadas para facilitar a observação.

No primeiro caso, para uma mesma variação no eixo horizontal (Δx), as variações verticais (Δy) foram diferentes. Como $\Delta y_2 > \Delta y_1$ a taxa da variação foi **crescente**.

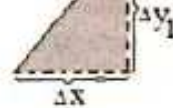
Observe agora o segundo gráfico:

países africanos (Nigéria e Argélia).

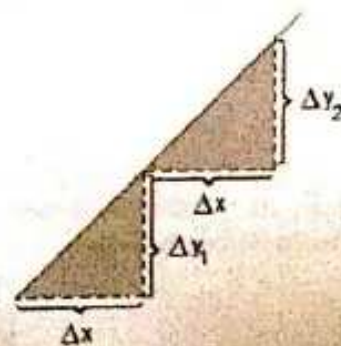
Concluímos, então, que no período retratado nos gráficos, houve um aumento da produção nacional e uma redução no consumo de petróleo proveniente dos países do Oriente Médio.

Logo a opção correta é a letra **D**.

Há ainda outro tipo de gráfico bastante utilizado, o GRÁFICO DE SETORES, também conhecido como GRÁFICO DE PIZZA. Mas sua construção e aplicação foram estudadas no Capítulo 22 de Matemática III, que tratou das noções de Estatística.

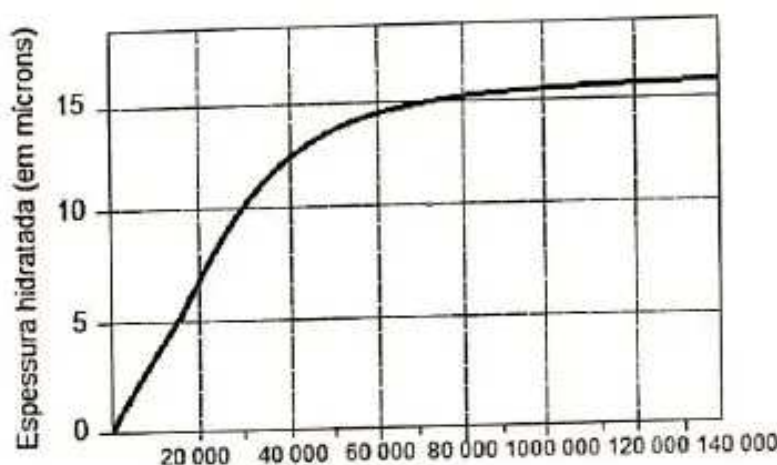
Aproveite para fazer uma revisão desse assunto!

Para terminar, gostaria de abordar um assunto muito interessante que representa uma das habilidades a serem verificadas nos exames do ENEM. Estou falando da TAXA DE VARIAÇÃO, que avalia o quanto rápido uma grandeza varia em relação à outra. Vamos ilustrar esse conceito com uma situação presente em nosso cotidiano. Consideremos que

Nesse caso, notamos que para um mesmo Δx, temos $\Delta y_2 < \Delta y_1$, ou seja, a taxa de variação **decrescente**.

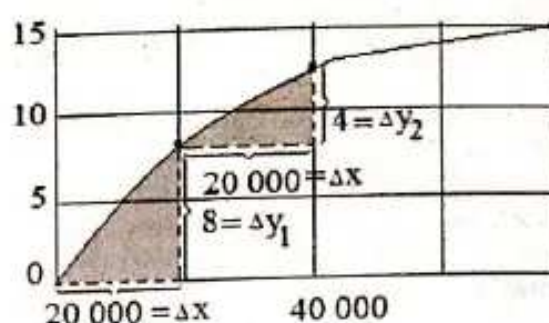
E, finalmente, temos o terceiro gráfico.

Nele, verificamos que $\Delta y_1 = \Delta y_2$, devido à congruência dos triângulos assinalados. Logo, a taxa de variação nesse caso é constante.

Uma dica muito importante é que **o gráfico que relaciona duas grandezas diretamente proporcionais é sempre uma reta que passa pela origem.**

Vamos, para encerrar nossa explanação, trazer mais uma questão do ENEM para você.

"A obsidiana é uma pedra de origem vulcânica que, em contato com a umidade do ar, fixa água em sua superfície formando uma camada hidratada. A espessura da camada hidratada aumenta de acordo com o tempo de permanência no ar, propriedade que pode ser utilizada para medir sua idade. O gráfico abaixo mostra como varia a espessura da camada hidratada, em mícrons (1 mícron = 1 milésimo de milímetro) em função da idade da obsidiana.

Com base no gráfico, pode-se concluir que a espessura da camada hidratada de uma obsidiana

a) é diretamente proporcional à sua idade.
b) dobra a cada 10 000 anos.
c) aumenta mais rapidamente quando a pedra é mais jovem.
d) aumenta mais rapidamente quando a pedra é mais velha.
e) a partir de 100 000 anos não aumenta mais."

RESOLUÇÃO: Se fizermos uma análise de cada opção, podemos logo descartar a opção **A**, pois vimos que se essas grandezas forem diretamente proporcionais, o gráfico seria uma reta, fato que não ocorreu nesse caso. A opção **B** também é incorreta, pois se ela dobra a cada 10.000 anos, ao fim de 20.000 anos deveria dobrar duas vezes, ou seja, quadruplicar. Se você olhar o gráfico dado pode verificar que a espessura

Note que a variação de espessura da camada diminui à medida que a idade aumenta, pois $\Delta y_1 \cong 8$ e $\Delta y_2 \cong 4$, logo a taxa de variação é decrescente, portanto o aumento é maior para a pedra mais jovem.

Opção **C**

Exercícios

1) **(UERJ)** Campanha do governo de Dubai contra a obesidade oferece prêmio em ouro por quilogramas perdidos

A campanha funciona premiando os participantes de acordo com a seguinte tabela:

Massa perdida (kg)	Ouro recebido (g/kg perdido)
até 5	1
6 a 10	2
mais de 10	3

Assim, se uma pessoa perder 4 kg, receberá 4 g de ouro; se perder 7 kg, receberá 14 g; se perder 15 kg, receberá 45 g.

Adaptado de g1.globo.com, 18/08/2013.

Considere um participante da campanha que receba 16 g de ouro pelo número inteiro de quilogramas perdidos.

Sabendo que a massa dessa pessoa, ao receber o prêmio, é de 93,0 kg, determine o valor inteiro de sua massa, em quilogramas, no início da campanha.

da camada hidratada de uma obsidiana com idade de 20.000 anos é de aproximadamente 8 microns. Com 40.000 anos de idade a espessura de tal camada está em torno de 12 mícrons, que obviamente, não é o quádruplo de 8 mícrons.

A opção **E** também é falsa, pois basta olhar o gráfico e verificar que, após 100.000 anos, ele cresce, embora que discretamente. Ficamos entre as opções **C** e **D**. Para optarmos corretamente, vamos verificar se a taxa de variação é maior para as menores ou maiores idades da pedra. Vamos, no gráfico, considerar dois intervalos de mesmo comprimento no eixo horizontal (Δx).

Por exemplo, de 0 a 20.000 e de 20.000 a 40.000 anos (temos, para ambos, $\Delta x = 20.000$) e em seguida avaliar a variação de espessura da camada (Δy)

2) **(ENEM)** O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010			
Região	**Doadores**	**Número de habitantes**	**Doadores/ habitantes**
Nordeste	820 959	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
Total	3 627 529	190 755 799	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2013 (adaptado).

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são

a) Norte, Centro-Oeste e Sul.
b) Norte, Nordeste e Sudeste.
c) Nordeste, Norte e Sul.
d) Nordeste, Sudeste e Sul.
e) Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

3) **(ENEM)** Um promotor de eventos foi a um supermercado para comprar refrigerantes para uma festa de aniversário. Ele verificou que os refrigerantes estavam em garrafas de diferentes tamanhos e preços. A quantidade de refrigerante e o preço de cada garrafa, de um mesmo refrigerante, estão na tabela.

Garrafa	Quantidade de refrigerante (litro)	Preço (R$)
Tipo I	0,5	0,68
Tipo II	1,0	0,88
Tipo III	1,5	1,08
Tipo IV	2,0	1,68
Tipo V	3,0	2,58

Para economizar o máximo possível, o promotor de eventos deverá comprar garrafas que tenham o menor preço por litro de refrigerante.

O promotor de eventos deve comprar garrafas de tipo

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

4) **(ENEM)** De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente,

- 25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.
- 33% são utilizados em descarga de banheiro.

Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água,

a) 30,0.
b) 69,6.
c) 100,4.
d) 130,4.
e) 170,0.

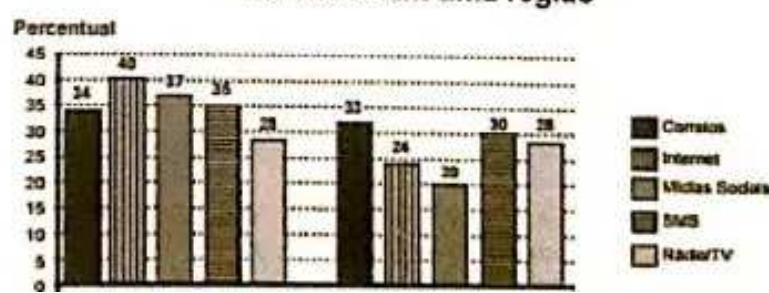
5) **(ENEM)** A tabela apresenta parte do resultado de um espermograma (exame que analisa as condições físicas e composição do sêmen humano).

Espermograma						
Características	Padrão	30/11/2009	23/03/2010	09/08/2011	23/08/2011	06/03/2012
Volume (mL)	2,0 a 5,0	2,5	7,5	2,0	4,0	2,0
Tempo de liquefação (min)	Até 60	35	50	60	59	70
pH	7,2 a 7,8	7,5	7,5	8,3	7,6	8,2
Espermatozoides (unidade / mL)	> 20 000 000	9 400 000	27 000 000	12 800 000	24 200 000	10 200 000
Leucócitos (unidade / mL)	Até 1 000	2 800	1 000	1 000	900	1 400
Hemácias (unidade / mL)	Até 1 000	800	1 200	200	800	800

Para analisar o exame, deve-se comparar os resultados obtidos em diferentes datas com o valor padrão de cada característica avaliada. O paciente obteve um resultado dentro dos padrões no exame realizado no dia

a) 30/11/2009.
b) 23/03/2010.
c) 09/08/2011.
d) 23/08/2011.
e) 06/03/2012.

6) **(ENEM)** Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via Internet (cadastrando-se no site da empresa/marca promotora), via Mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via Rádio/TV.

Participação em promoções do tipo sorteio ou concurso em uma região

- 27% são para cozinhar e beber.
- 15% são para demais atividades.

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia.

O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades.

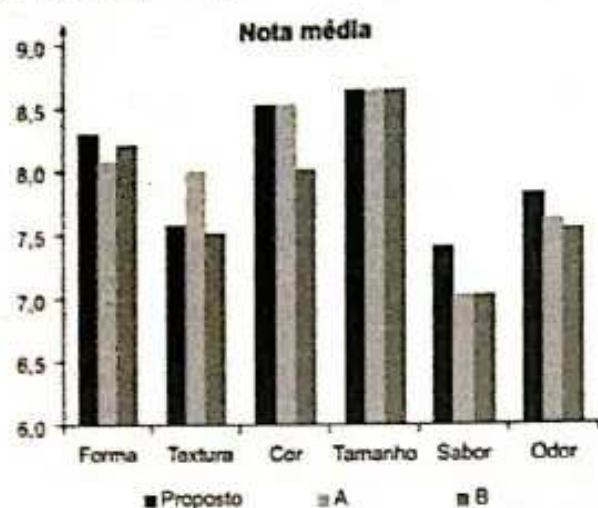
Atividade	Consumo total de água na atividade (em litros)
Tomar banho	24,0
Dar descarga	18,0
Lavar as mãos	3,2
Escovar os dentes	2,4
Beber e cozinhar	22,0

A/B C/D

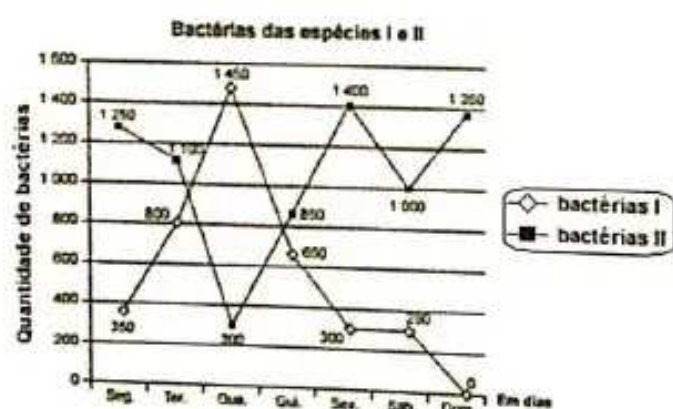
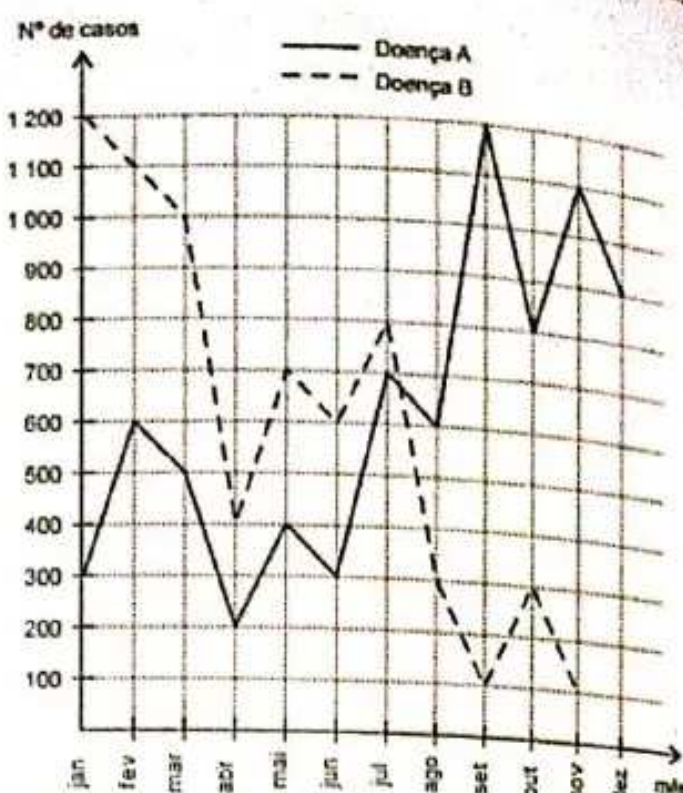
Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D).

De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

a) Correios e SMS.
b) Internet e Correios.
c) Internet e Internet.
d) Internet e Mídias sociais.
e) Rádio/TV e Rádio/TV.

7) **(ENEM)** A diretoria de uma empresa de alimentos resolve apresentar para seus acionistas uma proposta de novo produto. Nessa reunião, foram apresentadas as notas médias dadas por um grupo de consumidores que experimentaram o novo produto e dois produtos similares concorrentes (A e B).

A característica que dá a maior vantagem relativa ao produto proposto e que pode ser usada, pela diretoria, para incentivar a sua produção é a

a) textura.
b) cor.
c) tamanho.
d) sabor.
e) odor.

8) **(ENEM)** Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1.250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias

Disponível em: http://dados.gov.br. Acesso em: 7 dez. 2012 (adaptado)

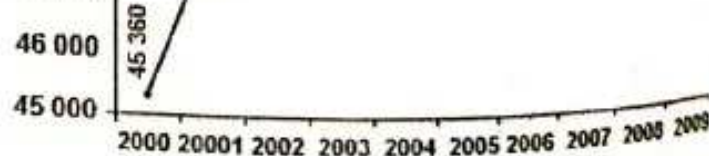
O mês em que se tem a maior diferença entre o número de casos das doenças de tipo A e B é

a) janeiro.
b) abril.
c) julho.
d) setembro.
e) novembro.

10) **(ENEM)** Ano após ano, muitos brasileiros são vítimas de homicídios no Brasil. O gráfico, apresenta a quantidade de homicídios registrados no Brasil, entre os anos 2000 e 2009.

nesse ambiente de cultura foi máxima?

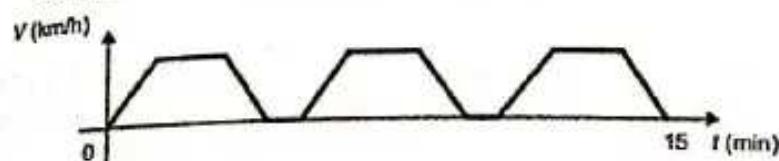
a) Terça-feira
b) Quarta-feira
c) Quinta-feira
d) Sexta-feira
e) Domingo

9) **(ENEM)** Doenças relacionadas ao saneamento ambiental inadequado (DRSAI) podem estar associadas ao abastecimento deficiente de água, tratamento inadequado de esgoto sanitário, contaminação por resíduos sólidos ou condições precárias de moradia. O gráfico apresenta o número de casos de duas DRSAI de uma cidade:

WAISELFISZ, J. J. Mapa d violência 2012: os novos padrões da violência homicida no Brasil. São Paulo: Instituto Sangari, 2011 (adaptado)

Se o maior crescimento anual absoluto observado nessa série se repetisse de 2009 para 2010, então o número de homicídios no Brasil ao final desse período seria igual a

a) 48 839.
b) 52 755.
c) 53 840.
d) 54 017.
e) 54 103.

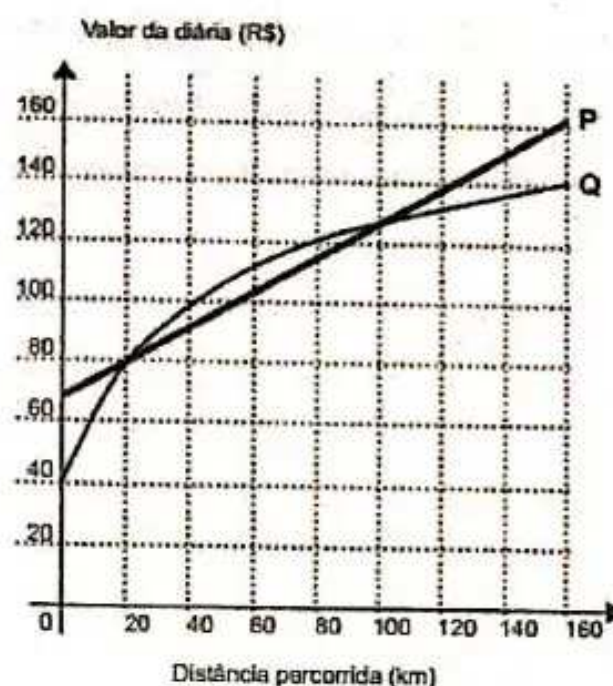
11) **(ENEM)** Um semáforo é composto, geralmente, de três círculos de luzes coloridas (vermelho, amarelo e verde). A cor vermelha indica que o veículo deve estar parado e permanecer assim até que a cor verde volte a acender.

O gráfico apresenta a variação de velocidade de um carro ao longo de um percurso de 15 minutos de duração, da residência de uma pessoa até seu local de trabalho. Durante esse percurso, o carro parou somente nos semáforos existentes ao longo de seu trajeto.

Em quantos semáforos ele parou?

a) 2
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

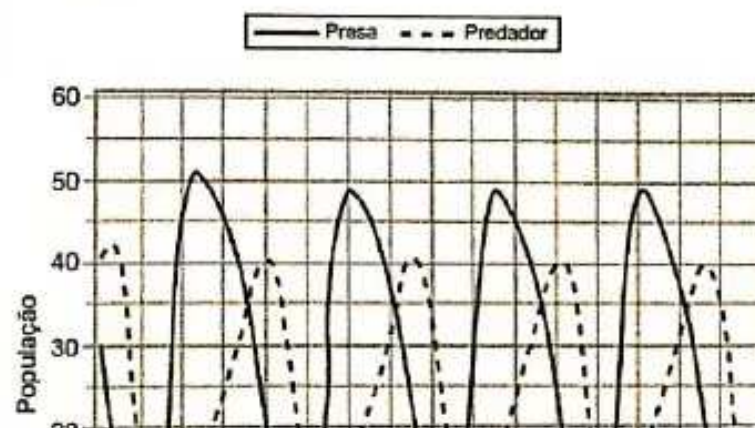
12) **(ENEM)** Uma pesquisa do Instituto de Pesquisa Econômica (Ipea) investigou qual área faz a economia crescer mais e quais os maiores responsáveis pela diminuição da desigualdade na distribuição de renda.

A INFLUÊNCIA DE CADA ÁREA NO CRESCIMENTO E NA IGUALDADE

Revista Nova Escola, ed. 240, mar. 2011 (adaptado).

Disponível em: www.sempretops.com. Acesso em: 7 ago. 2012.

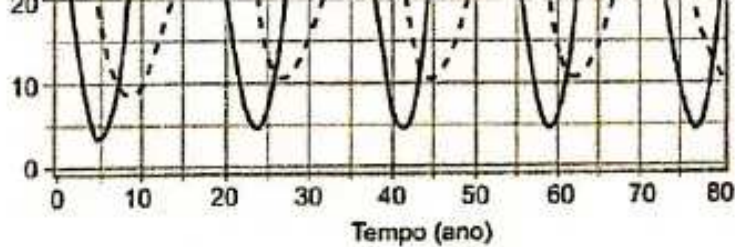
O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

a) De 20 a 100.
b) De 80 a 130.
c) De 100 a 160.
d) De 0 a 20 e de 100 a 160.
e) De 40 a 80 e de 130 a 160.

14) **(ENEM)** O modelo predador-presa foi proposto de forma independente por Alfred J. Lotka, em 1925, e Vito Volterra, em 1926. Esse modelo descreve a interação entre duas espécies, sendo que uma delas dispõe de alimentos para sobreviver (presa) e a outra se alimenta da primeira (predador). Considere que o gráfico representa uma interação predador-presa, relacionando a população do predador com a população da sua presa ao longo dos anos.

Considerando apenas as áreas que contribuem para o crescimento econômico mais do que o investimento em exportação, qual delas é a que mais influencia para a maior igualdade?

a) Bolsa família.
b) Educação.
c) Investimento em construção civil.
d) Previdência Social.
e) Saúde.

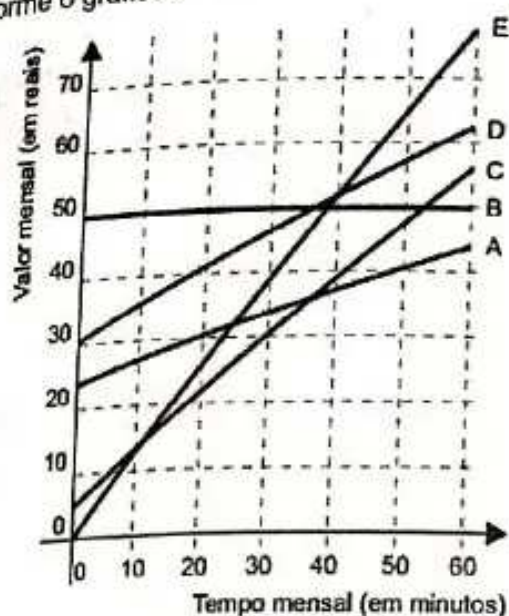
13) **(ENEM)** Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis.

Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.

Disponível em: www.eventosufrpe.com.br. Acesso em: 22 mar. 2012 (adaptado)

De acordo com o gráfico, nos primeiros quarenta anos, quantas vezes a população do predador se igualou à da presa?

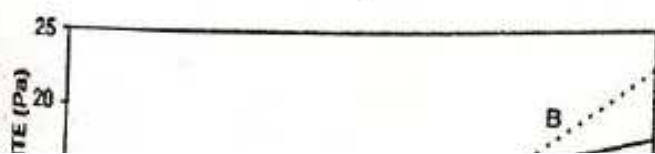
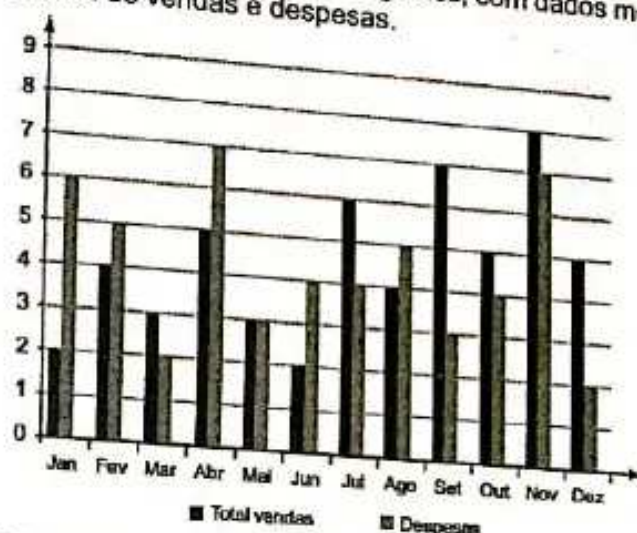
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 9

a) 10.000,00
b) 15.000,00
c) 25.000,00
d) 35.000,00
e) 45.000,00

19) **(ENEM)** No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.

Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

20) **(ENEM)** Tanto na natureza, quanto na indústria, existem diversos tipos de fluidos. Fluidos Newtonianos são aqueles que apresentam crescimento linear da tensão cisalhante com relação ao gradiente de velocidade, com coeficiente angular não nulo. Apresentam ainda tensão cisalhante nula com gradiente de velocidade zero. A figura apresenta a relação da tensão cisalhante com o gradiente de velocidade para diversos tipos de fluidos.

21) **(ENEM)** Uma empresa registrou seu desempenho em determinado ano por meio do gráfico, com dados mensais do total de vendas e despesas.

O lucro mensal é obtido pela subtração entre o total de vendas e despesas, nesta ordem.

Quais os três meses do ano em que foram registrados os maiores lucros?

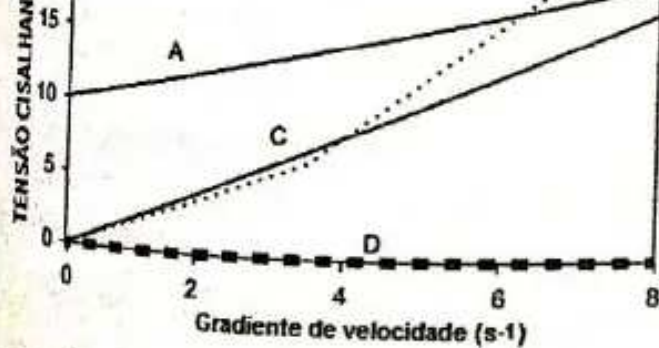
a) Julho, setembro e dezembro.
b) Julho, setembro e novembro.
c) Abril, setembro e novembro.
d) Janeiro, setembro e dezembro.
e) Janeiro, abril e junho.

22) **(ENEM)** Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal. O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

Massa (kg)	Área (m^2)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. **O paciente felino.** São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de

a) 0,624.
b) 52,0.
c) 156,0.
d) 750,0.

Dentre as curvas da figura, determine qual(is) é(são) de fluido(s) Newtonianos(s).

a) A
b) B
c) C
d) D
e) A e C

e) 1 201,9.

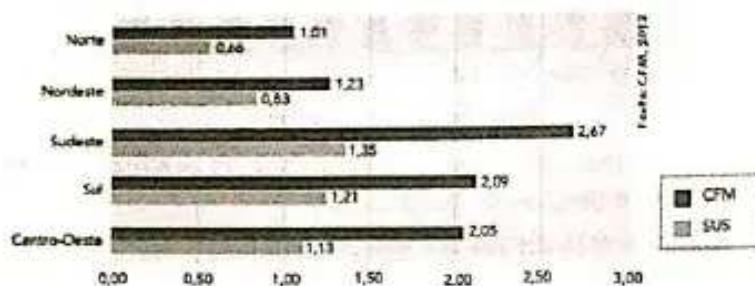
23) **(ENEM)** O censo demográfico é um levantamento estatístico que permite a coleta de várias informações. A tabela apresenta os dados obtidos pelo censo demográfico brasileiro nos anos de 1940 e 2000, referentes à concentração da população total, na capital e no interior, nas cinco grandes regiões.

População residente, na capital e interior segundo as Grandes Regiões 1940/2000

[illegible]	Total		Capital		Interior	
	1940	2000	1940	2000	1940	2000
Norte	1 632 917	12 900 704	368 528	3 895 400	1 264 389	9 005 304
Nordeste	14 434 080	47 741 711	1 270 729	10 162 346	13 163 351	37 579 365
Sudeste	18 278 837	72 412 411	3 346 991	18 822 986	14 931 846	53 589 425
Sul	5 735 305	25 107 616	458 659	3 290 220	5 275 646	21 817 396
Centro-Oeste	1 088 182	11 636 728	152 189	4 291 120	935 993	7 345 608

O valor mais próximo do percentual que descreve o aumento da população nas capitais da Região Nordeste é

a) 125%
b) 231%
c) 331%
d) 700%
e) 800%

24) **(UERJ)** Observe no gráfico o número de médicos ativos registrados no Conselho Federal de Medicina (CFM) e o número de médicos atuantes no Sistema Único de Saúde (SUS), para cada mil habitantes, nas cinco regiões do Brasil.

O SUS oferece 1,0 médico para cada grupo de **x** habitantes. Na região Norte, o valor de **x** é aproximadamente igual a:

a) 660
b) 1000
c) 1334
d) 1515

25) **(ENEM)** O governo de um estado irá priorizar investimentos financeiros, na área de saúde, em uma das cinco cidades apresentadas na tabela.

Cidade	Número total de habitantes	Número total de médicos
M	136 000	340
X	418 000	2 650
Y	210 000	930
Z	530 000	1 983
W	108 000	300
Total	1 402 000	6 203

A cidade a ser contemplada será aquela que apresentar a maior razão entre número de habitantes e quantidade de médicos.

Qual dessas cidades deverá ser contemplada?

a) M

Ano	Crescimento em relação ao ano anterior*
2006	12,0
2007	12,0
2008	14,4
2009	3,7
2010	17,8
	Fonte: Instituo Brasileiro de Planejamento Tributário

*valores aproximados

De acordo com os dados apresentados, infere-se que o valor mais aproximado da arrecadação brasileira do setor público do ano de 2007 foi, em bilhões de reais, de

a) 724
b) 738
c) 784
d) 868
e) 878

27) **(ENEM)** Após encerrar o período de vendas de 2012, uma concessionária fez um levantamento das vendas de carros novos no último semestre desse ano. Os dados estão expressos no gráfico:

Ao fazer a apresentação dos dados aos funcionários, o gerente estipulou como meta para o mês de janeiro de 2013 um volume de vendas 20% superior à média mensal de vendas do semestre anterior.

Para atingir essa meta, a quantidade mínima de carros que deveriam ser vendidos em janeiro de 2013 seria

a) 17.
b) 20.
c) 21.
d) 24.
e) 30.

28) **(ENEM)** Em uma cidade, o valor total da conta de energia

b) X

c) Y

d) Z

e) W

26) **(ENEM)** A legislação brasileira estabelece vários impostos para que o Estado levante os recursos necessários para custear os investimentos e despesas de responsabilidade do setor público. A arrecadação do Brasil, nas três esferas da administração pública (municípios, estados e União), vem aumentando consideravelmente nos últimos anos. No ano de 2005, foram arrecadados cerca de 700 bilhões de reais. A evolução do crescimento da arrecadação até 2010, em porcentagem, está expressa na tabela a seguir.

... Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) x consumo (em kWh) + Cosip

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo.

O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

a) 134,1

b) 135,0

c) 137,1

d) 138,6

e) 143,1

29) **(ENEM)** Em uma pesquisa sobre prática de atividade física, foi perguntado aos entrevistados sobre o hábito de andar de bicicleta ao longo da semana e com que frequência o faziam. Entre eles, 75% afirmaram ter esse hábito, e a frequência semanal com que o faziam é a apresentada no gráfico:

Com que frequência?

Que porcentagem do total de entrevistados representa aqueles que afirmaram andar de bicicleta pelo menos três vezes por semana?

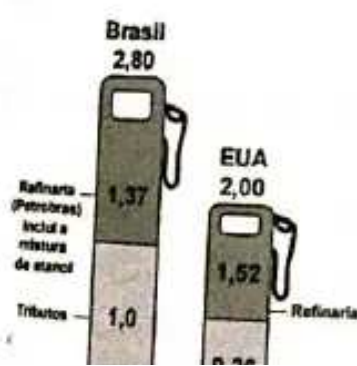
a) 70,0%

b) 52,5%

c) 22,5%

d) 19,5%

e) 5,0%

30) **(ENEM)** A figura mostra os preços da gasolina no Brasil e nos Estados Unidos (EUA), feita a conversão para reais, considerando o preço total de venda ao consumidor (abaixo dos nomes dos países) e os valores das parcelas correspondentes à refinaria, aos tributos e à distribuição e revenda.

O percentual mais aproximado de redução dos valores em tributos, distribuição e revenda seria

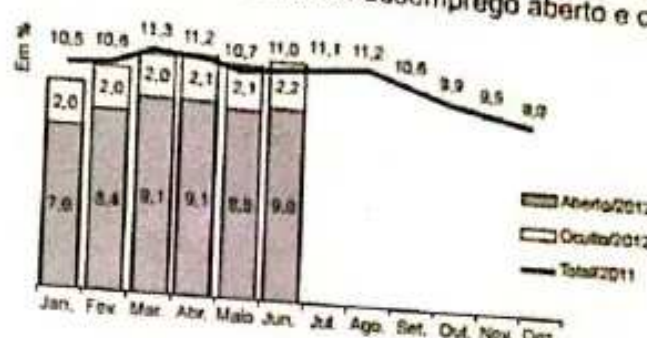
a) 29.

b) 44.

c) 56.

d) 63.

e) 80.

31) **(ENEM)** O gráfico apresenta taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.

Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

Disponível em: www.dieese.org.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (fragmento).

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de

a) 1,1.

b) 3,5.

c) 4,5.

d) 6,8.

e) 7,9.

32) **(ENEM)** O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta ...

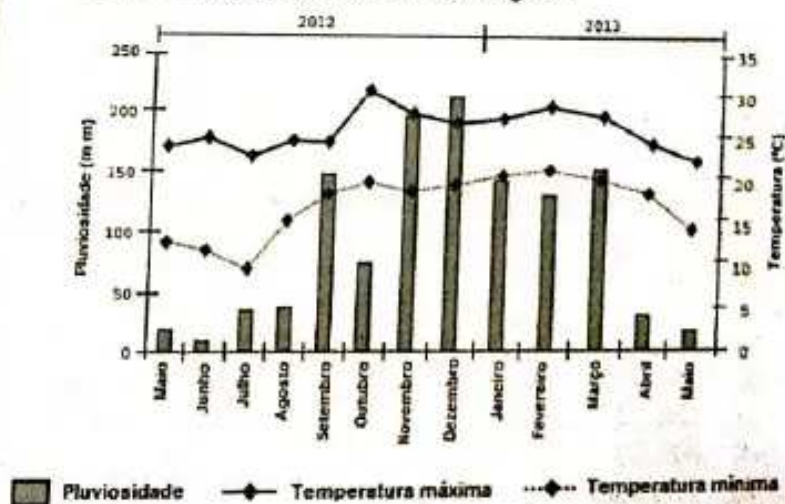
Distribuição e revenda 0,43 | 0,26 | Tributos | 0,22 | Distribuição e revenda

Fontes: Petrobras, Agência Nacional do Petróleo (ANP) e Energy Information Administration (EIA).

Note que, considerando apenas a parte correspondente à refinaria, o preço da gasolina vendida no Brasil é inferior ao preço cobrado nos Estados Unidos, mas os tributos, a distribuição e a revenda aumentam o preço final de venda nos postos brasileiros.

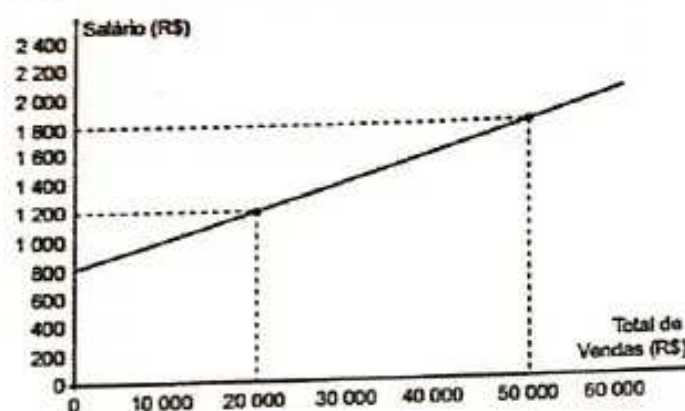
Suponha que fosse tomada a decisão de se diminuir o preço final de venda nos postos brasileiros sem alterar a parcela do preço da gasolina vendida na refinaria, de modo que o preço final se igualasse ao cobrado nos postos dos Estados Unidos.

Veja, ed. 2 306, ano 40. N. 7, 13 fev. 2013 (Adapatado).

em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.

Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara.

O mês escolhido para o plantio foi

a) janeiro.
b) fevereiro.
c) agosto.
d) novembro.
e) dezembro.

33) **(ENEM)** No comércio é comumente utilizado o salário mensal comissionado. Além de um valor fixo, o vendedor tem um incentivo, geralmente um percentual sobre as vendas. Considere um vendedor que tenha salário comissionado, sendo sua comissão dada pelo percentual do total de vendas que realizar no período. O gráfico expressa o valor total de seu salário, em reais, em função do total de vendas realizadas, também em reais.

Qual o valor percentual da sua comissão?

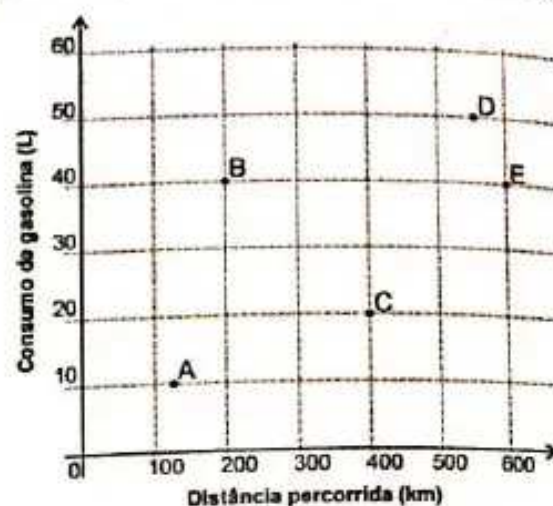
a) 2,0%
b) 5,0%
c) 16,7%
d) 27,7%
e) 50,0%

34) **(ENEM)** Para atrair uma maior clientela, uma loja de móveis fez uma promoção oferecendo um desconto de 20% em alguns de seus produtos.

No gráfico, estão relacionadas as quantidades vendidas de cada um dos produtos, em um dia de promoção.

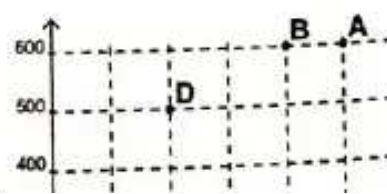
No quadro constam os preços de cada produto vendido já com o desconto de 20% oferecido pela loja.

35) **(ENEM)** A economia no consumo de combustível é um fator importante para a escolha de um carro. É considerado mais econômico o carro que percorre a maior distância por litro de combustível.

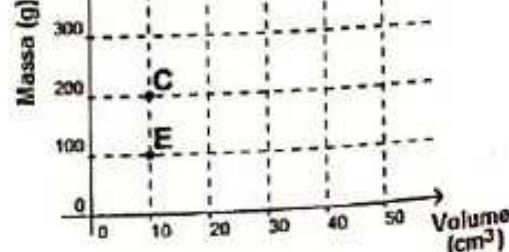
O gráfico apresenta a distância (km) e o respectivo consumo de gasolina (L) de cinco modelos de carros.

O carro mais econômico em relação ao consumo de combustível é o modelo

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

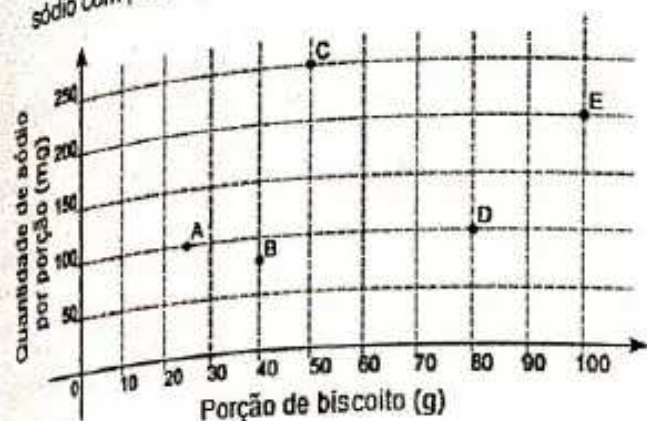
36) **(ENEM)** Possivelmente você já tenha escutado a pergunta: "O que pesa mais, 1 kg de algodão ou 1 kg de chumbo?". É óbvio que ambos têm a mesma massa, portanto, o mesmo peso. O truque dessa pergunta é a grande diferença de volumes que faz, enganosamente, algumas pessoas pensarem que pesa mais quem tem maior volume, levando-as a responderem que é o algodão. A grande diferença de volumes decorre da diferença de densidade (ρ) dos materiais, ou seja, a razão entre suas massas e seus respectivos volumes, que pode ser representada pela expressão: $\rho = \frac{m}{v}$

Considere as substâncias A, B, C, D e E representadas no sistema cartesiano (volume x massa) a seguir:

Móvel	Preço (R$)
Cama	450,00
Mesa	300,00
Colchão	350,00
Pia de cozinha	400,00

Qual foi o valor total de desconto, em reais, concedido pela loja com a venda desses produtos durante esse dia de promoção?

a) 300,00
b) 375,00
c) 720,00
d) 900,00
e) 1 125,00

A substância com maior densidade é

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

37) **(ENEM)** O sódio está presente na maioria dos alimentos industrializados, podendo causar problemas cardíacos em pessoas que ingerem grandes quantidades desses alimentos. Os médicos recomendam que seus pacientes diminuam o consumo de sódio. Com base nas informações nutricionais de cinco marcas de biscoitos (A, B, C, D e E), construiu-se o gráfico, que relaciona quantidades de sódio com porções de diferentes biscoitos.

Qual das marcas de biscoito apresentadas tem a menor quantidade de sódio por grama do produto?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

38) **(ENEM)** Cinco máquinas de costura são utilizadas em uma confecção de calças. O proprietário deseja comprar mais uma dessas máquinas, idêntica a uma das já existentes, devendo escolher a que tiver a maior média de produção por hora. Na tabela estão indicadas as quantidades de horas trabalhadas e de calças confeccionadas por cada uma das máquinas em determinados períodos observados.

Máquina	Horas	Número de calças confeccionadas
1	240	960
2	210	1 050
3	170	1 020
4	160	480
5	160	800

A máquina a ser comprada deverá ser idêntica à

a) 1.
b) 2.
c) 3.

Para facilitar a tomada de decisão, o departamento informou que sua demanda será de, exatamente, 50 000 cópias.

Assim, deve-se adquirir a impressora

a) A ou B, em vez de C.
b) B, em vez de A ou C.
c) A, em vez de B ou C.
d) C, em vez de A ou B.
e) A ou C, em vez de B.

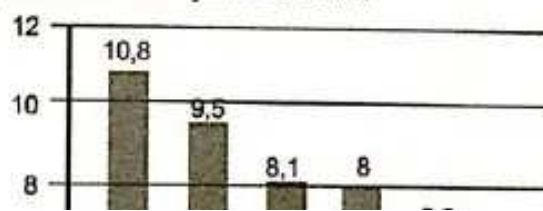
40) **(ENEM)** O quadro apresenta dados sobre viagens distintas, realizadas com o mesmo veículo, por diferentes motoristas. Em cada viagem, o veículo foi abastecido com combustível de um preço diferente e trafegou com uma velocidade média distinta.

Motorista	Custo por litro de combustível (R$)	Distância percorrida (km)	Velocidade média (km/h)
1	2,80	400	84
2	2,89	432	77
3	2,65	410	86
4	2,75	415	74
5	2,90	405	72

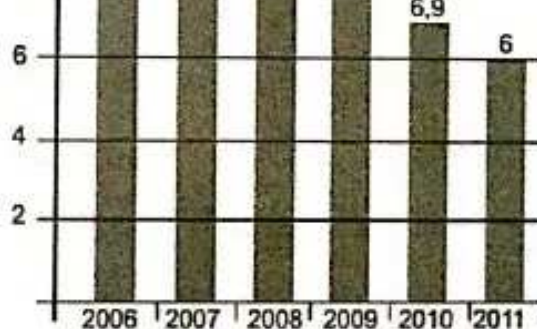
Sabe-se que esse veículo tem um rendimento de 15 km por litro de combustível se trafegar com velocidade média abaixo de 75 km/h. Já se trafegar com velocidade média entre 75 km/h e 80 km/h, o rendimento será de 16 km por litro de combustível. Trafegando com velocidade média entre 81 km/h e 85 km/h, o rendimento será de 12 km por litro de combustível e, acima dessa velocidade média, o rendimento cairá para 10 km por litro de combustível.

O motorista que realizou a viagem que teve o menor custo com combustível foi o de número

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

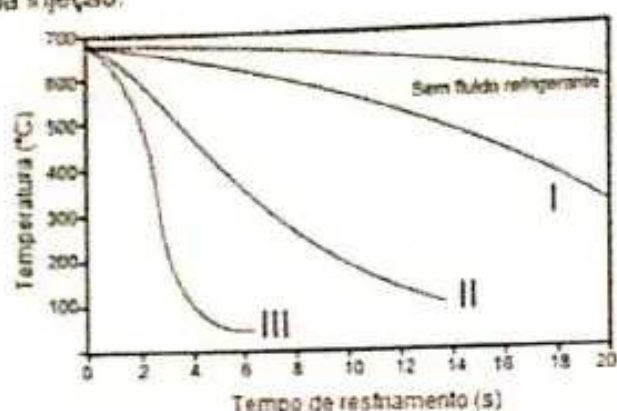
41) **(ENEM)** O gráfico a seguir mostra a evolução da taxa de desemprego (ou seja, a porcentagem da população economicamente ativa que está desempregada) nas seis principais regiões metropolitanas brasileiras nos meses de julho de 2006 a julho de 2011.

d) 4.
e) 5.

39) **(ENEM)** Uma empresa pretende adquirir uma nova impressora com o objetivo de suprir um dos seus departamentos que tem uma demanda grande por cópias. Para isso, efetuou-se uma pesquisa de mercado que resultou em três modelos de impressora distintos, que se diferenciam apenas pelas seguintes características:

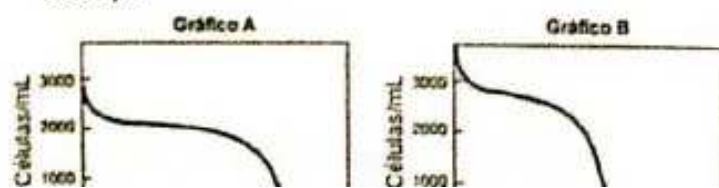
Características	Impressora A	Impressora B	Impressora C
Custo da máquina (sem cartucho)	R$ 500,00	R$ 1 100,00	R$ 2 000,00
Custo do cartucho	R$ 80,00	R$ 140,00	R$ 250,00
Cópias por cartucho	1 000	2 000	5 000

Suponha que a razão entre as taxas de desemprego de julho de 2010 e julho de 2011 seja igual à razão entre a taxa de desemprego de julho de 2011 e julho de 2012.

A taxa de desemprego em julho de 2012 será um número entre

a) 4,0 e 4,5.
b) 5,0 e 5,5.
c) 5,5 e 6,1.
d) 6,0 e 6,6.
e) 6,6 e 7,1.

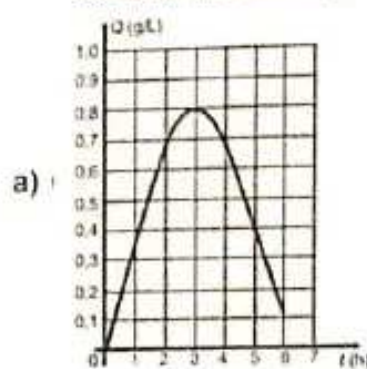
42) **(ENEM)** Uma fundição de alumínio utiliza, como matéria-prima, lingotes de alumínio para a fabricação de peças injetadas. Os lingotes são derretidos em um forno e o alumínio, em estado líquido, é injetado em moldes para se solidificar no formato desejado. O gráfico indica as curvas de resfriamento do alumínio fundido no molde para três diferentes fluidos refrigerantes (tipo I, tipo II e tipo III), que são utilizados para resfriar o molde, bem como a curva de resfriamento quando não é utilizado nenhum tipo de fluido refrigerante. A peça só pode ser retirada do molde (desmolde) quando atinge a temperatura de 100 °C. Para atender a uma encomenda, a fundição não poderá gastar mais do que 8 segundos para o desmolde da peça após a sua injeção.

Com a exigência para o desmolde das peças injetadas, qual(is) fluido(s) refrigerante(s) poderá(ão) ser utilizado(s) no resfriamento?

a) Qualquer um dos fluidos do tipo I, II e III.
b) Somente os fluidos do tipo II e III.
c) Somente o fluido do tipo III.
d) Não será necessário utilizar nenhum fluido refrigerante.
e) Nenhum dos fluidos refrigerantes indicados atende às exigências.

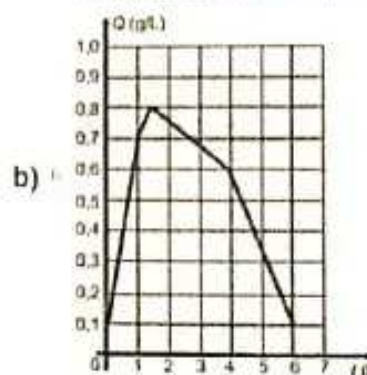
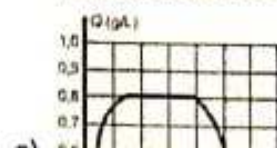
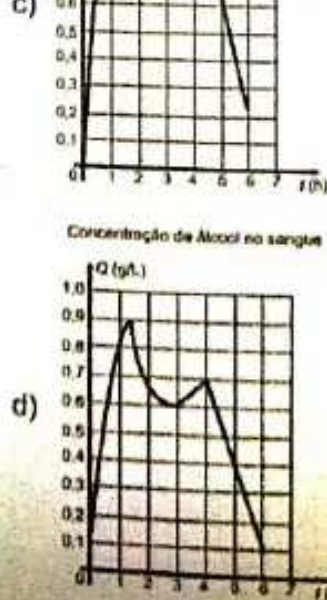
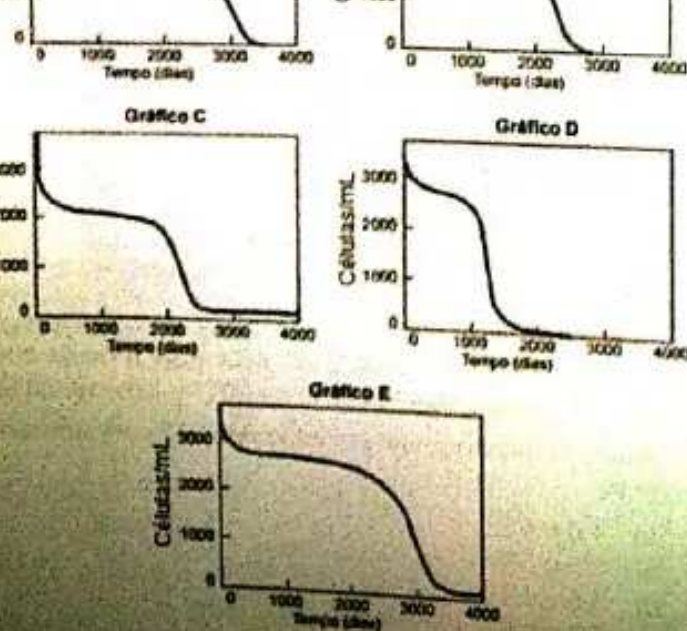
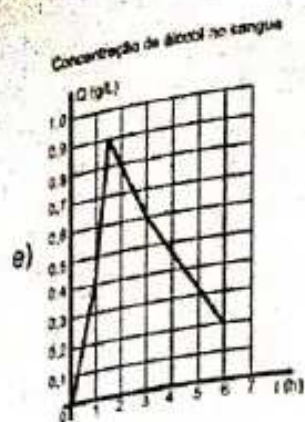
43) **(ENEM)** O modelo matemático desenvolvido por Kirschner e Webb descreve a dinâmica da interação das células não infectadas do sistema imunológico humano com os vírus HIV. Os gráficos mostram a evolução no tempo da quantidade de células não infectadas no sistema imunológico de cinco diferentes pacientes infectados pelo vírus HIV. Quando a população das células não infectadas de um sistema imunológico é extinta, o paciente infectado fica mais suscetível à morte caso contraia alguma outra doença.

A partir desses dados, o sistema imunológico do paciente infectado que ficou mais rapidamente suscetível à morte está representado pelo gráfico

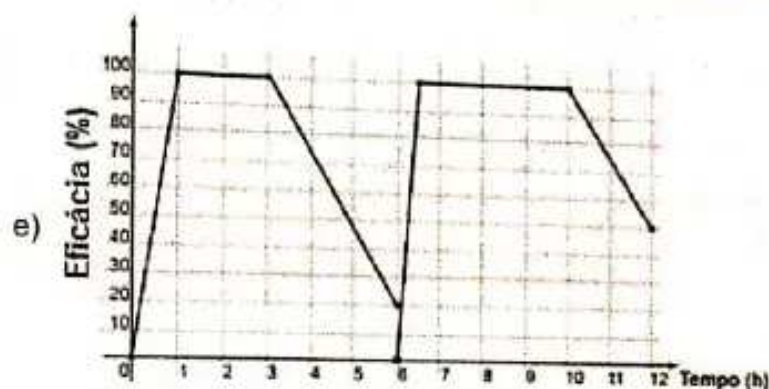
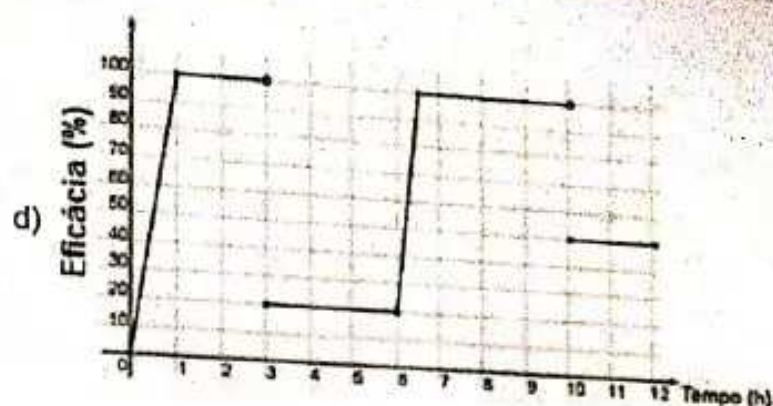
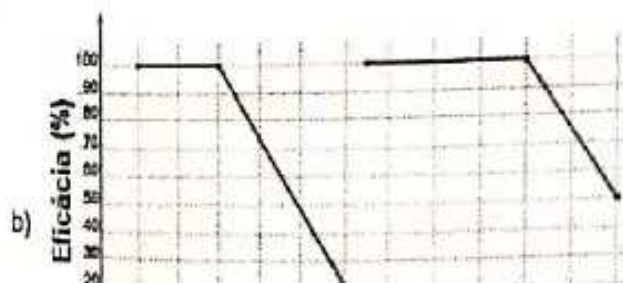
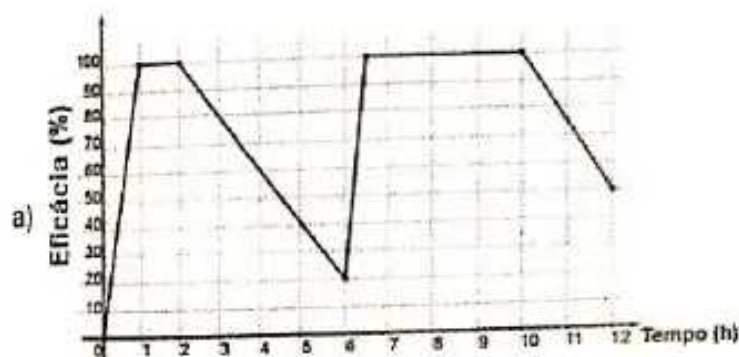
a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

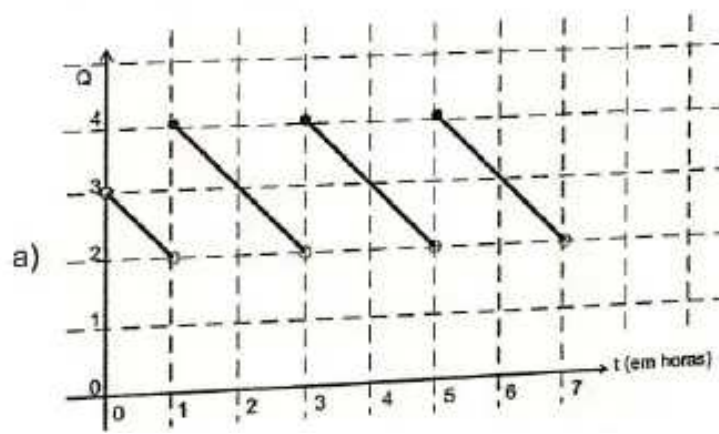
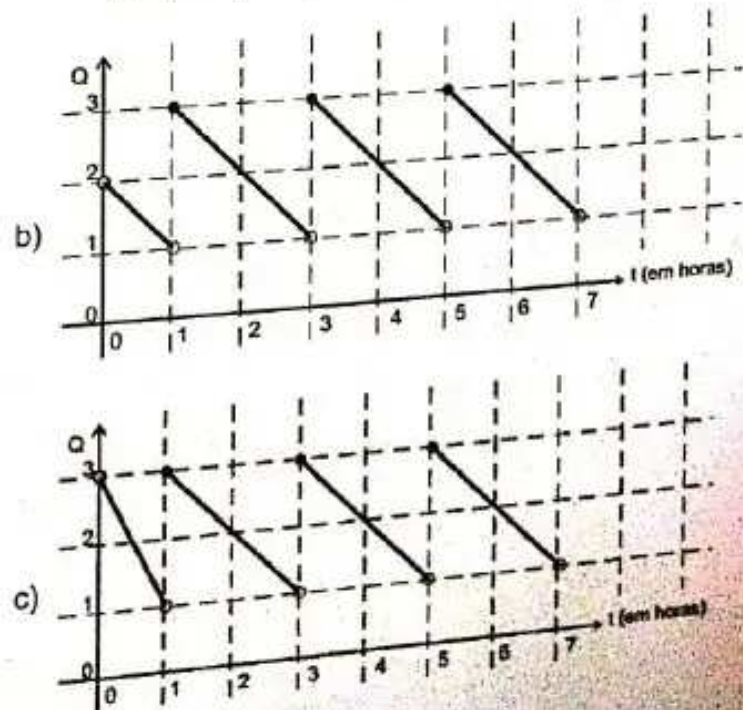
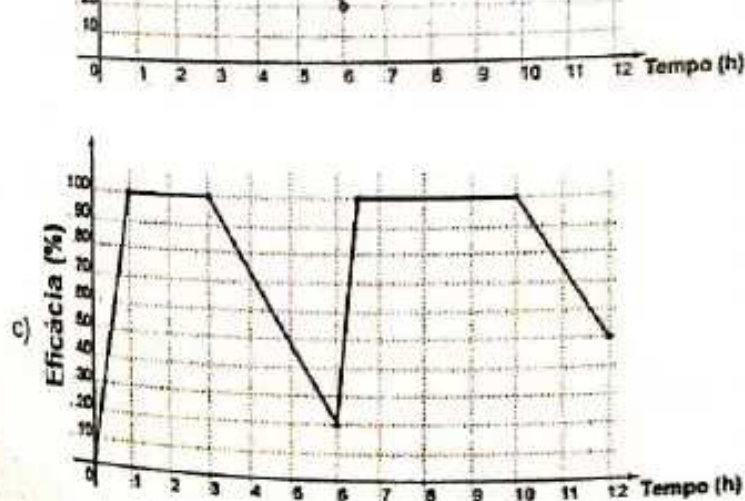
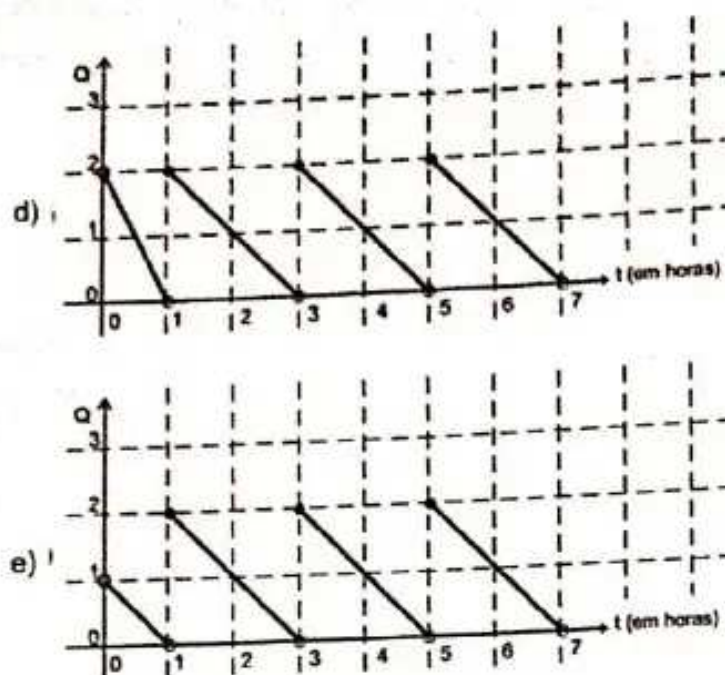
44) **(ENEM)** O código de Trânsito de certo país estabelece penas para quem conduz veículo automotor na via pública, estando com concentração de álcool no sangue igual ou superior a 0,6 grama por litro. Um pesquisador monitorou um indivíduo que ingeriu bebida alcoólica somente após o jantar. Exames realizados no sangue desse indivíduo mostraram que a concentração Q de álcool no sangue, dada em grama por litro, aumentou durante 1 hora e meia. Depois disso começou a diminuir e atingiu a concentração permitida para dirigir, três horas após a ingestão de álcool.

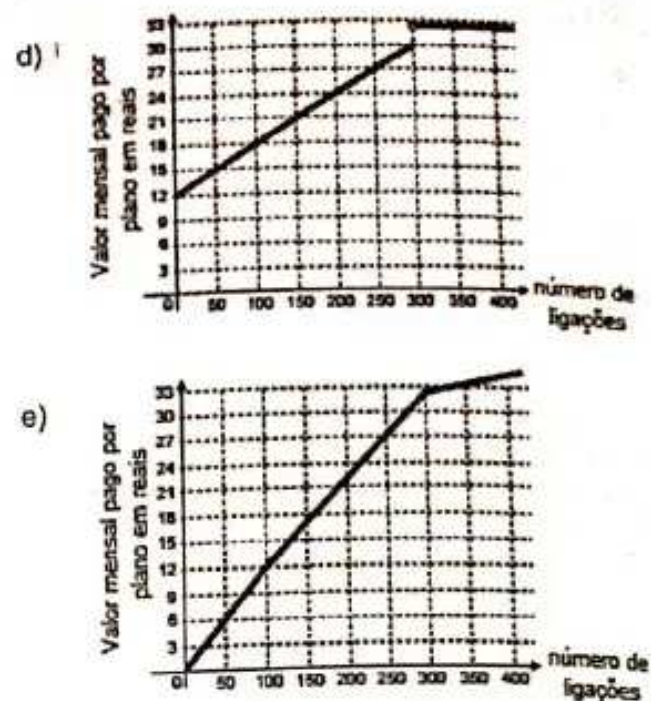
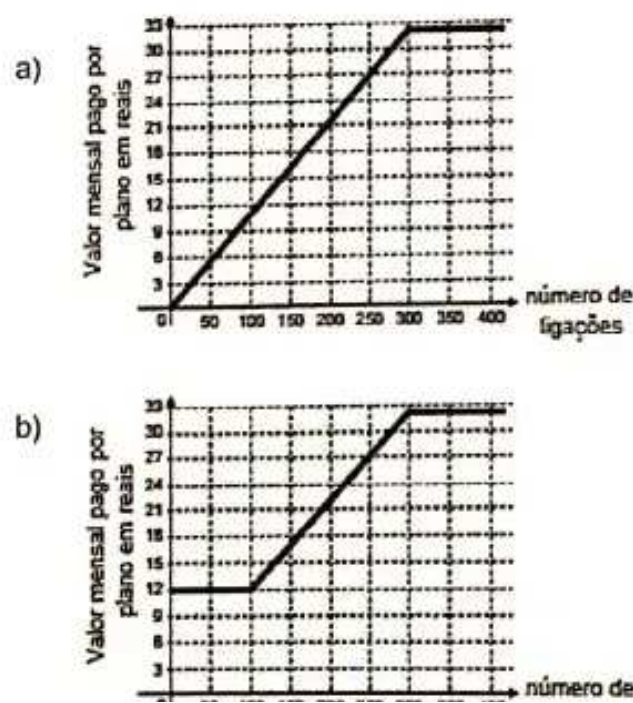
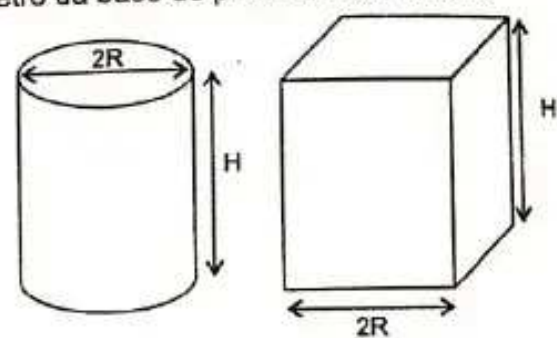
Um gráfico que pode representar a relação entre o tempo após a ingestão e a concentração de álcool no sangue desse indivíduo é

a)

b)

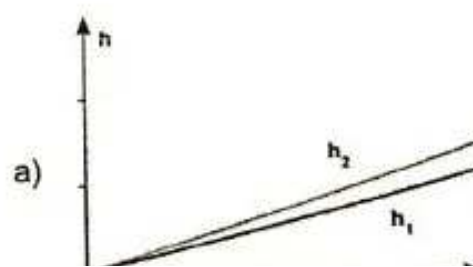
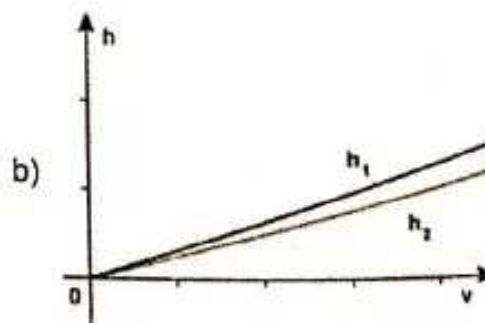
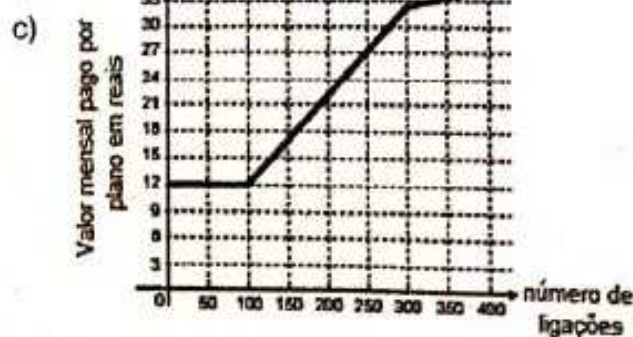
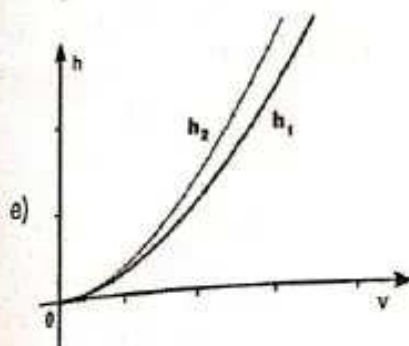
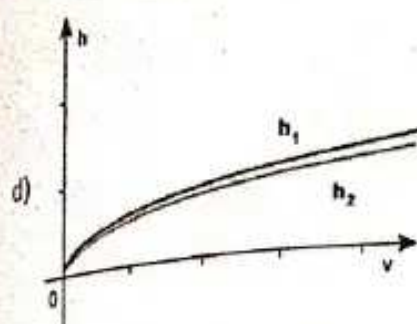
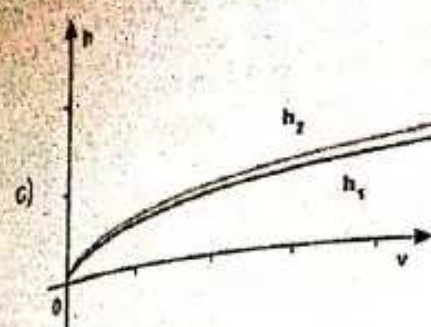
c)

45) **(ENEM)** Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12 h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6 h entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1 h, até atingir a máxima eficácia (100%), e permaneceu em máxima eficácia durante 2 h. Após essas 2 h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as 6 h iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5 h e permanecendo em 100% por 3,5 h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia.

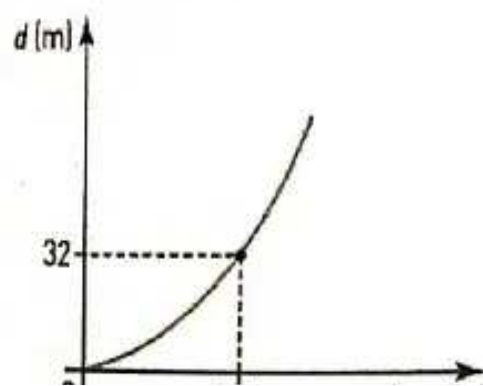
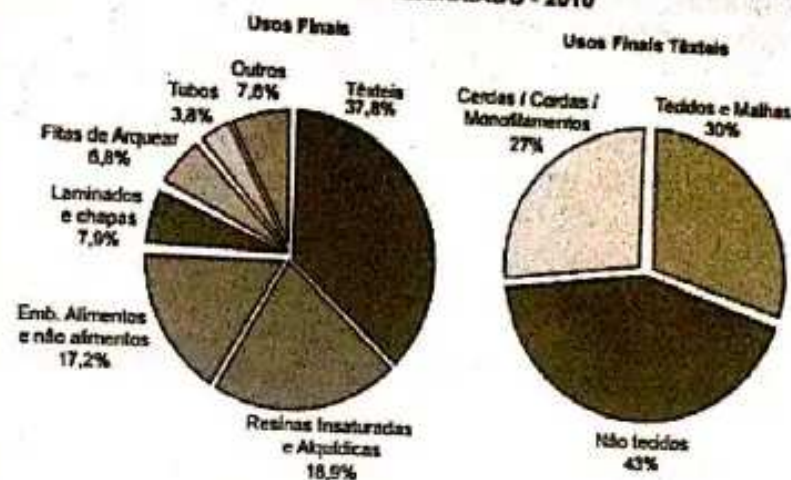
Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das ordenadas, qual é o gráfico que representa tal estudo?

46) **(ENEM)** Um paciente inicia um tratamento em que deve ingerir uma dose de um determinado remédio a cada duas horas. Ao ingerir essa dose, a quantidade Q de uma substância no seu organismo aumenta instantaneamente em 2 unidades. Nas próximas duas horas, essa quantidade decresce de maneira linear até atingir a quantidade existente no momento imediatamente anterior à ingestão do remédio. Por descuido, esse paciente tomou a segunda dose do remédio uma hora depois da primeira. A partir daí, não cometeu mais esse tipo de engano, tomando o remédio a cada duas horas. Antes da primeira dose, a quantidade da substância na corrente sanguínea do paciente era de 1 unidade.

O gráfico que melhor representa a quantidade da substância no organismo do paciente nas sete primeiras horas do tratamento é

47) **(ENEM)** Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00.

Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

48) **(ENEM)** Enchem-se, segundo vazões constantes e idênticas, dois reservatórios, um em forma de um cilindro circular reto e outro em forma de prisma reto de base quadrada, cujo lado da base tem a mesma medida do diâmetro da base do primeiro reservatório.

Volume do cilindro = $\pi \cdot R^2 \cdot H$

Volume do prisma = $4 \cdot R^2 \cdot H$

O gráfico que representa a variação das alturas dos níveis da água do reservatório cilíndrico (h_1) e do reservatório em forma de prisma (h_2) em função do volume de água contido em cada um dos reservatórios (V) estão melhor representados em

49) **(UERJ)** Distância de frenagem é aquela percorrida por um carro do instante em que seu freio é acionado até o momento em que ele para. Essa distância é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade que o carro está desenvolvendo no instante em que o freio é acionado.

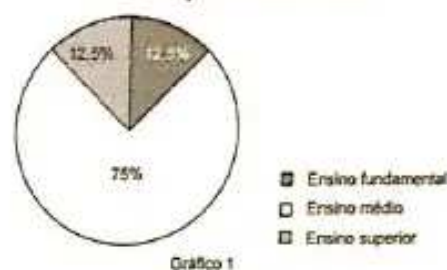
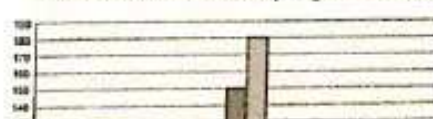
O gráfico abaixo indica a distância de frenagem d, em metros, percorrida por um carro, em função de sua velocidade v, em quilômetros por hora.

Disponível em: www.abipet.org.br. Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado).

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de

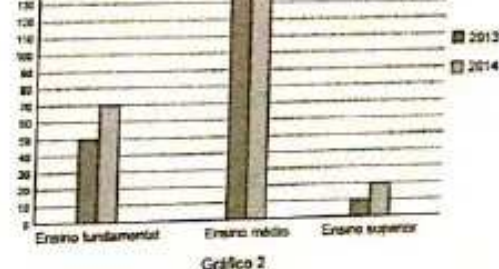
a) 16,0.
b) 22,9.
c) 32,0.
d) 84,6.
e) 106,6.

51) **(ENEM)** Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no gráfico 2.

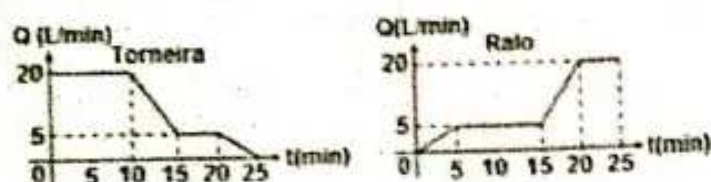
Gráfico 1

0 50 v (km/h)

Admita que o freio desse carro seja acionado quando ele alcançar a velocidade de 100 km/h. Calcule sua distância de frenagem, em metros.

50) **(ENEM)** O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).

Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

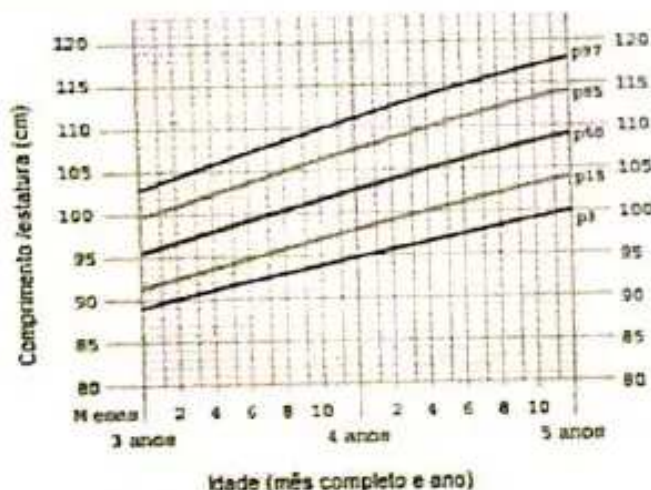
a) R$ 114 285,00
b) R$ 130 000,00
c) R$ 160 000,00
d) R$ 210 000,00
e) R$ 213 333,00

52) **(ENEM)** Um reservatório é abastecido com água por uma torneira e um ralo faz a drenagem da água desse reservatório. Os gráficos representam as vazões Q, em litro por minuto, do volume de água que entra no reservatório pela torneira e do volume que sai pelo ralo, em função do tempo t, em minuto.

Em qual intervalo de tempo, em minuto, o reservatório tem uma vazão constante de enchimento?

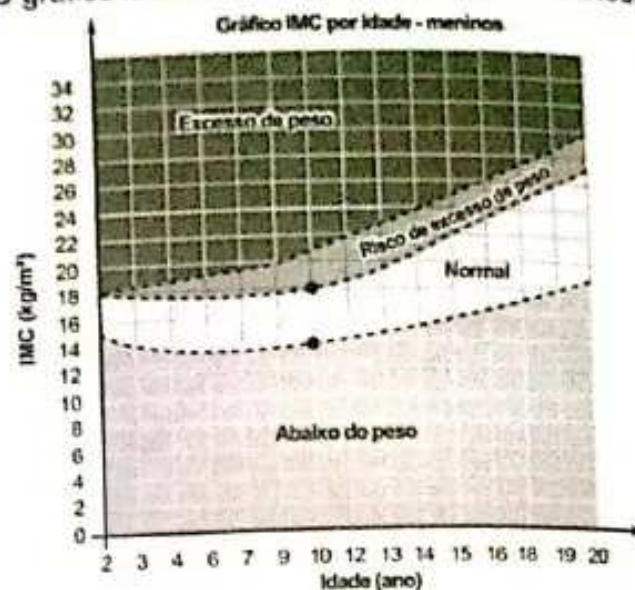
a) De 0 a 10.
b) De 5 a 10.
c) De 5 a 15.
d) De 15 a 25.
e) De 0 a 25.

53) **(ENEM)** A fim de acompanhar o crescimento de crianças, foram criadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) tabelas de altura, também adotadas pelo Ministério da Saúde do Brasil. Além de informar os dados referentes ao índice de crescimento, a tabela traz gráficos com curvas, apresentando padrões de crescimento estipulados pela OMS.

O gráfico apresenta o crescimento de meninas, cuja análise se dá pelo ponto de intersecção entre o comprimento, em centímetro, e a idade, em mês completo e ano, da criança.

Disponível em: www.aprocura.com.br. Acesso em: 22 out. 2015 (adaptado).

Uma menina aos 3 anos de idade tinha altura de 85 centímetros e aos 4 anos e 4 meses sua altura chegou a

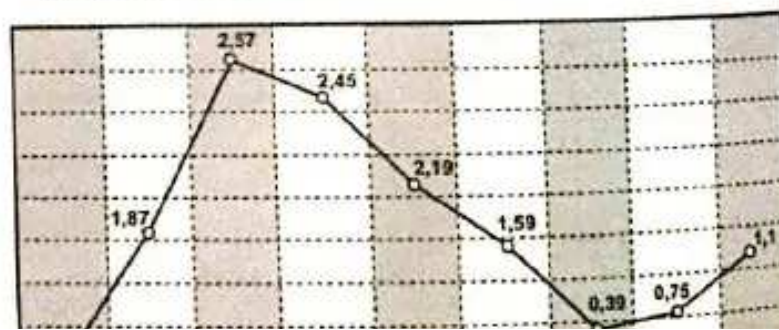
naturalmente, começam a vida com um alto índice de gordura corpórea, mas vão ficando mais magras conforme envelhecem, por isso os cientistas criaram um IMC especialmente para as crianças e jovens adultos, dos dois aos vinte anos de idade, chamado de IMC por idade.

O gráfico mostra o IMC por idade para meninos.

Uma mãe resolveu calcular o IMC de seu filho, um menino de dez anos de idade, com 1,20 m de altura e 30,92 kg.

Disponível em: http://saude.hsw.uol.com.
Acesso em: 31 jul. 2012.

Para estar na faixa considerada normal de IMC, os valores mínimo e máximo que esse menino precisa emagrecer, em quilograma, devem ser, respectivamente,

a) 1,12 e 5,12.
b) 2,68 e 12,28.
c) 3,47 e 7,47.
d) 5,00 e 10,76.
e) 7,77 e 11,77.

55) **(ENEM)** O gráfico mostra a variação percentual do valor do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil, por trimestre, em relação ao trimestre anterior:

um valor que corresponde a um ponto exatamente sobre a curva p50. Qual foi o aumento percentual da altura dessa menina, descrito com uma casa decimal, no período considerado?

a) 23,5%
b) 21,2%
c) 19,0%
d) 11,8%
e) 10,0%

54) **(ENEM)** O Índice de Massa Corporal (IMC) pode ser considerado uma alternativa prática, fácil e barata para a medição direta de gordura corporal. Seu valor pode ser obtido pela fórmula $IMC = \frac{Massa}{(Altura)^2}$, na qual a massa é em quilograma e a altura, em metro. As crianças,

-1,92

1º trimestre 2º trimestre 3º trimestre 4º trimestre 1º trimestre 2º trimestre 3º trimestre 4º trimestre 1º trimestre
2009 2010 2011

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 6 ago. 2012.

De acordo com o gráfico, no período considerado, o trimestre em que o Brasil teve o maior valor do PIB foi o

a) segundo trimestre de 2009.
b) quarto trimestre de 2009.
c) terceiro trimestre de 2010.
d) quarto trimestre de 2010.
e) primeiro trimestre de 2011.

56) **(ENEM)** Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.

No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é

a) h × t
b) h × t
c) h × t
d) h × t
e) h × t

23) d
24) d
25) a
26) e
27) d
28) c
29) b
30) c
31) e
32) a
33) a
34) d
35) c
36) d
37) d
38) c
39) e
40) d
41) b
42) c
43) d
44) e
45) c
46) a
47) b
48) b
49) 128 m
50) c
51) b
52) b
53) a
54) d
55) e
56) d

Anotações

Gabarito

1) 101 kg
2) b
3) c
4) c
5) d
6) b
7) d
8) a
9) d
10) d
11) a
12) e
13) d
14) c
15) d
16) e
17) b
18) c
19) c
20) c
21) a
22) b

TQM

Este livro traz toda teoria do Ensino Médio e uma revisão dos conteúdos do Ensino Fundamental, além de capítulos dedicados à Estatística, Análise Gráfica, Simetrias e Projeções, tópicos que vêm sendo sistematicamente cobrados nas provas do ENEM, UERJ, PUC, EEAR e AFA.